

**МАТЕМАТИКА**  
**MATHEMATICS**

УДК 519.63

Поступила в редакцию 24.05.2017  
Received 24.05.2017**В. М. Волков, А. Н. Гуревский***Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь***СПЕКТРАЛЬНАЯ СОГЛАСОВАННОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ  
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

**Аннотация.** Исследована спектральная согласованность схемы с весами для уравнения теплопроводности. Посредством аналогии между частотными характеристиками уравнения теплопроводности и фильтра низкой частоты найдено эквивалентное представление разностной схемы в виде пары рекурсивных цифровых фильтров первого порядка с компенсированной групповой задержкой. На основе спектральной согласованности получены оценки точности дискретной модели фильтрации. Найдены оптимальные значения коэффициентов фильтра, обеспечивающие минимальную среднеквадратичную погрешность его частотной характеристики в заданном спектральном диапазоне. Примечательно, что оптимальное соотношение пространственно-временных шагов сетки в схеме с весами совпадает с соотношением, которое обеспечивает схема фильтрации с коэффициентами, отвечающими минимальной среднеквадратичной погрешности частотной характеристики в заданном спектральном диапазоне. Показано, что оптимизированная модель фильтрации обеспечивает многократное уменьшение среднеквадратичной погрешности частотной характеристики (в 5–7 раз) по сравнению с разностной схемой 6-го порядка точности. Значение шага по времени в оптимизированной схеме фильтрации несколько больше, по сравнению с его значением в разностной схеме 6-го порядка точности и стремится к последнему, когда диапазон наилучшего спектрального разрешения стремится к нулю. Полученные результаты могут быть использованы для оптимизации соотношения шагов сетки в разностных методах для уравнения теплопроводности.

**Ключевые слова:** разностные схемы, уравнение теплопроводности, спектральное разрешение, рекурсивный цифровой фильтр

**Для цитирования.** Волков, В. М. Спектральная согласованность разностных схем для уравнения теплопроводности / В. М. Волков, А. Н. Гуревский // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 3. – С. 7–14.

**V. M. Volkov, A. N. Hureuski***Belarusian State University, Minsk, Belarus***SPECTRAL-LIKE RESOLUTION OF FINITE-DIFFERENCE SCHEMES  
FOR THE HEAT CONDUCTION EQUATION**

**Abstract.** The spectral resolution of the finite-difference theta-method for the heat conduction equation is investigated. By analogy between the frequency response of the heat conduction equation and a low pass filter, we have found an equivalent representation of the finite-difference scheme in the form of two first-order IIR filters with zero group delay. On the basis of the spectral consistency, the error estimate of the discrete filtering model is obtained. The optimal parameters of the IIR filters providing a minimum error of the frequency response within a given spectral range are found. It is remarkable that the optimal ratio of spatial and temporal steps for the theta-method coincides with the ratio provided by the filtering model with coefficients corresponding to a minimum root-mean-square error of the frequency response for the given spectral range. It is shown that the optimized scheme provides a manifold (by a factor of 5–7) reduction in the root-mean-square error of the frequency response in comparison with the 6th order accuracy theta-method. The optimal time step is a little bit larger in comparison with its value in the 6th order accuracy scheme and tends to the last one when the spectral resolution range tends to zero. The obtained results can be used to optimize discretization parameters using the finite-difference methods for the heat conduction equation.

**Keywords:** finite-difference schemes, heat conduction equation, spectral-like resolution, IIR filter

**For citation.** Volkov V. M., Hureuski A. N. Spectral-like resolution of finite-difference schemes for the heat conduction equation. *Vestsi Natsyional'noi akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2017, no. 3, pp. 7–14 (in Russian).

