УДК 532.5.011.12

С. С. КАЯНОВИЧ

РАЗРЕШИМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ СТЕРЖНЕВОГО ТЕЧЕНИЯ

Минский государственный высший радиотехнический колледж

(Поступила в редакцию 19.12.2014)

Введение. Систематическое изложение вопросов разрешимости краевых задач для уравнений Навье – Стокса, описывающих движение вязких несжимаемых жидкостей, было дано в работе [1], где в разделе «Добавление» отмечалось, что вопрос о том, имеет ли место однозначная разрешимость «в целом» начально-краевой задачи для этих уравнений, остается открытым. Поэтому в статье [2] было предложено для описания течений вязкой жидкости брать модифицированные уравнения, которые содержат слагаемые с малым положительным коэффициентом ε, отсутствующие в уравнениях Навье – Стокса.

В связи с тем, что для модифицированных уравнений теорема существования решения имеет место, нами [3] исследовалась разностная схема для этих уравнений, но она не содержала градиента давления. В работе [4] рассматривались разностные схемы для классических уравнений, при этом исследования проводились в переменных скорость-давление.

Впервые исследования разрешимости дифференциальной модели стержневого течения были представлены в работе [5], однако они выполнялись при жестких предположениях относительно поведения искомых функций на границе области поиска решения, что умаляло полученный результат. Это заставило обратить более пристальное внимание на граничные условия [6–8].

Как следует из [2], основная трудность исследования разрешимости модели Навье – Стокса связана с большими градиентами скоростей, которые имеют место у границ с условиями прилипания. Поэтому в [5–9] акцент делался на граничные условия. В других же работах он переносился на переменную по времени или же рассматривалось течение сжимаемой жидкости. Так, например, в [10] изучалось решение начальной задачи (задачи Коши), в [11] – поведение решений во времени при начальном условии из пространства Соболева, в [12, 13] – сжимаемые жидкости.

В настоящей работе проводится исследование разрешимости уравнений работы [9] без предположений, выдвинутых в [5]. Производная по времени, которая присутствует в уравнении количества движения, заменяется разностной производной, как это делается в методе Ротэ [14], и это уравнение становится дифференциально-разностным. В этой дифференциально-разностной модели на каждом из полученных временных слоев уравнение количества движения теперь является уравнением эллиптического типа, для которого справедлива теорема Шаудера [15, 16], позволяющая доказать разрешимость.

Рассматриваемая система уравнений описывает течения, где поперечная компонента скорости и ее производная в поперечном направлении не равны тождественно нулю [9]. Область течения, в которой эта производная отрицательна, называется стержнем течения, а само течение – стержневым. Следует отметить, что решение системы, рассматриваемой в [9], если оно существует, удовлетворяет всем уравнениям модели Навье – Стокса.

1. Постановка задачи. Примем следующие обозначения:

$$x=(x_1,x_2),\ 0\le x_1\le L,\ 0\le x_2\le H,\ 0\le t\le T,\ \Omega=(0,L)\times(0,H),$$

$$S_1=[0\le x_1\le L, x_2=0],\ S_2=[0\le x_1\le L, x_2=H],\ S_3=[x_1=0, 0\le x_2\le H],\ S_4=[x_1=L, 0\le x_2\le H],$$

$$S=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4 \text{ – граница } \Omega,\ \overline{\Omega}=\Omega\cup S,\ \Omega_T=\Omega\times(0,T],\ S_T=S\times[0,T],\ \overline{\Omega}_T=\overline{\Omega}\times[0,T],$$

и рассмотрим задачу (плотность $\rho = 1$):

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial u_1}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_1}, \ (x,t) \in \Omega_T; \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \ x \in [0,L] \times (0,H); \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0, \ x \in \Omega; \tag{3}$$

$$u_1 \big|_{t=0} = \bar{b}(x), \ x \in \overline{\Omega}; \tag{4}$$

$$\bar{b} \big|_{S_1 \cup S_2} = 0; \tag{5}$$

$$u_2 \big|_{S_1 \cup S_2} = 0; \tag{6}$$

$$\int_0^H \frac{\partial \bar{b}(x_1,z)}{\partial x_1} dz = 0, \ 0 \le x_1 \le L, \tag{7}$$

для которой краевые условия для (1) и (3) определим ниже.

