УДК 517.977

А. Е. ЛЕЩЁВ

К СЛАБЫМ УСЛОВИЯМ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

(Поступила в редакцию 28.02.2015)

Введение. Пусть f и h_i, $i = 1, 2, ..., p$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции из R^m в R. Введем непустое множество допустимых точек

$$C = \left\{ y \in R^m \mid h_i(y) \le 0, \quad i \in I, \quad h_i(y) = 0, \; i \in I_0 \right\},$$

где $y \in R^m$, $I = \{1, \ldots, s\}$, $I_0 = \{s+1, \ldots, p\}$, и рассмотрим задачу (*NLP*) нелинейного программирования $f(y) \to \min, \quad y \in C$. Для задачи (*NLP*) введем функцию Лагранжа

$$L(y, \lambda) = f(y) + \langle \lambda, h(y) \rangle,$$

где $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p)$, $h = (h_1, ..., h_p)$ и множество множителей Лагранжа в точке y

$$\Lambda(y) = \left\{ \lambda \in \mathrm{R}^p \mid \nabla_y L(y, \lambda) = 0, \; \lambda_i \ge 0 \text{ и } \lambda_i h_i(y) = 0, \quad i \in I \right\}.$$

Обозначим через $I(y) = \{i \in I \mid h_i(y) = 0\}$ множество индексов, активных в точке $y \in C$ ограничений типа неравенства.

Необходимые условия оптимальности играют ключевую роль в задачах математического программирования [1–7]. Они делятся на условия оптимальности первого порядка и условия оптимальности высших порядков, из которых на практике обычно применяются условия оптимальности второго порядка, использующие производные второго порядка для функций f и h_i, $i = 1, 2, ..., p$. В качестве необходимых условий оптимальности первого порядка в математическом программировании широко используются классические необходимые условия Куна – Таккера, требующие существования множителей Лагранжа $\lambda \in \Lambda(y)$ в оптимальной точке $y \in C$ (при этом допустимые точки y, в которых выполняются условия Куна – Таккера, называются стационарными). Большинство применяемых в математическом программировании численных алгоритмов сводится к нахождению стационарных точек. В связи с тем, что многие задачи, особенно задачи высокой размерности, имеют достаточно большое число стационарных точек, возникает проблема привлечения необходимых условий второго порядка для удаления неоптимальных стационарных точек.

Наряду с необходимыми условиями оптимальности важную роль в теории оптимизации играют условия регулярности, гарантирующие справедливость необходимых условий оптимальности в исследуемой точке $y \in C$.

Одним из наиболее известных условий регулярности является условие Мангасаряна – Фромовица, требующее, чтобы в точке $y \in C$ система векторов $\nabla h_i(y)$, $i \in I_0$ была линейно независимой и существовал вектор $\overline{y}^0$ такой, что $\langle \nabla h_i(y), \; \overline{y}^0 \rangle = 0$, $i \in I_0$, $\langle \nabla h_i(y), \; \overline{y}^0 \rangle < 0$, $i \in I(y)$.

Данное условие равносильно требованию

$$\Lambda_0(y)=\left\{\lambda\in R^p \mid \sum_{i=1}^{p}\lambda_i\nabla h_i(y)=0,\ \ \lambda_i\ge 0,\quad i\in I(y),\ \ \lambda_i=0,\quad i\in I\setminus I(y)\right\}=\{0\}.$$

Введем конусы критических направлений

$$D_C(y)=\{\bar y\in R^m \mid \langle\nabla f(y),\bar y\rangle\le 0,\ \langle\nabla h_i(y),\bar y\rangle\le 0,\quad i\in I(y),\ \langle\nabla h_i(y),\bar y\rangle=0,\quad i\in I_0\},$$

$$S_C(y)=\{\bar y\in R^m \,|\, \langle\nabla h_i(y),\bar y\rangle=0,\quad i\in I_0\cup I(y)\}$$

в точке $y\in C$.

