ISSN 1561-2430 (print)
УДК 519.2

Поступила в редакцию 03.05.2017
Received 03.05.2017

Е. Е. Жук

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОТНЕСЕНИЕ РЕАЛИЗАЦИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ К ЗАДАННЫМ ТРЕНДОВЫМ МОДЕЛЯМ

Исследуется проблема статистического отнесения реализаций нестационарных временных рядов к заданным трендовым моделям. Предлагается использовать решающее правило в пространстве коэффициентов трендов, определенных в одном и том же ортогональном базисе. В качестве меры эффективности принимаемых решений аналитически вычислен риск (вероятность ошибочно определить ближайший к реализации тренд). Как пример рассмотрен случай двух альтернативных трендов.

Ключевые слова: нестационарный временной ряд, трендовая модель, реализация, решающее правило, риск

E. E. Zhuk

Belarusian State University, Minsk, Belarus

STATISTICAL ASSIGNMENT OF REALIZATIONS OF NON-STATIONARY TIME SERIES TO THE FIXED TREND MODELS

The problem of statistical assignment of realizations of non-stationary time series to the fixed trend models is investigated. The decision rule in a space of trend coefficients determined on the same orthogonal basis is proposed and its efficiency is analytically studied. As an example the case of two alternative trends is studied.

Keywords: non-stationary time series, trend model, realization, decision rule, risk

1. Статистическое описание нестационарных временных рядов моделью с трендом в ортогональном базисе. Как известно [1–3], для статистического описания нестационарных временных рядов (ВР) используются две основные вероятностные модели: а) авторегрессии и проинтегрированного скользящего среднего; б) с трендом в ортогональном базисе. В первом случае пытаются подобрать порядок оператора конечной разности, приводящий исходный ВР к стационарному. Если это сделать не удается, то используется трендовая модель. Здесь остановимся на последней и напомним связанные с ней основные результаты [2, 3], которые понадобятся далее.

Пусть $X = \{x_t\}_{t=1}^{T}$ – реализация длительности T нестационарного ВР. Согласно трендовой модели [2, 3], его отсчеты $x_t \in R$, $t = \overline{1,T}$, представимы в виде

$$x_t = f(t) + u_t, \tag{1}$$

где $f(t)$, $t = \overline{1,T}$ – детерминированная (неслучайная) функция, называемая трендом и зависящая от времени t. Случайные величины $\{u_t\}_{t=1}^{T}$ в (1) обычно считаются некоррелированными, имеют нулевые математические ожидания и одинаковую ограниченную дисперсию:

$$\mathrm{E}\{u_t\} = 0, \ \ \mathrm{D}\{u_t\} = \mathrm{E}\{u_t^2\} = \sigma^2 < +\infty; \tag{2}$$

$$\mathrm{E}\{u_t u_l\} = 0, \ \ \forall t, l = \overline{1,T}, \ \ l \neq t,$$

и трактуются как ошибки измерений (наблюдений).

На практике модель (1), (2) уточняют [2, 3], представляя тренд $f(\cdot)$ разложением в ортогональном базисе:

$$f(t)=\sum_{j=1}^{m} b_j \phi_j(t),\quad t=\overline{1,T}, \tag{3}$$

а базисные функции $\{\phi_j(\cdot)\}_{j=1}^{m}$ выбираются ортогональными в следующем смысле:

$$\sum_{t=1}^{T}\phi_j(t)\phi_i(t)=\begin{cases} 0, \text{ если } i\neq j; \\ \sum_{t=1}^{T}\phi_j^2(t), \text{ если } i=j, \end{cases} \tag{4}$$

где T – длительность реализации X.