При $t = 0$ функция $u_1(x,0) = \bar{b}(x)$ задана. Найдем при $t = 0$ функцию u_2, решая (2) с граничным условием $u_2 \big|_{S_1} = 0$ $(0 \le x_1 \le L, \ 0 < x_2 \le H)$,

$$u_2(x_1,x_2) = -\int_0^{x_2} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz.$$

Отметим, что условие $u_2 \big|_{S_2} = 0$ выполняется автоматически, так как

$$u_2(x_1,H) = -\int_0^H \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz = -\int_0^H \frac{\partial \bar{b}(x_1,z)}{\partial x_1} dz = 0$$

в силу (7).

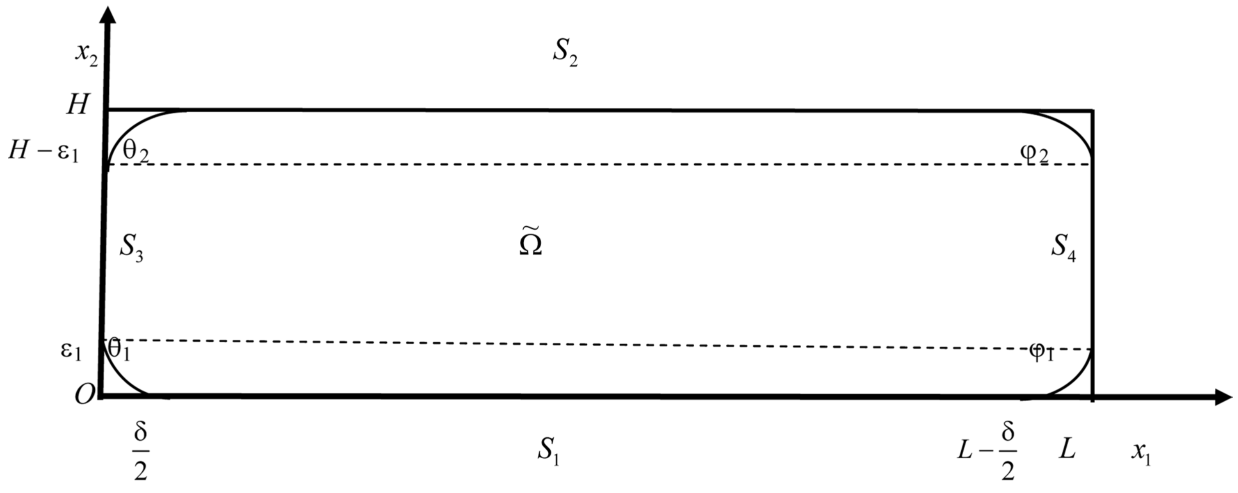
Для нахождения функций $p(x,t)$, $0 \le t \le T$, и $u_1(x,t)$, $0 < t \le T$, потребуются дополнительные обозначения, определения и рисунок, на котором изображен канал и обозначены некоторые участки границ.

Пусть $\tilde{\Omega}$ – область, ограниченная кривой $\tilde{S}$, $\overline{\tilde{\Omega}} = \tilde{\Omega} \cup \tilde{S}$, $\tilde{S} = \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2 \cup \tilde{S}_3 \cup \tilde{S}_4$, где

$$\tilde{S}_1 = \left[0 \le x_1 \le \frac{\delta}{2}, \ x_2 = \theta_1(x_1)\right] \cup \left[\frac{\delta}{2} \le x_1 \le L - \frac{\delta}{2}, \ x_2 = 0\right] \cup \left[L - \frac{\delta}{2} \le x_1 \le L, \ x_2 = \varphi_1(x_1)\right],$$