**Введение.** Спектральный анализ погрешности численных методов имеет важное значение для оценки адекватности дискретных моделей дифференциальных задач в условиях ограниченной гладкости решения. Среди результатов, показывающих возможности существенного улучшения точности разностных схем путем согласования частотных характеристик дискретной и дифференциальной моделей, можно отметить работы [1–3]. Говоря о спектральной согласованности численных методов, естественным представляется использование аналогии разностных схем и цифровых фильтров, являющихся незаменимым инструментом современных цифровых технологий (см., напр., [4]). Данное сходство дискретных моделей позволяет использовать методы цифровой обработки сигналов для улучшения частотных характеристик разностных схем, в частности, для повышения их спектрального разрешения [5, 6] и определения оптимальных соотношений шагов сетки [7]. Отмеченная аналогия представляется столь глубокой, что позволяет предположить возможность представления любой линейной разностной схемы с постоянными коэффициентами на равномерной сетке в виде эквивалентной дискретной модели, основанной на цифровых фильтрах. Использование схемы цифровой фильтрации в качестве прототипа метода решения дифференциальной задачи позволяет изначально реализовать желаемые качественные особенности частотных характеристик дискретной модели (консервативность, асимптотическую устойчивость и др.), а оптимизация параметров фильтра открывает возможность для наилучшего согласования данных характеристик дискретной и дифференциальной задачи. Например, консервативность схемы фильтрации для уравнения Шредингера реализуется автоматически в классе всепропускающих фильтров [6], а асимптотическая устойчивость разностных схем для уравнения теплопроводности может быть ассоциирована с монотонностью амплитудно-частотных характеристик фильтров низких частот Баттерворта или Бесселя [4].

В настоящей работе показано, что схемы с весами четвертого и шестого порядков точности для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами при определенном соотношении на шаги сетки имеют эквивалентное представление в виде пары сопряженных цифровых фильтров первого порядка. Использование схемы цифровой фильтрации позволяет найти оптимальные коэффициенты фильтра, обеспечивающие минимизацию погрешности функции передачи в заданном спектральном диапазоне. На основе численного анализа установлено, что схема с оптимальными параметрами обеспечивает в 5–7 раз меньшую среднеквадратичную ошибку по сравнению со схемой шестого порядка точности. Получены оценки скорости сходимости приближенного решения на основе спектральной согласованности дискретной модели.

**Постановка задачи. Дисперсионное соотношение.** Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in (-L, L), \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями вида

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u(t, -L) = u(t, L). \quad (2)$$

Фундаментальную роль играют частные решения задачи (1)–(2) вида

$$u(t, x) = e^{i(\omega_m t - k_m x)}, \quad (3)$$

где  $k_m$  – волновое число,  $\omega_m$  – циклическая частота. Подстановка (3) в уравнение (1) приводит к характеристическому уравнению, решение которого принято называть дисперсионным соотношением:

$$\omega_m = ik_m^2. \quad (4)$$

Произвольное решение задачи (1)–(2) может быть приближенно представлено в виде отрезка ряда Фурье:

$$u(t, x) = \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} c_m(t) e^{ik_m x}, \quad c_m(t) = c_m(0) e^{i\omega_m t} = c_m(0) e^{-k_m^2 t}, \quad k_m = m \frac{\pi}{L}. \quad (5)$$

Здесь  $c_m = c_m(t)$ ,  $m = \overline{-N/2, N/2-1}$  – коэффициенты Фурье. Не нарушая общности, будем полагать далее  $L = \pi$ . Как следует из представления (5), динамика гармонических составляющих решения, заданного вектором коэффициентов Фурье,  $c(t) = (c_{-N/2}, \dots, c_{N/2-1})^T$ , выражается эволюционным оператором  $H$ :

$$c(t + \Delta t) = H \cdot c(t), \quad (6)$$

где  $H = H(k)^{\Delta t} = \text{diag}(H_{-N/2}, \dots, H_{N/2-1})$  – диагональная матрица,

$$H_m = H_m^{\Delta t} = e^{-k_m^2 \Delta t}, \quad (7)$$

причем диагональные компоненты матрицы  $H$  могут быть интерпретированы как коэффициенты передачи некоторого цифрового фильтра. Данные коэффициенты определяют частотные характеристики дифференциальной задачи.

Для достаточно гладких периодических решений коэффициенты Фурье быстро убывают. В силу этого представление (5), при надлежащем выборе  $N$ , можно рассматривать как точное и использовать для анализа погрешности приближенных численных методов.

**Частотные характеристики разностной схемы.** Рассмотрим разностную схему с весами (см., напр., [8]) для уравнения (1):

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \sigma \frac{y_{m+1}^{n+1} - 2y_m^{n+1} + y_{m-1}^{n+1}}{h^2} + (1 - \sigma) \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2}, \quad m = 1, N - 2, \quad (8)$$

$$y_0^m = y_{N-1}^m = 0, \quad y_n^0 = u_0(x_n).$$

Здесь  $y_m^n = y(x_m, t_n)$ ,  $(x_m, t_n) \in \omega_h \times \omega_\tau$ ,  $\omega_h = \{x_m = -L + hm, h = 2L / (N - 1), m = \overline{0, N - 1}\}$ ,  $\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = \overline{0, 1, \dots}\}$ ,  $0 \leq \sigma \leq 1$ .

