ISSN 1561-2430 (print)
УДК 517.9

Поступила в редакцию 24.05.2017
Received 24.05.2017

М. Г. Кот

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРОВ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С δ-ОБРАЗНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аннотация. Уравнения и системы, которые записываются в виде $\mathrm{L}_0 u = -\Delta u + a(\varepsilon)\delta u = f$, возникают в разных приложениях и интенсивно изучаются. Входящее в это уравнение произведение δu не определено в классической теории обобщенных функций, поэтому одной из основных задач является придание смысла выражению в левой части уравнения, т. е. фактически построение оператора, который соответствует данному формальному выражению. Это достигается с помощью специальных аппроксимаций оператора умножения на δ-функцию. Для исследования уравнений с δ-образными коэффициентами мы применили подход, основными этапами которого являются: построение аппроксимаций рассматриваемого выражения с помощью операторов конечного ранга; нахождение явного вида резольвенты аппроксимирующего семейства; нахождение предела резольвенты и выделение случаев резонанса, когда предельный оператор не совпадает с $-\Delta$; описание спектра построенных предельных операторов; исследование поведения собственных значений аппроксимирующих операторов. Цель настоящей работы заключается в нахождении асимптотики собственных вектор-функций для аппроксимаций, построенных в [2]. Таким образом, основным результатом данного исследования является построение асимптотики собственных вектор-функций в различных случаях резонанса.

Ключевые слова: обобщенная функция; собственные значения; собственные вектор-функции, метод Ньютона; асимптотика, резонанс, оператор

Для цитирования. Кот, М. Г. Асимптотика собственных вектор-функций операторов, аппроксимирующих дифференциальные уравнения с δ-образными коэффициентами / М. Г. Кот // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 3. – С. 15–26.

M. G. Kot

Belarusian State University, Minsk, Belarus

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE VECTOR-FUNCTIONS OF OPERATORS APPROXIMATING THE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH δ-SHAPED COEFFICIENTS

Abstract. The equations can be written as $\mathrm{L}_0 u = -\Delta u + a(\varepsilon)\delta u = f$ which appear in different applications and are studied intensively. In this equation, *δu* is not determined in the classical theory of generalized functions, so one of the main objectives is to give meaning to the expression on the left-hand side of the equation, that is, it is an actual construction of the operator that corresponds to a given formal expression. This is achieved by special approximations of multiplication of the operator by the δ-function. To study equations with δ-shaped coefficients we have applied the approach, the main steps of which are: constructing the approximations of the considered expressions with operators of finite rank; finding the explicit form approximating a resolvent family; determining a resolvent limit and allocating resonance cases; describing the spectrum of the constructed limit of operators; studying the behavior of the eigenvalues of approximating operators. The purpose of this work is to find the asymptotic behavior of vector-functions for approximations, built in [2]. Thus, the main result of this work is the construction of the asymptotic behavior of the vector-functions in different cases of resonance.

Keywords: generalized function; eigenvalues; behavior of vector-functions, Newton's method; asymptotic behavior, resonance, operator

For citation. Kot M. G. Asymptotic behavior of the vector-functions of operators approximating the differential equations with δ-shaped coefficients. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2017, no. 3, pp. 15–26 (in Russian).

Введение. Уравнения, которые записываются в виде

$$\mathrm{L} \;\; u \equiv -\Delta u + a(\varepsilon)\delta u = f, \tag{1}$$

где коэффициент δ есть обобщенная δ-функция Дирака, $u = (u_1, u_2)$, $a(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & a_1(\varepsilon) \\ a_2(\varepsilon) & 0 \end{pmatrix}$, а $\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2$ – оператор Лапласа, возникают в разных приложениях [1] и интенсивно изучаются. Входящее в (1) произведение δu не определено в классической теории обобщенных функций, поэтому одной из основных задач является придание смысла выражению в левой части (1), т. е. фактически построение оператора, соответствующего формальному выражению (1).

Специальный вид матрицы коэффициентов $a(\varepsilon)$ соответствует тому, что в рассматриваемой системе вторая компонента воздействует на первую, а первая – на вторую. Заметим, что системы с такими матрицами коэффициентов возникают в квантовой механике.

Один из основных подходов к решению этой задачи основан на аппроксимации выражения семейством корректно заданных операторов L_ε:

$$\mathrm{L}_\varepsilon u = -\Delta u + a(\varepsilon)\int u(y)\varphi_\varepsilon(y)dy\varphi_\varepsilon(x).$$

Это семейство не имеет предела, и поэтому находится предел резольвент

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\mathrm{L}_\varepsilon - \lambda\right)^{-1} := R(\lambda).$$

Если такой предел существует, то операторно-значная функция $R(\lambda)$ оказывается резольвентой некоторого оператора, который соответствует рассматриваемой аппроксимации формального выражения. В случае операторов в пространстве $L_2(R^3)$ скалярных функций было обнаружено, что в типичных случаях $R(\lambda)$ есть резольвента невозмущенного оператора $R(\lambda) = \left(-\Delta - \lambda I\right)^{-1}$, но возможны случаи *резонанса*, когда $R(\lambda)$ есть резольвента некоторого оператора, отличного от $-\Delta$. Резольвента $R(\lambda)$ действует по формуле

$$R(\lambda)f = E_\lambda * f,$$

где * – свертка функций, а $E_\lambda(x)$ – фундаментальное решение для оператора $-\Delta u - \lambda u$, заданное формулой

$$E_\lambda(x) = \frac{1}{4\pi\|x\|}e^{-\mu\|x\|},$$

где $\mu^2 = -\lambda$, $\operatorname{Re}\mu > 0$. Отметим, что $E_\lambda \in L_2(R^3)$.