$$\tilde{S}_2 = \left[0 \le x_1 \le \frac{\delta}{2}, \ x_2 = \theta_2(x_1)\right] \cup \left[\frac{\delta}{2} \le x_1 \le L - \frac{\delta}{2}, \ x_2 = H\right] \cup \left[L - \frac{\delta}{2} \le x_1 \le L, \ x_2 = \varphi_2(x_1)\right],$$

$$\tilde{S}_3 = \left[x_1 = 0, \ \theta_1(0) \le x_2 \le \theta_2(0)\right], \ \tilde{S}_4 = \left[x_1 = L, \ \varphi_1(L) \le x_2 \le \varphi_2(L)\right],$$



$$\Omega_1=[0\le x_1\le L,\ 0<x_2\le\varepsilon],\ \Omega_2=[0\le x_1\le L,\ H-\varepsilon\le x_2<H],$$
$$\Omega'=[0\le x_1\le L,\ \varepsilon_1<x_2<H-\varepsilon_1],\ \varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2},$$
$$S_1'=[0\le x_1\le L,\ x_2=\varepsilon_1],\ S_2'=[0\le x_1\le L,\ x_2=H-\varepsilon_1],$$
$$\theta_i(x_1),\ \varphi_i(x_1)\ (i=1,2)$$

– строго монотонные функции.
Пусть, кроме того,

$$\theta_1(0)=\varphi_1(L)=\varepsilon_1,\ \theta_2(0)=\varphi_2(L)=H-\varepsilon_1,\ \theta_1\left(\frac{\delta}{2}\right)=\varphi_1\left(L-\frac{\delta}{2}\right)=0,\ \theta_2\left(\frac{\delta}{2}\right)=\varphi_2\left(L-\frac{\delta}{2}\right)=H.$$

Будем считать, что θ_2 симметрична θ_1, а $\varphi_2-\varphi_1$ относительно прямой $x_2=\frac{H}{2}$. Таким образом, области $\overline{\Omega},\ \overline{\tilde{\Omega}}$ симметричны относительно той же прямой $x_2=\frac{H}{2}$. Здесь $\varepsilon,\ \delta$ – малые положительные числа, $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $\tilde{\Omega}_T=\tilde{\Omega}\times[0,T]$, $\tilde{S}_T=\tilde{S}\times[0,T]$, $\overline{\tilde{\Omega}}_T=\overline{\tilde{\Omega}}\times[0,T]$. Будем говорить, что функция $g(x,t)$, определенная на $\overline{\tilde{\Omega}}_T$, является четной (нечетной) по x_2, если при любых $0\le x_1\le L,\ 0\le t\le T$ имеет место равенство

$$g\left(x_1,\tilde{S}_2(x_1)-x_2,t\right)=g\left(x_1,\tilde{S}_1(x_1)+x_2,t\right)\ \left(g\left(x_1,\tilde{S}_2(x_1)-x_2,t\right)=-g\left(x_1,\tilde{S}_1(x_1)+x_2,t\right)\right),\qquad(8)$$

где $0\le x_2\le\frac{\tilde{S}_2(x_1)-\tilde{S}_1(x_1)}{2}$. Аналогично определяется четность (нечетность) функции, заданной на $\overline{\Omega}_T$.

Будем говорить, что функция $g(s,t)$, определенная на $\tilde{S}_T$, является четной (нечетной) по x_2, если при любых $0\le x_1\le L,\ 0\le t\le T$ имеет место равенство (8), в котором $x_2=0$.

Для дальнейших рассуждений нам потребуется срезающая функция, которую определим так:

$$\begin{gathered}\zeta\ (x)=1,\text{ если }\delta\le x_1\le L-\delta,\ 0\le x_2\le H,\\ 0\le\zeta\ (x)\le 1,\text{ если}\left[\frac{\delta}{2}\le x_1\le\delta\right]\cup\left[L-\delta\le x_1\le L-\frac{\delta}{2}\right],\ 0\le x_2\le H,\\ \zeta\ (x)=0,\text{ если}\left[0\le x_1\le\frac{\delta}{2}\right]\cup\left[L-\frac{\delta}{2}\le x_1\le L\right],\left[\theta_1(x_1)\le x_2\le\theta_2(x_1)\right]\cup\left[\varphi_1(x_1)\le x_2\le\varphi_2(x_1)\right],\end{gathered}\qquad(9)$$

где $x=(x_1,x_2)$, ζ – функция, четная по x_2.