На практике в модели (1)–(4) количество используемых базисных функций m (порядок тренда [2, 3]) определяется требуемой точностью «подгонки», а коэффициенты $\{b_j\}_{j=1}^{m}$ неизвестны и подлежат оцениванию по имеющейся реализации $X=\{x_t\}_{t=1}^{T}$. В качестве статистических оценок $\{\hat{b}_j\}_{j=1}^{m}$ для $\{b_j\}_{j=1}^{m}$ обычно используют так называемые МНК-оценки [2, 3]:

$$\hat{b}_j=\frac{\sum_{t=1}^{T}x_t\phi_j(t)}{\sum_{t=1}^{T}\phi_j^2(t)},\quad j=\overline{1,m}, \tag{5}$$

которые обладают следующими свойствами [2, 3].

Т е о р е м а 1. *В условиях модели* (1)–(4) *МНК-оценки* (5) *несмещенные:*

$$\mathrm{E}\left\{\hat{b}_j\right\}=b_j,\quad \forall T,\ j=\overline{1,m}, \tag{6}$$

и некоррелированы $\left(i,j=\overline{1,m}\right)$:

$$\mathrm{Cov}\left\{\hat{b}_i,\hat{b}_j\right\}=\mathrm{E}\left\{(\hat{b}_i-b_i)(\hat{b}_j-b_j)\right\}=\begin{cases} 0, \text{ если } i\neq j; \\ \dfrac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{T}\phi_j^2(t)}, \text{ если } i=j. \end{cases} \tag{7}$$

С л е д с т в и е 1. *Пусть в условиях модели* (1)–(4) *случайные величины* $\{u_t\}_{t=1}^{T}$ *одинаково распределены по нормальному закону:* $\mathrm{L}\{u_t\}=N_1(0,\sigma^2),\ t=\overline{1,T},$ *тогда оценки* $\{\hat{b}_j\}_{j=1}^{m}$ *из* (5) *независимы в совокупности и имеют следующие нормальные законы распределения:*

$$\mathrm{L}\left\{\hat{b}_j\right\}=N_1\left(b_j,\frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{T}\phi_j^2(t)}\right),\quad \forall T,\ j=\overline{1,m}. \tag{8}$$

Отметим, что базисные функции в (3), (4) следует выбирать так, чтобы они удовлетворяли асимптотике

$$\sum_{t=1}^{T}\phi_j^2(t)\to+\infty,\ \ T\to+\infty,\ \ j=\overline{1,m}. \tag{9}$$

В этом случае оценки (5) будут, исходя из (7), состоятельными в среднеквадратическом смысле и по вероятности, поскольку

$$\mathrm{D}\left\{\hat{b}_j\right\}=\mathrm{E}\left\{\left(\hat{b}_j-b_j\right)^2\right\}=\frac{\sigma^2}{\sum\limits_{t=1}^{T}\phi_j^2(t)}\to 0,\ \ T\to+\infty,\ \ j=\overline{1,m}. \tag{10}$$

Требованию (9), в частности, удовлетворяют так называемые полиномиальные тренды [2, 3], когда базисная функция $\phi_j(t)$ – полином степени j по t, сам тренд $f(t)$ из (3) – полином степени m по t. Коэффициенты полиномов $\{\phi_j(t)\}_{j=1}^{m}$ (базисных функций) при этом выбираются исходя из условия ортогональности (4).

2. Постановка задачи отнесения и ее содержательный смысл. Пусть заданы $L\geq 2$ различных трендов $f_l(t),\ t=\overline{1,T},\ l\in S,$ где $S=\{1,\ldots,L\}$ – множество их номеров. Наблюдается реализация $X=\{x_t\}_{t=1}^{T}$ длительности T, описываемая моделью (1), (2) с трендом $f(t),\ t=\overline{1,T},$ вообще говоря, отличным от трендов $\{f_l(\cdot)\}_{l\in S}$. Необходимо отнести данную реализацию X к той из заданных своими трендами $\{f_l(\cdot)\}_{l\in S}$ моделей, к которой она «ближе». При этом необходимо определить критерий (принцип), по которому будет производиться отнесение, уточнив понятие «близости» [4, 5].