Для задачи (*NLP*) принято выделять три основных типа необходимых условий оптимальности второго порядка.

О п р е д е л е н и е 1 [8]. Пусть $y^0\in C$ и $\Lambda(y^0)\ne\varnothing$.

1. Будем говорить, что в точке y^0 выполняется классическое необходимое условие оптимальности второго порядка (refined second-order necessary optimality condition) *RSONC*, если для любого вектора $\bar y\in D_C(y^0)$ найдется вектор $\lambda\in\Lambda(y^0)$ такой, что $\langle\bar y,\nabla^2_{yy}L(y^0,\lambda)\bar y\rangle\ge 0$.

2. Будем говорить, что в точке y^0 выполняется слабое необходимое условие оптимальности второго порядка (weak second-order necessary optimality condition) *WSONC*, если существует множитель $\lambda\in\Lambda(y^0)$, при котором неравенство $\langle\bar y,\nabla^2_{yy}L(y^0,\lambda)\bar y\rangle\ge 0$ выполняется для всех $\bar y\in S_C(y^0)$.

3. Будем говорить, что в точке y^0 выполняется сильное необходимое условие оптимальности второго порядка (strong second-order necessary optimality condition) *SSONC*, если при любом векторе $\lambda\in\Lambda(y^0)$ неравенство $\langle\bar y,\nabla^2_{yy}L(y^0,\lambda)\bar y\rangle\ge 0$ выполняется для всех $\bar y\in D_C(y^0)$.

Условия *RSONC* изучались в [1–5] и во многих других исследованиях. Определения сильных необходимых условий восходят к работам [6, 7, 9–11]. В дальнейшем данные необходимые условия изучались в [12, 13]. Слабые необходимые условия второго порядка рассматривались с теоретической и практической точек зрения в работах [8, 11, 14–16].

Известно, что хотя необходимые условия *RSONC* и *SSONC* более эффективны для проверки стационарных точек на оптимальность, большинство практических алгоритмов, использующих необходимые условия оптимальности второго порядка, имеют дело со слабыми условиями оптимальности *WSONC* [16–18]. В частности, это относится к методам штрафных функций и методам с использованием расширенных функций Лагранжа [17–18]. Таким образом, слабые необходимые условия оптимальности второго порядка обладают значительной ценностью.

В то же время известно [16], что справедливость слабых необходимых условий оптимальности второго порядка не гарантируется традиционными условиями регулярности Мангасаряна – Фромовица без дополнительных предположений. В работе [16] предложено дополнительное условие, наличие которого вместе с условием регулярности Мангасаряна – Фромовица обеспечивает справедливость слабых необходимых условий оптимальности второго порядка в стационарных точках.

Следуя [16], будем говорить, что в точке $y^0\in C$ выполняется слабое условие постоянного ранга (*WCR*), если $\operatorname{rank}\left\{\nabla h_i(y),\quad i\in I_0\cup I(y^0)\right\}=\text{const}$ в некоторой окрестности точки y^0.

Целью настоящей статьи является получение слабых необходимых условий оптимальности второго порядка, имеющих более широкое применение по сравнению с условиями [8, 16].

Слабые условия оптимальности второго порядка. Следующая теорема дает слабые необходимые условия оптимальности второго порядка в задаче (*NLP*).

Т е о р е м а 1. *Пусть точка* $y^0\in C$ *является локальным решением задачи* (*NLP*). *Тогда существуют числа* $\lambda_i,\quad i=0,1,...,p$, *такие, что выполнено условие*

$$\lambda_0\nabla f(y^0)+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\nabla h_i(y^0)=0,\ \lambda_0^2+\lambda_1^2+...+\lambda_p^2=1,$$

где $\lambda_0 \ge 0,\ \ \lambda_i \ge 0,\quad i \in I(y^0),\quad \lambda_i = 0,\quad i \in I \setminus I(y^0).$