Будем полагать, что $\zeta\ (x)\in C_{l,\alpha}(\overline{\tilde{\Omega}})$, $\overline{b}(x)\in C_{l,\alpha}(\overline{\tilde{\Omega}})$, $\tilde{S}\in C_{l,\alpha}$ и $\overline{b}(x)$ – функция, четная по x_2. Тогда функция u_2, найденная выше при $t=0$, будет удовлетворять условию $\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\in C_{l-1,\alpha}(\overline{\tilde{\Omega}})$ и будет нечетной по x_2.
Здесь $l\ge 3,\ \alpha\in(0,1)$, а классы функций $C_{l,\alpha}(\overline{\Omega}),\ C_{l,\alpha}(S)$ и смысл принадлежности $S\in C_{l,\alpha}$ определены в [15].

Зная функции u_1,u_2, рассмотрим (3) с условием $(t=0)$:

$$\frac{\partial p}{\partial\overline{n}}\Big|_{\tilde{S}}=\zeta(s)\sum_{j=1}^{2}\omega_j(s)\cos\alpha_j,\ \ s\in\tilde{S},$$

где $\frac{\partial p}{\partial\overline{n}}\Big|_{\tilde{S}}$ – производная по направлению вектора $\overline{n}$ внутренней нормали к $\tilde{S}$, α_i – угол между вектором $\overline{n}$ и осью Ox_i, $\omega_i=\nu\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2u_i}{\partial x_k^2}-\sum_{k=1}^{2}u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$.

Условие разрешимости

$$\int_{\tilde S}\zeta(s)\sum_{j=1}^{2}\omega_j(s)\cos\alpha_j ds=0$$

для этой задачи выполняется в силу (9) и нечетности функции u_2 по x_2, при этом ее решение определено с точностью до произвольной постоянной [17] и принадлежит классу $C_{l-1,\alpha}(\bar{\tilde\Omega})$ [15]. Итак, при $t=0$ определены все три функции u_1, u_2, p. Для их нахождения при $t>0$ будем применять метод Ротэ [14].

2. Метод Ротэ. Будем вычислять приближенные решения рассматриваемой задачи методом Ротэ. Разобьем пространство (x,t) плоскостями $t_m=m\tau$, $m=0,1,2,...,M$, на слои и предположим, ради сокращения записи, что $M\tau=T$. Пусть $\tilde\Omega_m$ есть сечение $\tilde\Omega_T$ плоскостью $t_m=m\tau$, $\tilde S_m$ – его граница, $\bar{\tilde\Omega}_m=\tilde\Omega_m\cup\tilde S_m$.

На каждом слое $\tilde\Omega_m$ определим функции, которые будем обозначать $u_{1,m}, u_{2,m}, p_m, m=\overline{0,M}$. Выше было найдено решение при $t=0$, т. е. решение $u_{1,0}$, $u_{2,0}$, p_0. Для нахождения функции u_1 на слоях $\tilde\Omega_m$ полагаем

$$u_1\big|_{\tilde S_T}=\tilde\psi_1(s,t),\ (s,t)\in\tilde S_T,\ \text{где}\ \tilde\psi_1(s,t)\in C_{l,\alpha}(\tilde S_T),\ \tilde\psi_1\big|_{t=0}=\bar b(s),\ x=s\in\tilde S,$$

$$\tilde\psi_1=0\ \text{при}\ \frac{\delta}{2}\le x_1\le L-\frac{\delta}{2},\ [x_2=0]\cup[x_2=H],\ t\in[0,T],$$

и преобразуем задачу для u_1 в задачу с нулевым граничным условием.