Подстановка решения (3) в схему (8), учитывая собственные значения разностного оператора с периодическими граничными условиями, дает следующее выражение для диагональных компонент оператора перехода гармонических составляющих разностного решения на новый временной слой:

$$\begin{aligned} \overline{H}_m = \overline{H}_m(h, \tau, \sigma) &= \left( 1 - (1 - \sigma) \frac{4\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\pi mh}{2L} \right) \left( 1 + \frac{4\tau\sigma}{h^2} \sin^2 \frac{\pi mh}{2L} \right)^{-1} = \\ &= \left( 1 - (1 - \sigma) \frac{4\tau}{h^2} \sin^2 \frac{k_m h}{2} \right) \left( 1 + \frac{4\tau\sigma}{h^2} \sin^2 \frac{k_m h}{2} \right)^{-1}, \quad m = \overline{-N/2, N/2-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Локальная погрешность разностного решения определяется близостью коэффициентов передачи  $\overline{H}_m(h, \tau, \sigma)$  и  $H_m^\tau$ .

*Теорема.* Пусть для разности коэффициентов передачи эволюционного оператора дифференциальной задачи  $H_m^\tau$  и ее дискретной модели  $\overline{H}_m(h, p)$ ,  $\|\overline{H}_m(h, p)\| \leq 1$ , где  $h$  – шаг пространственной дискретизации,  $p$  – вектор параметров дискретной модели, имеет место оценка

$$\left| \overline{H}_m(h, p) - H_m^\tau \right| \leq Gh^n k_m^n, \quad 0 < G < \infty.$$

Тогда, если решение дифференциальной задачи имеет достаточную гладкость  $u(t, x) \in W_2^n[-L, L]$  и  $\tau = Mh^2$ , для погрешности решения дискретной задачи имеет место оценка

$$\|\delta^j\| = \|y^j - u^j\| \leq Rh^{n-2}, \quad 0 < R < \infty. \quad (10)$$

Доказательство. В пространстве сеточных функций и коэффициентов Фурье определим нормы:

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \left( \sum_{j=0}^{N-1} h |u(t, x_j)|^2 \right)^{1/2}, \quad \|c\| = \left( \frac{1}{N} \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} |c_j(t)|^2 \right)^{1/2}.$$

Учитывая, что  $\delta_m^0 = y_m^0 - u_0(x_m) = 0$ ,  $m = \overline{0, N-1}$ , оценим локальную погрешность коэффициентов Фурье решения дискретной задачи на одном шаге по времени при  $t = \tau$ :

$$\Delta_m^1 = \overline{H}_m c_m(0) - H_m c_m(0) = (\overline{H}_m - H_m) c_m(0).$$

Переходя к нормам в последнем равенстве, приходим к оценке локальной погрешности:

$$\|\Delta^1\| \leq h^n G \left( \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} |c_m|^2 m^{2n} \right)^{1/2}. \quad (11)$$

Для коэффициентов Фурье функции  $u(t, x) \in W_2^n[-L, L]$  имеет место

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} |c_m|^2 m^{2n} = G_0 \leq \infty,$$

на основании чего из неравенства (11) следует оценка локальной погрешности

$$\|\Delta^1\| \leq h^n G G_0^{1/2}. \quad (12)$$

Принимая во внимание эффект накопления ошибки в устойчивой дискретной модели  $\|\overline{H}_m(h, p)\| \leq 1$ , с учетом равенства Парсеваля  $\|c^j\| = \|u^j\|$ , имеем

$$\|y^j - u^j\| = \|\delta^j\| \leq j \|\Delta^1\| \leq \frac{t_j}{\tau} G G_0^{1/2} h^n \leq R h^{n-2}, \quad R = t_j G G_0^{1/2},$$

что и требовалось доказать.