По своему содержательному смыслу данная задача встречается, например, в экономике, когда необходимо определить, к какому известному статистическому типу ближе исследуемый финансовый рынок (по поведению цены) [6].

Если тренд $f(\cdot)$ для реализации X был бы известен, то в качестве меры близости $f(\cdot)$ и $\{f_l(\cdot)\}_{l\in S}$ можно было бы определить евклидово расстояние:

$$\rho(f,f_l)=\sqrt{\sum_{t=1}^{T}\left(f(t)-f_l(t)\right)^2},\ \ l\in S, \tag{11}$$

а саму реализацию отнести к одной из моделей с номером из множества

$$D^o=\left\{k:\rho(f,f_k)=\min_{l\in S}\rho(f,f_l)\right\}, \tag{12}$$

где учтено, что могут быть совпадающие по значению расстояния из (11) $\left(D^o\subseteq S\right)$. Если таких совпадений нет (множество D^o состоит из одного элемента: $D^o=\{d^o\}$), то истинный номер $d^o\in S$ ближайшего к реализации X заданного тренда определяется как

$$d^o=\arg\min_{l\in S}\rho(f,f_l). \tag{13}$$

На практике же, поскольку тренд $f(\cdot)$ неизвестен, для решения задачи отнесения реализации X в качестве статистической оценки для d^o необходимо построить решающее правило (РП) [2, 4, 5]: $d = d(X) \in S,$ в качестве меры эффективности которого, по аналогии с [4, 5], можно предложить риск

$$r_T = \mathrm{P}\{d(X) \notin D^o\}, \tag{14}$$

где D^o – множество из (12). Если $D^o = \{d^o\}$ – один ближайший тренд в (13), то риск (14) –

$$r_T = \mathrm{P}\{d(X) \neq d^o\}. \tag{15}$$

Риск r_T из (14), (15) имеет простой содержательный смысл – это вероятность не отнести при помощи РП $d = d(X)$ реализацию X к тому из заданных трендов $\{f_l(\cdot)\}_{l\in S}$, к которому ближе ее тренд $f(\cdot)$ в смысле расстояний (11). Чем меньше (ближе к нулю) значения риска r_T $(0 \le r_T \le 1)$, тем эффективнее РП $d = d(X)$.

3. Решающее правило в пространстве коэффициентов трендов. Пусть тренды $\{f_l(\cdot)\}_{l\in S}$ заданы в виде разложений в одном и том же базисе $\{\phi_j(\cdot)\}_{j=1}^m$ из (4):

$$f_l(t) = \sum_{j=1}^{m} b_j^{(l)} \phi_j(t), \quad t = \overline{1,T}, \quad l \in S, \tag{16}$$

где $\{b_j^{(l)}\}_{j=1}^m$ – коэффициенты, определяющие l-й тренд (l-ю заданную модель, $l \in S$). Подлежащая отнесению реализация $X = \{x_t\}_{t=1}^T$ при этом описывается определенной ранее моделью (1)–(4) в том же базисе $\{\phi_j(\cdot)\}_{j=1}^m$.

С учетом условия ортогональности (4) вычислим расстояния (11) (для удобства – их квадраты):

$$\rho^2(f, f_l) = \sum_{t=1}^{T}\left(f(t) - f_l(t)\right)^2 = \sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{j=1}^{m}\left(b_j - b_j^{(l)}\right)\phi_j(t)\right)^2 = T\sum_{j=1}^{m}\left(b_j - b_j^{(l)}\right)^2 \overline{\phi}_j^2, \quad l \in S, \tag{17}$$

где обозначено:

$$\overline{\phi}_j^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\phi_j^2(t), \quad j = \overline{1,m}. \tag{18}$$

