ISSN 1561-2430 (print)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

SHORT COMMUNICATIONS

УДК 517.968

Поступила в редакцию 19.04.2017
Received 19.04.2017

Ф. В. Чумаков[1], С. И. Василец[2]

[1]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
[2]Белорусский государственный педагогический университет им. Максима Танка, Минск, Беларусь

О ЯВНОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО ВИДА ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ С СУММАРНО-РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ

Многие задачи теории и практики сводятся к решению интегральных уравнений первого рода со «слабым» ядром, т. е. с ядром, обращающимся в бесконечность интегрируемого порядка при совпадении аргументов. Успех исследования таких задач часто зависит от решения соответствующего задаче уравнения в явной форме. В некоторых случаях удается получить такое решение. В данной статье рассматривается на симметричном отрезке уравнение первого рода с ядром, представляющим квадратный корень из дробно-линейной функции. Учитывая симметрию задания уравнения, удается свести его к равносильной системе двух уравнений, каждое из которых сводится к решению уравнения Абеля и его обобщений. Решение выписывается в явной форме и приводятся примеры.

Ключевые слова: интегральное уравнение первого рода, уравнение типа Вольтерра, дробно-линейная функция, явная форма решения уравнения, класс решений, симметрия, уравнение Абеля

F. V. Chymakov[1], S. I. Vasilets[2]

[1]Belarusian State University, Minsk, Belarus
[2]Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank, Minsk, Belarus

EXPLICIT SOLUTION OF ONE-TYPE INTEGRAL VOLTERRA EQUATION ON THE SYMMETRIC INTERVAL WITH A SUM-DIFFERENCE KERNEL

Many problems in the theory and practice are reduced to solving the first-kind integral equations with a “weak” kernel, i. e. the kernel goes to the infinity of integrable order when arguments are matching. The success of investigation of such problems often depends on the solution of the explicit equation corresponding to the problem. In some cases, it is possible to get such a solution. In our case, we consider the first-kind equation with a kernel, which represents the square root of a fractional-linear function, on a symmetric interval. Given the equation symmetry, this equation can be reduced to an equivalent two-equation system, each of which is reduced to the Abel equation solution and its generalizations. The solution is written in explicit form. The examples are presented.

Keywords: first-kind integral equation, Volterra equation, fractional-linear function, explicit equation solution, solutions class, symmetry, Abel equation

Дадим здесь в явной форме решение интегрального уравнения вида

$$a(x)\int_{-x}^{x}\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}\varphi(t)\,dt+b(x)\int_{-x}^{x}\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\varphi(t)\,dt=f(x), \tag{1}$$

где переменные x и t изменяются на отрезке $[-1,1]$, $a(x), b(x)$ – заданные на этом отрезке дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ b(-x) & a(-x) \end{vmatrix}=a(x)a(-x)-b(x)b(-x)\neq 0. \tag{2}$$

Без ограничения общности будем считать, что $x > 0$. Решение уравнения $\varphi(x)$ будем искать в классе функций, обеспечивающих существование интегралов как несобственных. Для этого достаточно допустить для искомого решения обращение в бесконечность порядка меньшего ½ на концах отрезка [–1,1]. Необходимым условием существования такого решения является представление свободного члена уравнения в виде $f(x) = xf^*(x)$, где $f^*(x)$ – дифференцируемая функция. При сделанных предположениях уравнение имеет единственное решение. Изложим схему нахождения решения приведенного уравнения.

Предположим, что решение уравнения существует, т. е. равенство (1) выполняется. Тогда в силу имеющейся здесь симметрии должно выполняться также равенство, полученное в результате подстановки $-x$ в исходное уравнение (1) вместо x, т. е.

$$a(-x)\int_{x}^{-x}\sqrt{\frac{-x-t}{-x+t}}\varphi(t)\,dt + b(-x)\int_{x}^{-x}\sqrt{\frac{-x+t}{-x-t}}\varphi(t)\,dt = f(-x),$$

или, что то же самое,

$$a(-x)\int_{-x}^{x}\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\varphi(t)\,dt + b(-x)\int_{-x}^{x}\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}\varphi(t)\,dt = -f(-x).$$

Запишем полученные равенства в виде системы

$$\begin{cases} a(x)\displaystyle\int_{-x}^{x}\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}\varphi(t)\,dt + b(x)\int_{-x}^{x}\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\varphi(t)\,dt = f(x), \\ b(-x)\displaystyle\int_{-x}^{x}\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}\varphi(t)\,dt + a(-x)\int_{-x}^{x}\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\varphi(t)\,dt = -f(-x), \end{cases}$$