Для оценки погрешности коэффициентов передачи и оптимизации параметров разностной схемы (8) используем представление  $\overline{H}_m(h, p) = \overline{H}_m(h, \tau, \sigma)$  в виде степенного ряда относительно переменной  $k_m$ :

$$\overline{H}_m(h, \tau, \sigma) = 1 - \tau k_m^2 + \left( \sigma \tau^2 + \frac{\tau h^2}{12} \right) k_m^4 - \left( \frac{\sigma h^2 \tau^2}{6} + \frac{\tau h^4}{360} + \sigma^2 \tau^3 \right) k_m^6 + O(h^8 k_m^8). \quad (13)$$

Несложно получить аналогичное представление коэффициентов передачи для дифференциальной задачи (1), (2):

$$H_m^\tau = 1 - \tau k_m^2 + \frac{\tau^2}{2} k_m^4 - \frac{\tau^3}{6} k_m^6 + O(\tau^4 k_m^8). \quad (14)$$

С учетом (13), (14) погрешность коэффициентов передачи имеет вид

$$\overline{H}_m(h, \tau, \sigma) - H_m^\tau = \left[ \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 + \frac{\tau h^2}{12} \right] k_m^4 - \left[ \frac{\sigma h^2 \tau^2}{6} + \frac{\tau h^4}{360} + \left( \sigma^2 - \frac{1}{6} \right) \tau^3 \right] k_m^6 + O(h^8 k_m^8).$$

Приравнивая к нулю слагаемые в прямоугольных скобках последнего равенства, получим

$$\left| \overline{H}_m(h, \tau, \sigma) - H_m \right| = \begin{cases} O(h^6 k_m^6), & \sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}, \quad \tau = O(h^2), \\ O(h^8 k_m^8), & \sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}, \quad \tau = \frac{h^2}{\sqrt{20}}. \end{cases} \quad (15)$$

Согласно теореме, соотношения (15) определяют условия четвертого и шестого порядка точности разностной схемы (8). Отметим, что аналогичные результаты могут быть получены на основе оценки невязки рассмотренной разностной схемы [9].

**Эквивалентное представление разностной схемы на основе рекурсивных цифровых фильтров.** Рассмотрим трехпараметрическую схему цифровой фильтрации, основанную на последовательном применении рекурсивного фильтра в прямом и обратном направлении оси  $x$ :

$$\begin{aligned} \overline{y}_m^{n+1} &= a_1 \overline{y}_{m-1}^{n+1} + b_0 y_m^n + b_1 y_{m-1}^n, & m = 1, 2, \dots, N-1; \\ y_m^{n+1} &= a_1 y_{m+1}^{n+1} + b_0 \overline{y}_m^n + b_1 \overline{y}_{m+1}^n, & m = N-2, N-3, \dots, 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Использование двух сопряженных фильтров требуется для устранения группового запаздывания решения [4]. Функция передачи схемы (16) вычисляется как произведение функций передачи двух секций первого порядка:

$$H_F(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \cdot \frac{b_0 + b_1 z}{1 + a_1 z} = \frac{b_0 b_1 + (b_0^2 + b_1^2) z^{-1} + b_0 b_1 z^{-2}}{a_1 + (1 + a_1^2) z^{-1} + a_1 z^{-2}}, \quad z = \exp(ihk_m). \quad (17)$$

При введении обозначений  $p_1 = \frac{b_0 b_1}{a_1}$ ,  $p_2 = \frac{b_0^2 + b_1^2}{a_1}$ ,  $p = \frac{1 + a_1^2}{a_1}$  амплитудно-частотная характеристика схемы фильтрации (16) принимает вид

$$\left| H_F(z) \right| = \left| \overline{H}_m(h, p) \right| = \left| \frac{p_1 + p_2 z^{-1} + p_1 z^{-2}}{1 + p z^{-1} + z^{-2}} \right| = \left| \frac{p_2 + 2p_1 \cos(hk_m)}{p + 2 \cos(hk_m)} \right|. \quad (18)$$

Разлагая функцию  $H_F(z)$  в степенной ряд и приравнивая коэффициенты данного ряда до восьмого порядка включительно к соответствующим коэффициентам разложения (14), приходим к условиям согласованности частотной характеристики схемы фильтрации (17) и дифференциальной задачи (1), (2):

$$1 = \frac{p_2 + 2p_1}{p + 2}, \quad \frac{p_1 p - p_2}{p + 2} = \frac{(p-10)}{6}, \quad \frac{(p_1 p - p_2)^2}{(p+2)^2} = \frac{(p^2 - 56p + 244)}{60}, \quad (19)$$

$$\tau = h^2 \frac{p_1 p - p_2}{(p+2)^2} = h^2 \frac{(p-10)}{6(p+2)}. \quad (20)$$