Для построения РП воспользуемся подстановочным принципом [2, 4, 5] и оценим $d^o \in S$ из (13), заменив в (17) неизвестные коэффициенты $\{b_j\}_{j=1}^m$ на их МНК-оценки $\{\hat{b}_j\}_{j=1}^m$ из (5), построенные по реализации X. Получим следующую статистическую оценку (подстановочное РП [2, 4, 5]):

$$d = d(X) = \arg\min_{l\in S} \sum_{j=1}^{m} \overline{\phi}_j^2 \left(\hat{b}_j - b_j^{(l)}\right)^2, \tag{19}$$

где $\{\overline{\phi}_j^2\}_{j=1}^m$ – величины из (18), играющие роль так называемых «весов», а само РП (19) имеет простой содержательный смысл: оно относит реализацию X к той трендовой модели, к коэффициентам которой ближе оценки $\{\hat{b}_j\}_{j=1}^m$ в смысле «взвешенного» евклидова расстояния (точнее, его квадрата в (19)). Отметим, что использование РП (19) корректно, поскольку учтено, что статистические оценки коэффициентов $\{\hat{b}_j\}_{j=1}^m$ имеют абсолютно непрерывные распределения вероятностей [7], поэтому вероятность совпадения расстояний между $\{\hat{b}_j\}_{j=1}^m$ и $\{b_j^{(l)}\}_{j=1}^m$, $l \in S$, в (19) равна нулю и принимаемое решение однозначно.

4. Аналитическое вычисление риска. Вычислим риск r_T РП (19) в случае, когда к подлежащей отнесению реализации X наиболее близок в смысле (11) лишь один из заданных трендов $\{f_l(\cdot)\}_{l\in S}$.

Теорема 2. *Пусть реализация* $X = \{x_t\}_{t=1}^T$ *описывается моделью* (1)–(4)*, в которой случайные величины* $\{u_t\}_{t=1}^T$ *независимы в совокупности и одинаково распределены по нормальному закону* $N_1\left(0,\sigma^2\right)$ $\left(0<\sigma^2<+\infty\right)$. *Тогда в предположении* $D^o = \{d^o\}$ (d^o *– истинный номер* (13) *ближайшего к* X *тренда*) *риск* r_T *из* (15) *для РП* (19) *удовлетворяет соотношению*

$$r_T = 1 - \mathrm{E}\left\{\prod_{\substack{l\in S\\ l\neq d^o}} U\left(z_l + \frac{\sqrt{T}}{2\sigma}\cdot\frac{\sum_{j=1}^m \overline{\phi}_j^2\left(\left(b_j - b_j^{(l)}\right)^2 - \left(b_j - b_j^{(d^o)}\right)^2\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \overline{\phi}_i^2\left(b_i^{(l)} - b_i^{(d^o)}\right)^2}}\right)\right\}, \tag{20}$$

где $U(y) = \{1, \text{если } y \geq 0; 0, \text{если } y < 0\}$ *– единичная функция Хэвисайда,* $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, *а стандартные нормальные случайные величины* z_l, $\mathrm{L}\{z_l\} = N_1(0,1)$, $l \in S$, $l \neq d^o$, *имеют совместное многомерное нормальное распределение* [2, 7] *с ковариациями*

$$\mathrm{Cov}\{z_l, z_k\} = \mathrm{E}\{z_l z_k\} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^m \overline{\phi}_j^2\left(b_j^{(l)} - b_j^{(d^o)}\right)\left(b_j^{(k)} - b_j^{(d^o)}\right)}{\sqrt{\sum_{j=1}^m \overline{\phi}_j^2\left(b_j^{(l)} - b_j^{(d^o)}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^m \overline{\phi}_i^2\left(b_i^{(k)} - b_i^{(d^o)}\right)^2}},$$

$$l, k \in S,\ l \neq d^o,\ k \neq d^o.$$

Доказательство. Для риска r_T из (15) с учетом вида РП (19) будем иметь:

$$r_T = \mathrm{P}\{d(X) \neq d^o\} = 1 - \mathrm{P}\{d(X) = d^o\} =$$

$$= 1 - \mathrm{P}\left\{\bigcap_{\substack{l\in S\\ l\neq d^o}} \left\{\sum_{j=1}^m \overline{\phi}_j^2\left(\left(\hat{b}_j - b_j^{(l)}\right)^2 - \left(\hat{b}_j - b_j^{(d^o)}\right)^2\right) \geq 0\right\}\right\}. \tag{21}$$