Вводя в рассмотрение функцию $f(x,t)$, удовлетворяющую при любом $t\in[0,T]$ условию $f\big|_{\tilde S_T}=\tilde\psi_1\big|_{\tilde S_T}$, и новую искомую функцию $w(x,t)$, удовлетворяющую равенству $u_1(x,t)=w\ (x,t)+f(x,t)$, для $w(x,t)$ получаем задачу:

$$\frac{\partial w}{\partial t}-\nu\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2}+(w+f)\frac{\partial w}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial w}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial x_1}w+u_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+F(x,t)+\frac{\partial p}{\partial x_1}=0; \quad (10)$$

$$w\big|_{\tilde S_T}=0; \quad (11)$$

$$w\big|_{t=0}=\bar b(x)-f\big|_{t=0},\ x\in\bar{\tilde\Omega}; \quad (12)$$

$$\bar b(x)-f\big|_{t=0}=0,\ x=s\in\tilde S; \quad (13)$$

где $F(x,t)=\dfrac{\partial f}{\partial t}-\nu\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}+f\frac{\partial f}{\partial x_1}$.

Вводя обозначения $g_{\bar t}(x,t_m)=\dfrac{1}{\tau}(g_m-\check g_m)$, $g_m=g(x,t_m)$, $\check g_m=g(x,t_{m-1})$, полагая $w_m=u_{1,m}-f_m$ и заменяя $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ на разностную производную $w_{\bar t}(x,t_m)$, запишем уравнение (10) в виде

$$\nu\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 w_m}{\partial x_k^2}-(\check w_m+f_m)\frac{\partial w_m}{\partial x_1}-\check u_{2,m}\frac{\partial w_m}{\partial x_2}-\frac{\partial f_m}{\partial x_1}w_m-\frac{\partial f_m}{\partial x_2}\check u_{2,m}-\frac{1}{\tau}w_m+\frac{1}{\tau}\check w_m-F_m-\frac{\partial \check p_m}{\partial x_1}=0 \quad (14)$$

с граничным условием

$$w_m\big|_{\tilde S_m}=0, \quad (15)$$

где $F_m=f_{\bar t}(x,t_m)-\nu\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 f_m}{\partial x_k^2}+f_m\frac{\partial f_m}{\partial x_1}$.

Уравнение (14) запишем в виде

$$Jw_m\equiv\nu\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 w_m}{\partial x_k^2}-(\check w_m+f_m)\frac{\partial w_m}{\partial x_1}-\check u_{2,m}\frac{\partial w_m}{\partial x_2}-\left(\frac{\partial f_m}{\partial x_1}+\frac{1}{\tau}\right)w_m=\frac{\partial f_m}{\partial x_2}\check u_{2,m}-\frac{1}{\tau}\check w_m+F_m+\frac{\partial \check p_m}{\partial x_1} \quad (16)$$

и для доказательства разрешимости (16), (15) воспользуемся теоремой Шаудера [15, 16].

Пусть рассматривается уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{2} a_i(x)u_{x_i} + a(x)u = f(x) \tag{17}$$

с граничным условием

$$u\big|_S = \varphi(s). \tag{18}$$

Пусть коэффициенты уравнения (17) и свободный член f определены в ограниченной области Ω с границей S и принадлежат пространству $C_{l-2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $l \geq 2$, $\alpha \in (0,1)$. Предполагается, что $a_{ij} = a_{ji}$ и

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2,\ \nu = \text{const} > 0, \tag{19}$$

т. е. уравнение эллиптично в $\overline{\Omega}$.

Т е о р е м а Шаудера. *Если коэффициенты оператора L принадлежат* $C_{l-2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *и* a_{ij} *удовлетворяют неравенству* (19)*, если S принадлежит* $C_{l,\alpha}$ *и если задача* (17), (18) *может иметь не более одного решения в* $C_{l,\alpha}(\overline{\Omega})$*, тогда при любых* $f \in C_{l-2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *и* $\varphi \in C_{l,\alpha}(S)$ *задача* (17), (18) *действительно имеет решение из класса* $C_{l,\alpha}(\overline{\Omega})$*,* $l \geq 2$.