Решение системы уравнений (19) дает следующие значения коэффициентов:

$$p = p_0 = -17 - 9\sqrt{5}, \quad p_1 = 1 + (p-10)/6, \quad p_2 = p - 2p_1 + 2. \quad (21)$$

Выполнение условий (19), (20) обеспечивает восьмой порядок локальной точности коэффициентов передачи (17)

$$\left| \overline{H}_m(h, p) - H_m^\tau \right| = O(h^8 k_m^8),$$

что, согласно доказанной выше теореме, соответствует шестому порядку точности решения дискретной задачи (16) относительно шага  $h$ .

С учетом введенных ранее обозначений, коэффициенты схемы фильтрации (16), обеспечивающие шестой порядок точности, находятся по следующим формулам:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4}}{2}, \\ b_0 &= \frac{\sqrt{a_1(p_2 + 2p_1)} + \sqrt{a_1(p_2 - 2p_1)}}{2}, \\ b_1 &= \frac{\sqrt{a_1(p_2 + 2p_1)} - \sqrt{a_1(p_2 - 2p_1)}}{2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Поскольку условие устойчивости требует, чтобы полюс фильтра (16), (22)  $p = -a_1$  находился в пределах единичного круга на комплексной плоскости  $|a_1| \leq 1$ , то в силу того, что  $p < 0$ , в выражении для коэффициента  $a_1$  следует использовать знак «+». С точностью до граничных условий рассмотренная схема (16), (22), основанная на последовательном применении двух сопряженных фильтров, (16) эквивалентна разностной схеме шестого или четвертого порядка точности (8), (15) при соответствующем соотношении шагов сетки (20).

Схема фильтрации (16) не имеет каких-либо практических преимуществ по сравнению с разностной схемой (8). Напротив, использование рекурсивных фильтров затрудняет моделирование граничных условий и неоднородных коэффициентов, что ограничивает круг непосредственного использования данного класса алгоритмов задачами Коши. Тем не менее данная схема представляется интересной с точки зрения оптимизации параметров дискретной модели с целью улучшения ее спектральной согласованности. В самом деле, спектральные характеристики схемы цифровой фильтрации (16), (22) эквивалентны разностной схеме с весами (8) при условиях

$$\tau = h^2 \frac{(p-10)}{6(p+2)}, \quad \sigma = \frac{1}{2} - \frac{(p+2)}{2(p-10)}. \quad (23)$$

Второе из условий (23) относительно величины  $\sigma$  несложно получить из сравнения передаточных функций схемы с весами (9) и цифрового фильтра (18). Исследуем возможность улучшения спектральных характеристик дискретных моделей на основе выбора оптимального значения параметра  $p$ , обеспечивающего минимум погрешности функции передачи в заданном спектральном диапазоне.

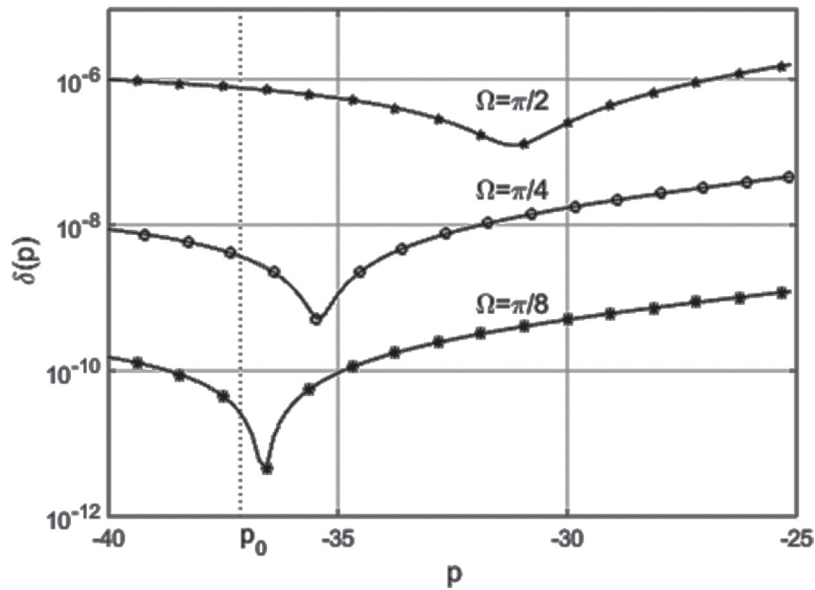
**Спектральное разрешение схемы цифровой фильтрации.** В качестве критерия оптимальности параметров дискретной модели определим условие минимума погрешности передаточной функции в заданном спектральном диапазоне. Рассмотрим среднеквадратичную погрешность функции передачи (18) схемы цифровой фильтрации (16), (22) на единичном отрезке по времени  $t \in [0, 1]$ , используя соответствующую норму с весовой функцией, близкой по структуре к спектру типичных решений задачи. В качестве такой весовой функции разумно использовать модуль самой передаточной функции решаемой задачи (1),(2):