Преобразуем встречающиеся в (21) случайные величины:

$$\xi_l = \sum_{j=1}^m \overline{\phi}_j^2\left(\left(\hat{b}_j - b_j^{(l)}\right)^2 - \left(\hat{b}_j - b_j^{(d^o)}\right)^2\right) =$$

$$= 2\sum_{j=1}^{m} \overline{\phi}_j^2 \left(\hat{b}_j - \frac{b_j^{(d^o)} + b_j^{(l)}}{2} \right) \left(b_j^{(d^o)} - b_j^{(l)} \right), \ l \in S, \ l \neq d^o. \tag{22}$$

Из (22) видно, что они линейны по статистическим оценкам $\{\hat{b}_j\}_{j=1}^m$, которые, согласно следствию 1 к теореме 1, независимы в совокупности и распределены по нормальным законам согласно (8). Поэтому сами случайные величины (22) совместно нормально распределены [2, 7] с характеристиками

$$\mathrm{L}\{\xi_l\} = N_1\left(\sum_{j=1}^{m} \overline{\phi}_j^2 \left(\left(b_j - b_j^{(l)}\right)^2 - \left(b_j - b_j^{(d^o)}\right)^2 \right), \frac{4\sigma^2}{T} \sum_{j=1}^{m} \overline{\phi}_j^2 \left(b_j^{(l)} - b_j^{(d^o)} \right)^2 \right); \tag{23}$$

$$\mathrm{Cov}\{\xi_l, \xi_k\} = \frac{4\sigma^2}{T} \sum_{j=1}^{m} \overline{\phi}_j^2 \left(b_j^{(l)} - b_j^{(d^o)} \right)\left(b_j^{(k)} - b_j^{(d^o)} \right),$$

$$l, k \in S, \ l \neq d^o, \ k \neq d^o,$$

где наряду с (8) использованы обозначения (18).

Справедливость (20) непосредственно следует из записи риска (21) через случайные величины (22)

$$r_T = 1 - \mathrm{P}\left\{ \bigcap_{\substack{l \in S \\ l \neq d^o}} \{\xi_l \geq 0\} \right\},$$

с последующей их нормировкой [7] до стандартного нормального закона $N_1(0,1)$ с учетом найденных значений их характеристик из (23).

Практическая значимость полученного соотношения (20) заключается в том, что оно позволяет аналитически вычислить риск r_T и оценить эффективность принимаемых при помощи РП (19) решений. Однако простой вид выражение для риска (20) имеет только при $L = 2$ ($S = \{1,2\}$).

5. Случай двух альтернативных трендов. Пусть теперь заданы два ($L = 2$, $S = \{1,2\}$) различных, альтернативных друг другу, тренда $f_1(t)$ и $f_2(t)$, $t = \overline{1,T}$. При помощи РП (19) необходимо определить, к какому из них ближе наблюдаемая реализация $X = \{x_t\}_{t=1}^T$ с неизвестным трендом $f(t)$, $t = \overline{1,T}$, оценив при этом эффективность принимаемых решений.

В случае $L = 2$ РП (19) упрощается и через функцию Хэвисайда может быть записано как

$$d = d(X) = U\left(\sum_{j=1}^{m} \overline{\phi}_j^2 \left(\left(\hat{b}_j - b_j^{(1)}\right)^2 - \left(\hat{b}_j - b_j^{(2)}\right)^2 \right) \right) + 1. \tag{24}$$

Воспользуемся доказанной выше теоремой 2 и вычислим риск РП (24).