Известно [15], что если выполняется неравенство

$$\max_{\Omega} a(x) < 0, \tag{20}$$

то задача (17), (18) не может иметь более одного решения.

Будем полагать, что в $\overline{\tilde{\Omega}}_T$ функция $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ полуограничена снизу, т. е. справедливо неравенство

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \geq \beta = \text{const}. \tag{21}$$

Тогда при выполнении неравенства

$$\frac{1}{\tau} + \beta > 0 \tag{22}$$

и условий

$$f \in C_{l-1,\alpha}(\overline{\tilde{\Omega}}_m),\ F \in C_{l-2,\alpha}(\overline{\tilde{\Omega}}_m),\ \tilde{\psi}_1 \in C_{l,\alpha}(\tilde{S}_m),\ \tilde{S}_m \in C_{l,\alpha},\ l \geq 3 \tag{23}$$

задача (16), (15) при $m = 1$ имеет единственное решение $w_1 \in C_{l,\alpha}(\overline{\tilde{\Omega}}_1)$ (теорема Шаудера). Зная w_1, из соотношения $u_1 = w + f$ находим $u_{1,1} \in C_{l,\alpha}(\overline{\tilde{\Omega}}_1)$. Продолжим $u_{1,1}$, найденную на $\overline{\tilde{\Omega}}$, на всю область $\overline{\Omega}$, доопределив ее в четырех криволинейных треугольниках, расположенных по углам $\overline{\Omega}$. Рассмотрим, например, треугольник с вершинами $(0,0)$, $(0,\varepsilon_1)$, $\left(\dfrac{\delta}{2},0\right)$. Его криволинейная сторона задается уравнением $x_2 = \theta_1(x_1)$ $(x_1 = \theta_1^{-1}(x_2))$. Полагаем $u_{1,1}(x) = u_{1,1}(x_1,x_2) = u_{1,1}(\theta_1^{-1}(x_2),x_2)$ при $0 \leq x_1 \leq \theta_1^{-1}(x_2)$, $0 \leq x_2 \leq \varepsilon_1$. На остальные криволинейные треугольники продолжение осуществляется аналогично. Функцию $u_{1,1}(x)$ $(t = \tau)$, определенную указанным образом на всей $\overline{\Omega}$, обозначаем $u_1(x)$ и решаем уравнение (2) для нахождения $u_2(x)$. Отметим, что условие вида (7) для $u_1(x)$ в общем случае не выполняется и поэтому не удается найти функцию u_2, удовлетворяющую условию $u_2\big|_{S_1 \cup S_2} = 0$, решая только уравнение (2).

Поэтому решаем (2) в областях $\Omega_1 = [0 \leq x_1 \leq L,\ 0 < x_2 \leq \varepsilon]$ и $\Omega_2 = [0 \leq x_1 \leq L,\ H - \varepsilon \leq x_2 < H]$ с граничными условиями

$$u_2\big|_{x_2=0}=0 \text{ и } u_2\big|_{x_2=H}=0 \tag{24}$$

соответственно.

Для любого $x_2 : 0 < x_2 \le \varepsilon$ получаем

$$u_2(x_1,x_2)=-\int_0^{x_2}\frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1}dz,\; u_2(x_1,H-x_2)=-\int_H^{H-x_2}\frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1}dz. \tag{25}$$

Затем интегрируем уравнение

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}=0$$

в области $\Omega'=[0\le x_1\le L, \varepsilon_1<x_2<H-\varepsilon_1]$, $\left(\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ с граничными условиями

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\varepsilon_1}=-\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\Big|_{x_2=\varepsilon_1},\; u_2\big|_{x_2=H-\varepsilon_1}=-\int_H^{H-\varepsilon_1}\frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1}dz. \tag{26}$$

Находим $\dfrac{\partial u_2(x_1,z)}{\partial z}\Big|_{z=x_2}-\dfrac{\partial u_2(x_1,z)}{\partial z}\Big|_{z=\varepsilon_1}=-\dfrac{\partial u_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_1(x_1,\varepsilon_1)}{\partial x_1}.$