$$\delta(p) = \|H - H_F(p)\| = \sqrt{\frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} |H(\xi)| \cdot |H(\xi) - H_F(\xi, p)|^2 d\xi}, \quad 0 < \Omega \leq \pi. \quad (24)$$

Заметим, что если в качестве весовой функции использовать амплитуду спектра решения, то норма погрешности функции передачи (24) приобретает смысл среднеквадратичной погрешности решения в заданном спектральном диапазоне на единичном отрезке по времени.

Результаты численного анализа спектральных характеристик дискретной модели приведены на рисунке, где изображены зависимости нормы погрешности (24) от параметра  $p$  для различных спектральных диапазонов шириной от  $\Omega/\pi = 1/8$  до  $\Omega/\pi = 1/2$ .

Представленные на рисунке результаты показывают, что для произвольной ширины спектрального диапазона существует единственное значение  $p = p_{\text{opt}} \geq p_0$ , обеспечивающее минимум погрешности передаточной функции (18). Примечательно, что при уменьшении диапазона



Зависимости нормы погрешности (24) передаточной функции схемы цифровой фильтрации (16), (22) от параметра  $p$  для разной ширины спектрального диапазона  
 Dependences of the root mean square error (24) of the frequency response for the filtering scheme (16), (22) on the parameter  $p$  at the different spectral ranges

спектральной согласованности оптимальное значение параметра  $p$ , обеспечивающее минимум погрешности частотных характеристик, стремится к значению  $p_0$ , соответствующему схеме шестого порядка точности. Важно подчеркнуть также, что согласно условию (23)

$$\frac{d\tau}{dp} = h^2 \frac{2}{(p+2)^2} > 0. \tag{25}$$

Учитывая то, что оптимальное значение параметра  $p = p_{\text{opt}} > p_0$ , и шаг по времени схемы фильтрации возрастает с ростом  $p$ , улучшение спектральных характеристик дискретной модели происходит при увеличении величины шага по времени. Последнее обстоятельство свидетельствует в пользу эффективности использования дискретной модели с оптимальным значением параметра, что гарантирует уменьшение среднеквадратичной погрешности приближенного решения в 5–7 раз при одновременном сокращении вычислительных затрат за счет применения большего шага по времени.