С л е д с т в и е 2. *Пусть* $L = 2$, *тогда в условиях теоремы* 2 *риск* r_T *РП* (24) *имеет вид*

$$r_T = \Phi\left(-\sqrt{T} \frac{\left| \sum_{j=1}^{m} \overline{\phi}_j^2 \left(\left(b_j - b_j^{(2)}\right)^2 - \left(b_j - b_j^{(1)}\right)^2 \right) \right|}{2\sigma\Delta} \right), \tag{25}$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) dw, \; z \in R,$ *– функция распределения вероятностей стандартного нормального закона* $N_1(0,1)$*, а величина*

$$\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \bar{\phi}_i^2 \left(b_i^{(2)} - b_i^{(1)}\right)^2}. \tag{26}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $L = 2$ с учетом (17), (18) величина d^o из (13)

$$d^o = \begin{cases} 1, \text{ если } \sum\limits_{j=1}^{m} \bar{\phi}_j^2 \left(\left(b_j - b_j^{(2)}\right)^2 - \left(b_j - b_j^{(1)}\right)^2\right) > 0; \\ 2, \text{ иначе,} \end{cases}$$

а риск (20)

$$r_T = \begin{cases} \Phi\left(-\dfrac{\sqrt{T}}{2\sigma} \cdot \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{m} \bar{\phi}_j^2 \left(\left(b_j - b_j^{(2)}\right)^2 - \left(b_j - b_j^{(1)}\right)^2\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \bar{\phi}_i^2 \left(b_i^{(2)} - b_i^{(1)}\right)^2}}\right), \text{ если } d^o = 1; \\ \Phi\left(-\dfrac{\sqrt{T}}{2\sigma} \cdot \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{m} \bar{\phi}_j^2 \left(\left(b_j - b_j^{(1)}\right)^2 - \left(b_j - b_j^{(2)}\right)^2\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \bar{\phi}_i^2 \left(b_i^{(1)} - b_i^{(2)}\right)^2}}\right), \text{ если } d^o = 2, \end{cases}$$

откуда и получаем (25), (26).

Воспользуемся полученным в следствии 2 выражением для риска и проанализируем эффективность РП (24). Из (25) видно, что с ростом длительности T относимой при помощи РП (24) реализации $X = \{x_t\}_{t=1}^{T}$ (асимптотика (9)) эффективность решений может быть повышена так, чтобы $r_T \to 0, \; T \to +\infty.$ Увеличивается она также и с ростом отличия друг от друга заданных альтернативных трендов $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$, что определяется различием между собой коэффициентов $\{b_j^{(1)}\}_{j=1}^{m}$ и $\{b_j^{(2)}\}_{j=1}^{m}$ соответственно (значение модуля в (25) увеличивается, а риск r_T уменьшается).

Отметим, что в случае, когда тренд $f(\cdot)$, соответствующий относимой реализации X, совпадает с одним из заданных трендов: $f(\cdot) \equiv f_1(\cdot) \; \left(b_j = b_j^{(1)}, \; j = \overline{1,m}\right)$ или $f(\cdot) \equiv f_2(\cdot) \; \left(b_j = b_j^{(2)}, \; j = \overline{1,m}\right)$, то выражение для риска r_T из (25), (26) упрощается:

$$r_T = \Phi\left(-\sqrt{T} \frac{\Delta}{2\sigma}\right), \tag{27}$$

где величина Δ из (26) имеет смысл «взвешенного» евклидова расстояния между коэффициентами $\{b_j^{(1)}\}_{j=1}^{m}$ и $\{b_j^{(2)}\}_{j=1}^{m}$ трендов $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$. Чем больше это расстояние Δ, тем эффективнее принимаемые решения (меньше риск (27)).