Если дополнительно в точке $y^0 \in C$ *выполняется условие* WCR, *то*

$$\left\langle \bar{y}, \left[\lambda_0 \nabla^2 f(y^0) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla^2 h_i(y^0)\right] \bar{y} \right\rangle \ge 0 \text{ для всех } \bar{y} \in S_C(y^0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $h_i^+(y) = \max\{0, h_i(y)\}$ и для каждого целого положительного k введем вспомогательную задачу минимизации функции

$$G_k(y) = f(y) + \frac{k}{3} \sum_{i \in I(y^0)} (h_i^+(y))^3 + \frac{k}{2} \sum_{i \in I_0} (h_i\ (y))^2 + \frac{1}{4} \left| y - y^0 \right|^4$$

на множестве $S = \{y|\ \left|y - y^0\right| \le \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ такое, что $f(y^0) \le f(y)$ и $h_i(y) < 0,\ \ i \in I \setminus I(y^0)$ для всех точек $y \in S \cap C$.

Пусть y^k – решение данной вспомогательной задачи. Очевидно, $G_k(y^k) \le G_k(y^0)$ для любого k, т. е.

$$f(y^k) + \frac{k}{3} \sum_{i \in I(y^0)} (h_i^+(y^k))^3 + \frac{k}{2} \sum_{i \in I_0} (h_i\ (y^k))^2 + \frac{1}{4} \left| y^k - y^0 \right|^4 \le f(y^0).$$

Поскольку последовательность $\{y^k\}$ ограничена и принадлежит замкнутому множеству S, то, не убавив общности, можно считать, что $y^k \to y^* \in S$. Поскольку $f(y^k)$ ограничена на S, то $h_i^+(y^k) \to 0$ при $i \in I(y^0)$ и $h_i\ (y^k) \to 0$ при $i \in I_0$. Следовательно, $y^* \in C$, и тогда $f(y^0) \le f(y^*)$.

С другой стороны, $f(y^k) + \frac{1}{4}\left|y^k - y^0\right|^4 \le f(y^0)$ и, значит, $f(y^*) + \frac{1}{4}\left|y^* - y^0\right|^4 \le f(y^0)$. Отсюда следует $y^* = y^0$. Таким образом, $y^k \to y^0$, оставаясь при достаточно больших k внутренней точкой множества S. Тогда для больших k можно записать необходимые условия оптимальности для функции $G_k(y)$ в точке y^k:

$$\nabla G_k(y^k) = 0 \text{ и } \langle \bar{y}, \nabla^2 G_k(y^k) \bar{y} \rangle \ge 0 \text{ для всех } \bar{y} \in R^m.$$

Данные условия можно переписать в развернутом виде:

$$\nabla f(y^k) + \sum_{i \in I(y^0)} \xi_i^k \nabla h_i(y^k) + \sum_{i \in I_0} \xi_i^k \nabla h_i(y^k) + \left| y^k - y^0 \right|^2 (y^k - y^0) = 0, \tag{1}$$

где $\xi_i^k = k(h_i^+(y^k))^2,\quad i \in I(y^0),\ \ \xi_i^k = k(h_i\ (y^k)),\quad i \in I_0$, и

$$\begin{aligned} &\left\langle \bar{y}, \nabla^2 f(y^k) \bar{y} \right\rangle + \langle \bar{y}, \sum_{i \in I_0 \cup I(y^0)} \xi_i^k \nabla^2 h_i(y^k) \bar{y} \rangle + \\ &+ k \left\langle \bar{y}, \sum_{i \in I(y^0)} 2h_i^+(y^k) \nabla h_i(y^k)^T \nabla h_i(y^k) \bar{y} + \sum_{i \in I_0} \nabla h_i(y^k)^T \nabla h_i(y^k) \bar{y} \right\rangle + \\ &+ 3 \left| y^k - y^0 \right|^2 \langle \bar{y}, E\bar{y} \rangle \ge 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Положим

$$\delta_k = \left(1 + \sum_{i \in I_0 \cup I(y^0)} (\xi_i^k)^2\right)^{1/2},\ \ \lambda_0^k = 1/\delta_k,\quad \lambda_i^k = \xi_i^k / \delta_k,\quad i \in I_0 \cup I(y^0),\quad \lambda_i^k = 0,\quad i \in I \setminus I(y^0).$$