В силу первого равенства (26) получаем

$$\frac{\partial u_2(x_1,z)}{\partial z}\Big|_{z=x_2}=-\frac{\partial u_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}.$$

Интегрируем последнее равенство от $H-\varepsilon_1$ до $H-x_2$ $(\varepsilon_1<x_2<H-\varepsilon_1)$:

$$u_2(x_1,H-x_2)-u_2(x_1,H-\varepsilon_1)=-\int_{H-\varepsilon_1}^{H-x_2}\frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1}dz. \tag{27}$$

В силу (27)

$$u_2(x_1,H-x_2)-u_2(x_1,H-\varepsilon_1)=-\int_H^{H-x_2}\frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1}dz+\int_H^{H-\varepsilon_1}\frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1}dz,$$

откуда, согласно второму равенству (26), находим

$$u_2(x_1,H-x_2)=-\int_H^{H-x_2}\frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1}dz. \tag{28}$$

Заметим, что решая уравнение

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}=0,\; x\in\Omega'$$

и используя вместо условий (26) условия

$$u_2\big|_{x_2=\varepsilon_1}=-\int_0^{\varepsilon_1}\frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1}dz,\; \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Big|_{x_2=H-\varepsilon_1}=-\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\Big|_{x_2=H-\varepsilon_1}, \tag{29}$$

вместо (28) мы получили бы

$$u_2(x_1,x_2)=-\int_0^{x_2}\frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1}dz. \tag{30}$$

Первое равенство (25) $(0<x_2\le\varepsilon=2\varepsilon_1)$ и равенство (30) $(\varepsilon_1<x_2<H-\varepsilon_1)$ однозначно определяют функцию u_2 при $0<x_2<H-\varepsilon_1$. Второе равенство (25) однозначно определяет u_2 при $H-2\varepsilon_1\le x_2<H$, но при этом u_2 определяется не интегралом (30), а интегралом (28). Необходимо

показать, что названные интегралы определяют одну и ту же функцию u_2 при тех значениях x_2, при которых эта функция может быть найдена и по формуле вида (28), и по формуле вида (30).

При $x_2 = H - x'_2$ из (28) находим:

$$u_2(x_1, x'_2) = -\int_H^{x'_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz, \qquad (31)$$

а при $x_2 = x'_2$ из (30) получаем:

$$u_2(x_1, x'_2) = -\int_0^{x'_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz. \qquad (32)$$

Для доказательства равенства интегралов (31) и (32) покажем, что их разность равна нулю.

$$\int_0^{x'_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz - \int_H^{x'_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz = \int_0^{x'_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz + \int_{x'_2}^{H} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz = \int_0^{H} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz.$$

Так как в любой точке области $0 \le x_1 \le L,\ 0 < x_2 < H$ выполняется (2) и справедливы граничные условия (24), то

$$\int_0^{H} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz = -\int_0^{H} \frac{\partial u_2(x_1, z)}{\partial z} dz = -u_2(x_1, H) + u_2(x_1, 0) = 0.$$

Найденная функция u_2 $(t = \tau)$, будучи рассмотренной в области $\bar{\tilde{\Omega}}$, удовлетворяет условию $\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \in C_{l-1,\alpha}(\bar{\tilde{\Omega}})$ и является нечетной по x_2.

Зная функции u_1, u_2, рассмотрим (3) с условием $(t = \tau)$:

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{n}}\Big|_{\tilde{S}} = \zeta(s) \sum_{j=1}^{2} \omega_j(s) \cos\alpha_j, \ \ s \in \tilde{S}, \qquad (33)$$

где $\frac{\partial p}{\partial \bar{n}}\Big|_{\tilde{S}}$ – производная по направлению вектора $\bar{n}$ внутренней нормали к $\tilde{S}$, α_i – угол между вектором $\bar{n}$ и осью Ox_i,

$$\omega_i = \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial t}, \qquad (34)$$

где $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ заменена разностной производной $u_{i\bar{t}}(x, t_1) = \frac{1}{\tau}(u_{i,1} - \check{u}_{i,1})$.