Отметим также, что если тренд $f(\cdot)$ подлежащей отнесению реализации равноудален от заданных трендов $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$: $\rho(f, f_1) = \rho(f, f_2),$ то $D^o = \{1, 2\} = S,$ а риск РП $d = d(X) \in S$ заведомо равен нулю: $r_T = \mathrm{P}\{d(X) \notin D^o\} = \mathrm{P}\{d(X) \notin S\} = 0,$ и принимаемое решение не принципиально, но соотношение (25) приводит к неверному результату: $r_T = \Phi(0) = ½$ (модуль в (25) равен нулю), поскольку оно получено в предположении $D^o = \{d^o\}$ $\left(\rho(f, f_1) \neq \rho(f, f_2)\right)$.

Список использованных источников

1. Андерсон, Т. Статистический анализ временных рядов: пер. с англ. / Т. Андерсон. – М.: Мир, 1976. – 759 с.
2. Харин, Ю. С. Математическая и прикладная статистика / Ю. С. Харин, Е. Е. Жук. – Минск: БГУ, 2005. – 276 с.
3. Харин, Ю. С. Практикум на ЭВМ по математической статистике / Ю. С. Харин, М. Д. Степанова. – Минск: Университетское, 1987. – 303 с.
4. Жук, Е. Е. Статистическое определение ближайших стационарных временных рядов в пространстве коэффициентов авторегрессии / Е. Е. Жук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 1. – С. 46–51.
5. Жук, Е. Е. Статистическое отнесение реализаций стационарных временных рядов к заданным авторегрессионным моделям / Е. Е. Жук // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: сб. науч. ст. – Минск: РИВШ, 2015. – С. 37–42.
6. Элдер, А. Как играть и выигрывать на бирже / А. Элдер. – М.: Альпина Паблишер, 2017. – 472 с.
7. Боровков, А. А. Теория вероятностей / А. А. Боровков. – М.: URSS: Либроком, 2016. – 652 с.

References

1. Anderson T. *Statistical Analysis of Time Series*. John Wiley & Sons, Inc., 1971. 704 p. Doi: 10.1002/9781118186428
2. Kharin Yu. S., Zhuk E. E. *Mathematical and applied statistics*. Minsk, Belarusian State University, 2005. 276 p. (in Russian).
3. Kharin Yu. S., Stepanova M. D. *Electronic computer training on mathematical statistics.* Minsk, Universitetskoe Publ., 1987. 303 p. (in Russian).
4. Statistical determination of the nearest stationary time series in a space of autoregressive coefficients. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2016, no. 1, pp. 46–51. (in Russian).
5. Zhuk E. E. Statisticsl assignment of realizations of stationary time series to the predetermined autoregressive coefficients. *Teoriya veroyatnostei, sluchainye protsessy, matematicheskaya statistika i prilozheniya: sbornik nauchnykh statei* [Probability theory, ransom processes, mathematical statistics and applications: collection of scientific papers]. Minsk, Republican Institute of Higher Education, 2015, pp. 37–42. (in Russian).
6. Elder A. *How to play and win the stock market*. Moscow, Al'pina Pablisher, 2017. 472 p. (in Russian).
7. Borovkov A. A. *Probability theory.* Moscow, URSS: Librokom Publ., 2016. 652 p. (in Russian).

Информация об авторе

Жук Евгений Евгеньевич – доктор физико-математических наук, професор, професор кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: zhukee@mail.ru

Information about the author

Zhuk Evgene Evgen'evich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Mathematical Modeling and Data Analysis, Faculty of Applied Mathematics and Computer Science, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: zhukee@mail.ru

Для цитирования

Жук, Е. Е. Статистическое отнесение реализаций нестационарных временных рядов к заданным трендовым моделям / Е. Е. Жук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 52–59.

For citation

Zhuk E. E. Statistical assignment of realizations of nonstationary time series to the fixed trend models. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 2, pp. 52–59. (in Russian).