Разделив (1) на δ_k, получим

$$\lambda_0^k \nabla f(y^k) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k \nabla h_i(y^k) + \frac{1}{\delta_k} \left| y^k - y^0 \right|^2 (y^k - y^0) = 0, \tag{3}$$

откуда, поскольку $(\lambda_0^k)^2 + \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i^k)^2 = 1$ и, следовательно, последовательность $\{\lambda_0^k, \lambda_1^k, ..., \lambda_p^k\}$ ограничена, можно, не ограничив общности, считать ее сходящейся: $\lambda_0^k \to \lambda_0$, $\lambda_i^k \to \lambda_i$. Тогда из (3) следует

$$\lambda_0 \nabla f(y^0) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(y^0) = 0, \ (\lambda_0)^2 + \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i)^2 = 1, \tag{4}$$

$$\lambda_0 \geq 0, \ \lambda_i \geq 0, \quad i \in I(y^0), \quad \lambda_i = 0, \quad i \in I \setminus I(y^0).$$

Разделив (2) на δ_k, получим

$$\begin{aligned} &\left\langle \bar{y}, \left[\lambda_0^k \nabla^2 f(y^k) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k \nabla^2 h_i(y^k) \right] \bar{y} \right\rangle + \\ &+ \frac{k}{\delta_k} \left\langle \bar{y}, \sum_{i \in I(y^0)} 2h_i^+(y^k) \nabla h_i(y^k)^T \nabla h_i(y^k) \bar{y} + \sum_{i \in I_0} \nabla h_i(y^k)^T \nabla h_i(y^k) \bar{y} \right\rangle + \\ &+ \frac{3}{\delta_k} \left| y^k - y^0 \right|^2 \langle \bar{y}, E\bar{y} \rangle \geq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

для всех $\bar{y} \in R^m$.

Оценим второе слагаемое в (5):

$$\begin{aligned} &\left| \frac{k}{\delta_k} \left\langle \bar{y}, \sum_{i \in I(y^0)} 2h_i^+(y^k) \nabla h_i(y^k)^T \nabla h_i(y^k) \bar{y} + \sum_{i \in I_0} \nabla h_i(y^k)^T \nabla h_i(y^k) \bar{y} \right\rangle \right| \leq \\ &\leq \frac{k}{\delta_k} \sum_{i \in I_0 \cup I(y^0)} M(y^k) \left| \langle \nabla h_i(y^k), \bar{y} \rangle \right|, \end{aligned}$$

где $M(y^k)$ – ограниченная величина.

Для любого $\bar{y} \in S_C(y^k)$ из (5) следует

$$\left\langle \bar{y}, \left[\lambda_0^k \nabla^2 f(y^k) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k \nabla^2 h_i(y^k) \right] \bar{y} \right\rangle + \frac{3}{\delta_k} \left| y^k - y^0 \right|^2 \langle \bar{y}, E\bar{y} \rangle \geq 0. \tag{6}$$

В силу условия WCR в точке y^0 справедливо равенство

$$\operatorname{rank}\{\nabla h_i(y), \quad i \in I_0 \cup I(y^0)\} = \operatorname{rank}\{\nabla h_i(y^0), \quad i \in I_0 \cup I(y^0)\} = l$$

для всех y достаточно близких к точке y^0.