**Выводы.** Представленные выше результаты показывают, что традиционный аппарат теории разностных схем [9] в ряде частных случаев допускает альтернативную трактовку аппроксимации в терминах спектрального разрешения вместо традиционно используемого понятия невязки. Для анализа спектрального разрешения дискретных моделей естественно воспользоваться возможностью эквивалентного представления разностной схемы в виде цифрового фильтра с последующим применением для его настройки методов теории цифровой обработки сигналов. Как для нестационарного уравнения Шредингера [5–7], так и для рассмотренного в данной работе уравнения теплопроводности, условия эквивалентности двухслойных разностных схем и соответствующих схем фильтрации порождают строгое соотношение пространственного и временного шагов сетки вида (23). Несмотря на кажущуюся жесткость данного соотношения, оно представляется оптимальным [7] и позволяет упростить соответствующий выбор остальных параметров дискретной модели. В частности, задача оптимизации схемы фильтрации с использованием критерия спектрального разрешения (минимизации погрешности функции передачи в заданном спектральном диапазоне) сводится к однопараметрической. Применение схемы максимального спектрального разрешения обеспечивает многократное сокращение ее погрешности по сравнению со схемой максимального порядка точности на заданном минимальном шаблоне.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Lele, S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution / S. K. Lele // *J. Comput. Phys.* – 1992. – Vol. 103, № 1. – P. 16–42.
2. Tam, C. K. W. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics / C. K. W. Tam, J. C. Webb // *J. Comput. Phys.* – 1993. – Vol. 107, № 2. – P. 262–281.
3. Волков, В. М. Консервативные разностные схемы с улучшенными дисперсионными свойствами для нелинейных уравнений Шредингера / В. М. Волков // *Дифференц. уравнения.* – 1993. – Т. 29, № 7. – С. 1156–1162.
4. Сергиенко, А. Г. Цифровая обработка сигналов / А. Г. Сергиенко. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 768 с.
5. Improved split-step method for efficient fiber simulations / M. Plura [et al.] // *Electron. Lett.* – 2001. – Vol. 37, № 5. – P. 286–287.
6. Волков, В. М. Метод дробных шагов с использованием рекурсивных цифровых фильтров для решения нелинейных уравнений Шредингера / В. М. Волков, А. С. Циунчик // *Докл. Нац. акад. наук Беларуси.* – 2009. – Т. 53, № 5. – С. 22–25.
7. Волков, В. М. Оптимизация компактных разностных схем спектрального разрешения для нестационарного уравнения Шредингера на основе методов цифровой обработки сигналов / В. М. Волков, А. Н. Гуревский, И. В. Жукова / *Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика.* – 2015. – № 3. – С. 84–89.
8. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
9. Саульев, В. К. О методах повышения точности и двухсторонних приближениях к решению параболических уравнений / В. К. Саульев // *Докл. АН СССР.* – 1958. – Т. 118. – С. 1088.

## References

1. Lele S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics*, 1992, vol. 103, no. 1, pp. 16–42. Doi: 10.1016/0021-9991(92)90324-r
2. Tam C. K. W., Webb J. C. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. *Journal of Computational Physics*, 1993, vol. 107, no. 2, pp. 262–281. Doi: 10.1006/jcph.1993.1142
3. Volkov V. M. Conservative difference schemes with improved dispersion properties for nonlinear equations of Schrödinger type. *Differential Equations*, 1993, vol. 29, no. 7, pp. 1004–1009.
4. Sergienko A. G. *Digital signal processing*. Saint Petersburg, BHV-Petersburg Publ., 2011. 768 p. (in Russian).
5. Plura M., Kissing J., Gunkel M., Lenge J., Elbers J.-P., Glingener C., Schulz D., Voges E. Improved split-step method for efficient fiber simulations. *Electronics Letters*, 2001, vol. 37, no. 5, pp. 286–287. Doi: 10.1049/el:20010212
6. Volkov V. M., Tsiunchik H. S. Split-step method with the use of infinite impulse response filters for solving nonlinear Schrodinger equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2009, vol. 53, no. 5, pp. 22–25 (in Russian).
7. Volkov V. M., Gurevskii A. N., Zhukova I. V. Optimization of compact finite difference schemes with spectral-like resolutiona for the non-stationary Schrodinger equation on the base of digital signal processing methods. *Vestnik BGU. Ser. 1. Fizika. Matematika. Informatika = Vestnik BSU. Series 1: Physics. Mathematics. Informatics*, 2015, no. 3, pp. 84–89 (in Russian).
8. Samarskii A. A. *The theory of Finite Difference schemes*. Moscow, Nauka Publ., 1989. 616 p. (in Russian).
9. Saul'ev V. K. About the methods for increasing accuracy and about double-side approximations for solving parabolic equations. *Doklady Akademii nauk SSSR = Doklady of the Academy of Sciences of the USSR*, 1958, vol. 118, p. 1088 (in Russian).

## Информация об авторах

**Волков Василий Михайлович** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор, кафедра веб-технологий и компьютерного моделирования, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: v.volkov@tut.by

**Гуревский Алексей Николаевич** – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: alexey.gurevskiy@gmail.com

## Information about the authors

**Vasily M. Volkov** – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Professor of the Department of Web-Technologies and Computer Modeling, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: v.volkov@tut.by

**Aliaksei N. Hureuski** – Postgraduate, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: alexey.gurevskiy@gmail.com