Условие разрешимости

$$\int_{\tilde{S}} \zeta(s) \sum_{j=1}^{2} \omega_j(s) \cos\alpha_j ds = 0 \qquad (35)$$

в случае задачи (3), (33) выполняется в силу (9) и нечетности функции u_2 по x_2, при этом ее решение определено с точностью до произвольной постоянной [17] и принадлежит классу $C_{l-1,\alpha}(\bar{\tilde{\Omega}})$ [15]. Итак, при $t = t_1 = \tau$ найдены функции w_1, u_1, u_2, p, т. е. найдены $w_1, u_{1,1}, u_{2,1}, p_1$ на слое $\tilde{\Omega}_1$. Переходим на слой $\tilde{\Omega}_2$ и находим $w_2, u_{1,2}, u_{2,2}, p_2$, и так далее до слоя $\tilde{\Omega}_M$.

Заключение. В результате того, что из области Ω были удалены четыре криволинейных треугольника, расположенных по углам этой области, и была введена срезающая функция, разрешимость модели оказалась доказанной в области

$$\delta < x_1 < L - \delta, \ \ 0 < x_2 < H,$$

которая является подобластью области Ω. Тем не менее при реализации численного метода, рассмотренного в [9], каких-либо трудностей не возникает, так как при введении в области Ω разностной сетки с шагами h_1, h_2 в направлениях Ox_1, Ox_2 соответственно всегда можно считать, что $h_1 > \delta$, $h_2 > \varepsilon$, поскольку положительные числа δ, ε могут быть выбраны сколь необходимо малыми. В следующей работе будет показано, что можно выполнить предельный переход при $\tau \to 0$ ($\tau > 0$) и тем самым доказать разрешимость дифференциальной модели.

Литература

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.
2. *Ладыженская О. А.* // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 102. С. 85–104.
3. *Каянович С. С.* // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1981. № 2. С. 36–40.
4. *Абрашин В. Н., Лапко С. Л.* Об одном классе разностных схем для уравнений вязкой несжимаемой жидкости в переменных скорость-давление. Минск, 1992. (Препринт / ИМ НАН Беларуси; № 1 (479)).
5. *Каянович С. С.* // Тр. БТИ. Сер. 5. 1993. Вып. 1. С. 35–39.
6. *Каянович С. С.* // Тр. БГТУ. 1995. Сер. 5. Вып. 2. С. 49–55.
7. *Каянович С. С.* // Материалы Респ. науч.-метод. конф., посвящ. 25-летию фак. приклад. математики и информатики БГУ. Минск, 1995. Ч. 2. С. 42.
8. *Каянович С. С.* // Сб. науч. ст. (По итогам работы Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 20–21 марта 2003 г.). Минск, 2003. Ч. 4. С. 45–50.
9. *Каянович С. С.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 2013. № 3. С. 32–35.
10. *Constantin P., Fefferman C.* // Indiana Univ. Math. J. 1993. Vol. 42. P. 775–789.
11. *Schonbek M. E.* // Comm. in partial differ. equat. 1995. Vol. 20, N 1/2. P. 103–117.
12. *Feireisl E., Novotny A.* // J. of Mathematical Fluid Mechanics. 2001. Vol. 3/4. P. 358–392.
13. *Bresch D., Desjardins B.* // J. de Mathematiques Pures et Appliquees. 2007. Vol. 87, N 1. P. 57–90.
14. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
15. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1964.
16. *Schauder J.* // Math. Zeitschr. 1934. Vol. 38, N 2. P. 257–283.
17. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., 1972.

S. S. KAYANOVICH

SOLVABILITY OF THE DIFFERENTIAL MODEL OF PIVOTAL FLOW

Summary

The model of pivotal flow in the sections $\tilde{\Omega}_m$, i. e., at the values of the time t equal to $t_m = m\tau$, $m = 0,1,2,...,M$, has been considered. The existence of a unique solution in the each section $\tilde{\Omega}_m$ has been proved.