Не ограничивая общности, будем считать, что в системе

$$\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0 \cup I(y^0) \tag{7}$$

ранг достигается для первых l уравнений и первых l переменных $\bar{y}_1, ..., \bar{y}_l$. Тогда система (7) равносильна системе

$$B(y^0)\bar{y}^1 + D(y^0)\bar{y}^2 = 0 \text{ или } \bar{y}^1 = -B^{-1}(y^0)D(y^0)\bar{y}^2,$$

где

$$\bar{y}^1 = (\bar{y}_1, ..., \bar{y}_l)^T, \ \bar{y}^2 = (\bar{y}_{l+1}, ..., \bar{y}_m)^T,$$

$$B(y) = \left[\frac{\partial h_i(y)}{\partial y_j} \ \ i, j = 1, ..., l \right], \ D(y) = \left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial h_i(y)}{\partial y_j} \ \ i = 1, ..., l \\ j = l+1, ..., m \end{array} \right].$$

Тогда для любого вектора $\bar{y} = (\bar{y}^1, \bar{y}^2)^T \in S_C(y^0)$ можно построить вектор $\bar{y}^k = (\bar{y}^{1k}, \bar{y}^{2k})^T \in S_C(y^k)$, такой, что $\bar{y}^{1k} = -B^{-1}(y^k)D(y^k)\bar{y}^2$, $\bar{y}^{2k} = \bar{y}^2$.

Тогда $\bar{y}^k \to \bar{y}$ и, следовательно, подставив в (6) $\bar{y} = \bar{y}^k$ и переходя к пределу, получим

$$\left\langle \bar{y}, \left[\lambda_0 \nabla^2 f(y^0) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla^2 h_i(y^0) \right] \bar{y} \right\rangle \geq 0 \text{ для всех } \bar{y} \in S_C(y^0).$$

С л е д с т в и е. *Если точка $y^0 \in C$ является локальным решением задачи (NLP) и в ней выполнены условие регулярности Мангасаряна – Фромовица и условие WCR, то в этой точке необходимо выполняется условие WSONC.*

В работе [19] при выполнении условия критической регулярности получены сильные необходимые условия оптимальности второго порядка *SSONC*.

Положим $I_D(y^0) = \{i \in I(y^0) \mid \langle \nabla h_i(y_0), \bar{y} \rangle = 0, \ \ \forall \bar{y} \in D_C(y^0)\}$.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что в точке $y^0 \in C$ выполнено условие критической регулярности (коротко *CRC*), если $\operatorname{rank}\left\{\nabla h_i(y), \ \ i \in I_0 \cup I_D(y^0)\right\} = \text{const}$ для всех y из некоторой окрестности точки y^0.

Т е о р е м а 2 [19]. Пусть в точке $y^0 \in C$, являющейся решением задачи (*NLP*), выполнено условие критической регулярности и $\Lambda(y^0) \neq \varnothing$. Тогда в данной точке выполняется условие *SSONC*.

Используем данную теорему для вывода слабых необходимых условий *WSONC*.

Т е о р е м а 3. *Пусть в точке $y^0 \in C$, являющейся решением задачи NLP, множество множителей Лагранжа $\Lambda(y^0) \neq \varnothing$ и выполнено условие WCR. Тогда для любого вектора $\lambda \in \Lambda(y^0)$ справедливо условие WSONC.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнены условия теоремы и множество множителей Лагранжа не пусто в точке $y^0 \in C$. Возьмем любой вектор $\lambda \in \Lambda(y^0)$. Рассмотрим множество $E = \{y \in R^m \mid h_i(y) = 0, \ i \in I(y^0) \cup I_0, \ \ h_i(y) \leq 0, \ i \in I \setminus I(y^0)\}$.