из которой находим

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-x}^{x}\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}\varphi(t)\,dt = \frac{a(-x)f(x)+b(x)f(-x)}{a(x)a(-x)-b(x)b(-x)} = \frac{a(-x)}{\Delta(x)}f(x) + \frac{b(x)}{\Delta(x)}f(-x), \\ \displaystyle\int_{-x}^{x}\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\varphi(t)\,dt = -\frac{a(x)f(-x)+b(-x)f(x)}{a(x)a(-x)-b(x)b(-x)} = -\frac{a(x)}{\Delta(x)}f(-x) - \frac{b(-x)}{\Delta(x)}f(x). \end{cases}$$

Складывая и вычитая полученные равенства, придем к новой системе

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-x}^{x}\left(\sqrt{\frac{x-t}{x+t}} + \sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\right)\varphi(t)\,dt = f_1(x), \\ \displaystyle\int_{-x}^{x}\left(\sqrt{\frac{x-t}{x+t}} - \sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\right)\varphi(t)\,dt = f_2(x), \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{a(-x)-b(-x)}{\Delta(x)}f(x) + \dfrac{b(x)-a(x)}{\Delta(x)}f(-x) = xf_1^*(x), \\ f_1^*(x) = \dfrac{a(-x)-b(-x)}{\Delta(x)}f^*(x) - \dfrac{b(x)-a(x)}{\Delta(x)}f^*(-x), \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} f_2(x) = \dfrac{a(-x)+b(-x)}{\Delta(x)} f(x) + \dfrac{a(x)+b(x)}{\Delta(x)} f(-x) = x f_2^*(x), \\ f_2^*(x) = \dfrac{a(-x)+b(-x)}{\Delta(x)} f^*(x) - \dfrac{a(x)+b(x)}{\Delta(x)} f^*(-x), \end{cases} \tag{4}$$

которую запишем в виде двух уравнений, удобных для решения

$$\begin{cases} \int\limits_0^x \dfrac{\varphi(t)+\varphi(-t)}{\sqrt{x^2-t^2}} dt = \dfrac{1}{2x} f_1(x), \\ \int\limits_0^x \dfrac{t(\varphi(-t)-\varphi(t))}{\sqrt{x^2-t^2}} dt = \dfrac{1}{2} f_2(x). \end{cases} \tag{5}$$

Таким образом, исходное уравнение (1) свелось к системе двух уравнений (5), которая равносильна уравнению (1), так как от уравнения (1) легко перейти к системе (5), и наоборот. Решения уравнений системы (5) можно найти, сводя их к уравнениям Абеля [1, § 54; 2, гл. 1, § 2], и получить таким образом решение уравнения

$$\int\limits_0^x \frac{u(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}} = f(x)$$

по формуле

$$u(x) = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{tf(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}}.$$

Применяя эту формулу, запишем последовательно решения уравнений системы (5):

$$\begin{cases} \varphi(-x)+\varphi(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{d}{dx}\int\limits_0^x \dfrac{f_1(t)}{\sqrt{x^2-t^2}} dt, \\ \varphi(-x)-\varphi(x) = \dfrac{1}{\pi x}\dfrac{d}{dx}\int\limits_0^x \dfrac{tf_2(t)}{\sqrt{x^2-t^2}} dt. \end{cases} \tag{6}$$

Вычитая из первого равенства второе, а затем складывая их, получим две формулы

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{f_1(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}} - \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{tf_2(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}}\right), \tag{7}$$

$$\varphi(-x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{f_1(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{tf_2(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}}\right). \tag{8}$$

Первая функция является решением уравнения (1), а вторая – решением уравнения

$$a(x)\int\limits_{-x}^x \sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\varphi(-t)dt + b(x)\int\limits_{-x}^x \sqrt{\frac{x-t}{x+t}}\varphi(-t)dt = f(x), \tag{9}$$

которое будем называть *сопутствующим* уравнению (1). Действительно, меняя переменную t интегрирования на $-t$ в уравнении (1), получим уравнение (9):

$$a(x)\int_x^{-x}\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\varphi(-t)d(-t)+b(x)\int_x^{-x}\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}\varphi(-t)d(-t)=a(x)\int_{-x}^{x}\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}\varphi(-t)dt+$$
$$+b(x)\int_{-x}^{x}\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\varphi(-t)dt=f(x).$$

Формулы (7) и (8) можно записать в другой форме, сводя непосредственно уравнения системы (5) к решению уравнения Абеля [1, § 54]:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\left(f_1^*(x)-f_2^*(x)+\int_0^x\frac{xf_1^*(x)-xf_1^*(t)-xf_2^*(x)+tf_2^*(t)}{\left(x^2-t^2\right)\sqrt{x^2-t^2}}tdt\right), \tag{10}$$

$$\varphi(-x)=\frac{1}{2\pi}\left(f_1^*(x)+f_2^*(x)+\int_0^x\frac{xf_1^*(x)-xf_1^*(t)+xf_2^*(t)-tf_2^*(t)}{\left(x^2-t^2\right)\sqrt{x^2-t^2}}tdt\right). \tag{11}$$

Заметим, что можно получить и другие формулы, отличающиеся от полученных здесь, для нахождения решений как исходного, так и сопутствующего ему уравнений.