Очевидно, $E \subset C$ и $y^0 \in E$. Следовательно, в точке y^0 достигается минимум целевой функции задачи *NLP* на множестве E. Кроме того, в задаче *NLP*(*E*) минимизации целевой функции $f(y)$ на множестве E множество множителей Лагранжа в точке y^0

$$\Lambda_E(y^0) = \left\{ \lambda \in R^p \mid \nabla f(y^0) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(y^0) = 0, \ \lambda_i = 0, \ \ \ i \in I \setminus I(y^0) \right\}$$

непусто, поскольку $\Lambda(y^0) \subset \Lambda_E(y^0)$. При этом активные ограничения в точке y^0 для множества E исчерпываются ограничениями-равенствами $h_i(y) = 0, \ \ \ i \in I(y^0) \cup I_0$ и, следовательно, из условия *WCR* для множества C в точке y^0 следует условие *CRC* для задачи *NLP*(*E*) в данной точке.

Таким образом, в силу теоремы 2 для задачи *NLP*(*E*) в точке y^0 выполняется условие *SSONC*. То есть для любого $\lambda \in \Lambda_E(y^0)$ выполняется неравенство $\langle \bar{y}, \nabla^2_{yy} L(y^0,\lambda)\bar{y}\rangle \ge 0$ для всех векторов $\bar{y} \in D_E(y^0)$, где $D_E(y^0) = \hat{D}_E(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla f(y), \bar{y}\rangle = 0,\ \langle \nabla h_i(y), \bar{y}\rangle = 0,\quad i \in I_0 \cup I(y)\}$.

Но для любого вектора $\bar{y} \in S_C(y) = \{\bar{y} \in R^m \big| \langle \nabla h_i(y), \bar{y}\rangle = 0,\ i \in I_0 \cup I(y)\}$ с учетом условия $\nabla f(y^0) + \sum\limits_{i \in I_0 \cup I(y)} \lambda_i \nabla h_i(y^0) = 0$ справедливо равенство $\langle \nabla f(y^0), \bar{y}\rangle = 0$. Следовательно, $S_C(y) \subset D_E(y^0)$. Таким образом, получаем, что для любого $\lambda \in \Lambda(y^0) \subset \Lambda_E(y^0)$ выполнено неравенство $\langle \bar{y}, \nabla^2_{yy} L(y^0,\lambda)\bar{y}\rangle \ge 0$ для всех $\bar{y} \in S_C(y)$.

Доказанная теорема обобщает необходимые условия *WSONC* [8, 16], поскольку в отличие от [16] не требует выполнения условия регулярности Мангасаряна – Фромовица и в отличие от [8] дает необходимое условие, выполняющееся при любом $\lambda \in \Lambda(y^0)$.

Т е о р е м а 4. *Пусть в точке $y^0 \in C$, являющейся решением задачи* (*NLP*), *множество множителей Лагранжа $\Lambda(y^0)$ не пусто и выполнено условие критической регулярности CRC. Тогда для любого вектора $\lambda \in \Lambda(y^0)$ справедливо условие WSONC.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда в силу теоремы 2 в точке y^0 для задачи (*NLP*) выполняется условие *SSONC*. Покажем, что $S_C(y^0) \subset D_C(y^0)$. Пусть $\bar{y} \in S_C(y^0)$. Тогда $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y}\rangle = 0$ для всех $i \in I_0 \cup I(y^0)$. Возьмем любой вектор $\lambda \in \Lambda(y^0)$. В силу определения множителей Лагранжа

$$\left\langle \nabla f(y^0) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(y^0), \bar{y} \right\rangle = \left\langle \nabla f(y^0) + \sum_{i \in I_0 \cup I(y^0)} \lambda_i \nabla h_i(y^0), \bar{y} \right\rangle = 0,$$

откуда $\langle \nabla f(y^0), \bar{y}\rangle = 0$. Таким образом, $\bar{y} \in D_C(y^0)$ и, следовательно, $S_C(y^0) \subset D_C(y^0)$.

Значит, в точке y^0 действительно выполнено условие *WSONC*, причем для любого вектора $\lambda \in \Lambda(y^0)$.

Следующие примеры показывают эффективность необходимых условий теоремы 4 по сравнению с известными результатами.

П р и м е р 1. Пусть $C = \left\{ y \in R^3 \mid -y_1^2 - y_2 \le 0,\ -y_2 \le 0,\ y_1 - y_3 \le 0 \right\}$, $f(y) = -y_1 + y_3 - y_3^2$. Рассмотрим точку $y^0 = (0,0,0)$. Положим $h_1(y) = -y_1^2 - y_2$, $h_2(y) = -y_2$, $h_3(y) = y_1 - y_3$.

Очевидно, $I_D(y^0) = \{3\}$ и $\operatorname{rank}\{\nabla h_i(y),\ i \in I_0 \cup I_D(y^0)\} = \operatorname{rank}\{\nabla h_3(y)\} = \text{const}$, т. е. условие CRC выполнено. Далее, $S_C(y^0) = \left\{ \bar{y} \in R^3 \mid \bar{y}_1 = \bar{y}_3,\ \bar{y}_2 = 0 \right\}$.
Найдем множество множителей Лагранжа:

$$L(y,\lambda) = f(y) + \lambda_1 h_1(y) + \lambda_2 h_2(y) + \lambda_3 h_3(y) =$$
$$= (-y_1 + y_3 - y_3^2) + \lambda_1(-y_1^2 - y_2) - \lambda_2 y_2 + \lambda_3(y_1 - y_3),$$
$$\nabla_y L(y,\lambda) = \begin{pmatrix} -1+\lambda_3 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 \\ 1 - \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \lambda_0 \ge 0,\ \lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0,\ \lambda_3 \ge 0,$$

откуда $\lambda_3 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_1 = 0$. Далее, в силу необходимых условий теоремы 4 должно выполняться неравенство $\langle \bar{y}, \nabla^2_{yy} L(y^0,\lambda_0,\lambda)\bar{y}\rangle = -2\bar{y}_3^2 \ge 0$ для всех $\bar{y}_3 \in R$, что очевидно не выполнимо. Значит, исследуемая точка не является оптимальной. Отметим, что для точки y^0 в данном примере условие Мангасаряна – Фромовица выполняется, однако не выполнено условие *WCR*. Таким образом, в данном примере не применимы необходимые условия [8, 16].

Следует также отметить, что отличные от *WCR* условия, обеспечивающие совместно с *MFCQ* справедливость условия *WSONC*, были предложены в работе Baccari и Trad [11]. Условие Baccari и Trad имеет место в точке y^0, если в этой точке выполнено условие *MFCQ* и число линейно независимых векторов градиентов активных ограничений в этой точке не менее $|I_0|+|I(y^0)|-1$, где $|I|$ – число элементов конечного множества I. В [15] показано, что данное условие независимо от *WCR*, т. е. выполнение условия Baccari и Trad не гарантирует справедливость *WCR* и обратно *MFCQ* и *WCR* не обеспечивают выполнения условия Baccari и Trad.

П р и м е р 2. Пусть

$$C=\left\{y\in R^4 \mid -y_1^2-y_3\le 0,\ -y_1+y_2\le 0,\ y_3-y_4\le 0,\ y_1^2+y_2^2-y_3-y_4\le 0,\ -y_4\le 0\right\},\ f(y)=y_3.$$

Рассмотрим точку $y^0=(0,0,0,0)$. Положим

$$h_1(y)=-y_1^2-y_3,\ h_2(y)=-y_1+y_2,\ h_3(y)=y_3-y_4,\ h_4(y)=y_1^2+y_2^2-y_3-y_4,\ h_5(y)=-y_4.$$

Поскольку

$$\Lambda_0(y^0)=\{\lambda\in R^4 \mid -\lambda_2=0,\ -\lambda_1+\lambda_3-\lambda_4=0,\ -\lambda_3-\lambda_4-\lambda_5=0,\ \lambda_i\ge 0,\ i=1,2,3,4,5\}=\{0\},$$