Решим уравнение

$$3\int_{-x}^{x}\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}\varphi(t)dt+\int_{-x}^{x}\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\varphi(t)dt=3x+x^2.$$

По формулам (2), (3), (4) находим $\Delta(x)=8$,

$$f_1(x)=\frac{2\left(3x+x^2\right)-2\left(-3x+x^2\right)}{8}=\frac{3}{2}x,\ f_2(x)=\frac{4\left(3x+x^2\right)+4\left(-3x+2x^2\right)}{8}=2x^2,$$

по формуле (7) определяем решение

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{f_1(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}}-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{tf_2(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}}\right)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{3}{2}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{tdt}{\sqrt{x^2-t^2}}-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{2t^3dt}{\sqrt{x^2-t^2}}\right)=\frac{3}{4\pi}\frac{d}{dx}(x)-\frac{1}{x\pi}\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}x^3\right)=\frac{3}{4\pi}-\frac{2}{\pi}x,$$

так как

$$\int_0^x\frac{tdt}{\sqrt{x^2-t^2}}=x,\ \int_0^x\frac{t^3dt}{\sqrt{x^2-t^2}}=\frac{2}{3}x^3.$$

Проверка. Имеем

$$3\int_{-x}^{x}\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}\left(\frac{3}{4\pi}-\frac{2}{\pi}t\right)dt+\int_{-x}^{x}\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\left(\frac{3}{4\pi}-\frac{2}{\pi}t\right)dt=$$

$$=\frac{9}{4\pi}\int_{-x}^{x}\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}dt-\frac{6}{\pi}\int_{-x}^{x}\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}tdt+\frac{3}{4\pi}\int_{-x}^{x}\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}dt-\frac{2}{\pi}\int_{-x}^{x}\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}tdt=$$

$$=\left(\frac{9}{4\pi}+\frac{3}{4\pi}\right)\pi x-\frac{6}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}x^2\right)-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)=3x+x^2,$$

так как

$$\int_{-x}^{x}\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}dt=\int_{-x}^{x}\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}dt=\pi x,$$

$$\int_{-x}^{x}\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}tdt=-\frac{\pi}{2}x^2,$$

$$\int_{-x}^{x}\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}tdt=\frac{\pi}{2}x^2.$$

Заметим, что в работе [3] приводится в явной форме решение интегрального уравнения Вольтерра первого рода с ядром $\sqrt{x-t/x+t}$ и со внутренними коэффициентами на симметричном отрезке.

Список использованных источников

1. Гахов, Ф. Д.. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

2.. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

3. Чумаков, Ф. В. Решение в явной форме интегрального уравнения Вольтерра первого рода с ядром $\sqrt{x-t/x+t}$ и внутренними коэффициентами на симметричном отрезке / Ф. В. Чумаков, С. И. Василец // Вес. БДПУ. Сер. 3, Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. – 2015. – № 4. – С. 7–10.

References

1. Gakhov F. D. *Boundary Value Problems*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p. (in Russian).

2. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integrals and Fractional-Order Derivatives and Some of their Applications*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1987. 688 p. (in Russian).

3. Chumakov F. V., Vasilets S. I. Explicit solution of the first-kind integral Volterra equation with the kernel $\sqrt{x-t/x+t}$ and the internal coefficients on the symmetric interval. *Vestsi BDPU. Seryya 3, Fizika. Matematyka. Infarmatyka. Biyalogiya. Geagrafiya* [Bulletin of BSPU. Series 3, Physics. Mathematics. Informatics. Biology. Geography], 2015, no. 4, pp. 7–10. (in Russian).

Сведения об авторах

Чумаков Федор Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: fchumakov@tut.by

Information about the authors

Chymakov Fedor Vfsil'evich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: fchumakov@tut.by

Василец Сергей Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент, декан физико-математического факультета, Белорусский государственный педагогический университет им. Максима Танка (ул. Козыревская, 18, 220028, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: svsilets@tut.by

Vasilets Sergei Ivanovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Dean, Physics and Mathematics Department, Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank (Kozyrevskaya Str., 18, 220028, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: svsilets@tut.by

Для цитирования

Чумаков, Ф. В. О явном решении одного вида интегрального уравнения Вольтерра на симметричном отрезке с суммарно-разностным ядром / Ф. В. Чумаков, С. И. Василец // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 119–124.

For citation

Chymakov F. V., Vasilets S. I. Explicit solution of one-type integral Volterra equation on the symmetric interval with a sum-difference kernel. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 2, pp. 119–124. (in Russian).