условие *MFCQ* в точке y^0 выполнено. Найдем множество множителей Лагранжа:

$$\Lambda(y^0)=\{\lambda\in R^5 \mid \lambda_2=0,\ -\lambda_1+\lambda_3-\lambda_4+1=0,\ -\lambda_3-\lambda_4-\lambda_5=0,\ \lambda_i\ge 0,\ i=1,2,3,4,5\}=$$
$$=\{\lambda\in R^5 \mid \lambda_1=1,\ \lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=0\},$$

откуда $I_D(y^0)=\{1\}$ и, следовательно,

$$\operatorname{rank}\{\nabla h_i(y),\quad i\in I_0\cup I_D(y)\}=\operatorname{rank}\{\nabla h_1(y)\}=\text{const}$$

в окрестности y^0, т. е. условие *CRC* выполнено. Далее,

$$S_C(y^0)=\left\{\bar y\in R^4 \mid \bar y_1=\bar y_2,\ \bar y_3=\bar y_4=0\right\}$$

и в силу слабых необходимых условий теоремы 4 должно выполняться неравенство

$$\langle\bar y,\nabla_{yy}^2 L(y^0,\lambda)\bar y\rangle=-2\bar y_1^2\ge 0$$

для всех $\bar y_1\in R$, что, очевидно, не имеет места. Значит, исследуемая точка не является оптимальной. Отметим, что для точки y^0 в данном примере условие *WCR* не выполнено. Более того, не выполняются и условия Baccari и Trad [11]. Таким образом, в данном примере не применимы необходимые условия [8, 11, 16].

Выводы. В статье получены слабые необходимые условия оптимальности второго порядка, обобщающие результаты [8, 16].

Литература

1. *Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М.* Методы оптимизации. Минск, 1981.
2. *Гороховик В. В.* Конечномерные задачи оптимизации. Минск, 2007.
3. *Ioffe A. D.* // SIAM J. Control Optimiz. 1979. Vol. 17. P. 266–288.
4. *Bonnans J. F., Shapiro A.* Perturbation Analysis of Optimization Problems. New York, 2000.
5. *Luderer B., Minchenko L., Satsura T.* Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Dordrecht. 2002
6. *Fiacco A. V., McCormick G. P.* Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques. New York, 1968.
7. *Bertsekas D. P.* Nonlinear Programming. Massachusetts, 1999.
8. *Guo L., Lin G. H., Ye J. J.* // J. Optimiz. Theory. Appl. 2013. Vol. 158. P. 33–64.
9. *Fletcher R.* Practical Methods of Optimization. London, 1987.
10. *Nocedal J., Wright S. J.* Numerical Optimization. New York, 1999.

11. *Baccari A., Trad A.* // SIAM J. Optimization. 2004. Vol. 15. P. 394–408.
12. *Andreani R., Echagüe C. E., Schuverdt M. L.* // J. Optim. Theory Appl. 2010. Vol. 146. P. 255–266.
13. *Minchenko L., Stakhovski S.* // SIAM J. Optimiz. 2011. Vol. 21. P. 314–332.
14. *McCormick G. P.* // SIAM J. Appl. Math. 1967. Vol. 15. P. 641–652.
15. *Gould N. I. M., Toint P. L.* // Math. Program. 1999. Vol. 85. P. 433–438.
16. *Andreani R., Martinez J. M., Schuverdt M. L.* // Optimization. 2007. Vol. 56. P. 529–542.
17. *Hu X. M., Ralph D.* // J. Optim. Theory and Appl. 2004. Vol. 123. P. 365–390.
18. *Izmailov A. F., Solodov M. V.* // SIAM J. Optim. 2008. Vol. 19. P. 1003–1027.
19. *Минченко Л. И., Лещев А. Е.* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 6. С. 28–34.

A. E. LESCHOV

WEAK SECOND-ORDER OPTIMALITY CONDITIONS

Summary

The aim of the present article is to derive so-called weak second-order necessary optimality conditions for nonlinear programming problems. Necessary weak second-order optimality conditions are proved under some additional requirements to the constraints.