Анализ систем уравнений обычно оказывается более сложным по сравнению с анализом одного уравнения и содержит большее число возможных вариантов.

Наиболее простыми являются аппроксимации с помощью операторов конечного ранга. Мы применили подход, развитый в [3, 4], для исследования уравнений с δ-образными коэффициентами. Он включает в себя следующие этапы: 1) построение аппроксимаций рассматриваемого выражения операторами конечного ранга; 2) нахождение явного вида резольвенты аппроксимирующего семейства; 3) нахождение предела резольвенты и выделение случаев резонанса; 4) описание спектра построенных предельных операторов; 5) исследование поведения собственных значений и собственных функций аппроксимирующих операторов. Первые четыре этапа изложены в [3, 5]. Цель данной работы заключается в нахождении асимптотики собственных вектор-функций для аппроксимаций

$$\mathrm{L}_{\varepsilon 1}(u) = -\Delta u_1 + a_1(\varepsilon)\int u_2(y)\varphi_\varepsilon(y)dy\varphi_\varepsilon(x),$$
$$\mathrm{L}_{\varepsilon 2}(u) = -\Delta u_2 + a_2(\varepsilon)\int u_1(y)\varphi_\varepsilon(y)dy\varphi_\varepsilon(x),$$

построенных в [2].

В работе приведено описание поведения семейства собственных вектор-функций для каждой из полученных в [5] ветвей собственных значений $\lambda_j(\varepsilon)$.

1. Резольвентная сходимость и случаи резонанса. В работе [2] мы рассматривали формальную систему

$$-\Delta u_1 + a_1(\varepsilon)\delta u_2 = f_1,\\ -\Delta u_2 + a_2(\varepsilon)\delta u_1 = f_2. \tag{2}$$

Пусть φ – финитная функция из пространства Шварца $D(R^3)$ [1], такая что $\int \varphi(x)dx = 1.$ Тогда семейство гладких функций $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ задает аппроксимацию δ-функции как элемента пространства обобщенных функций, а семейство функционалов $\Phi_\varepsilon(u) = \int u(x)\varphi_\varepsilon(x)dx$ – аппроксимация δ-функции как функционала. Поэтому для гладких функций u имеем $\Phi_\varepsilon(u)\varphi_\varepsilon \to u(0)\delta = \delta u$ [4], т. е. на гладких функциях семейство операторов $\Phi_\varepsilon(u)\varphi_\varepsilon$ сходится к произведению δu.

Таким образом, оператор

$$\mathrm{L}_\varepsilon u = -\Delta u + a(\varepsilon)\int u(y)\varphi_\varepsilon(y)dy\varphi_\varepsilon(x)$$

задает аппроксимацию формального выражения $-\Delta u + a(\varepsilon)\delta u$. В покоординатной записи это семейство имеет вид

$$\mathrm{L}_{\varepsilon 1}(u) = -\Delta u_1 + a_1(\varepsilon)\int u_2(y)\varphi_\varepsilon(y)dy\varphi_\varepsilon(x),\\ \mathrm{L}_{\varepsilon 2}(u) = -\Delta u_2 + a_2(\varepsilon)\int u_1(y)\varphi_\varepsilon(y)dy\varphi_\varepsilon(x).$$

В [2] была построена резольвента аппроксимирующего семейства $\mathrm{L}_\varepsilon(u)$.

Л е м м а. *Резольвента* $(\mathrm{L}_\varepsilon - \lambda)^{-1}$ *аппроксимирующего семейства* $\mathrm{L}_\varepsilon(u)$ *записывается в виде*

$$(\mathrm{L}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f = R_0(\lambda)f - S(\varepsilon,\lambda)\cdot \tilde{f}\cdot (R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x),$$

где

$$R_0(\lambda)f = \begin{bmatrix} R_0(\lambda)f_1 \\ R_0(\lambda)f_2 \end{bmatrix},\quad \tilde{f} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix},\quad \tilde{f}_1 = \int (R_0(\lambda)f_2)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,\quad \tilde{f}_2 = \int (R_0(\lambda)f_1)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy;$$

а $S(\varepsilon,\lambda)$ *есть матрица вида*

$$S(\varepsilon,\lambda) = \frac{1}{1 - a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)b^2(\varepsilon,\lambda)}\begin{bmatrix} a_1(\varepsilon) & -a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda) \\ -a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda) & a_2(\varepsilon) \end{bmatrix},$$
$$b(\varepsilon,\lambda) = \int (R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy.$$

Резольвента определена, если $\lambda \notin R^+ = (0;+\infty)$ *и* $1 - a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)b^2(\varepsilon,\lambda) \neq 0.$

Функция $b(\varepsilon,\lambda)$ является аналитической при $\varepsilon \neq 0$, и для нее имеет место разложение [4]

$$b(\varepsilon,\lambda) = \frac{M_{-1}}{\varepsilon} - \frac{\mu}{4\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \mu^{k+1}\varepsilon^k,$$

где $M_k = \frac{1}{4\pi}\int\left(\int \varphi(y)\overline{\varphi}(x-y)dy\right)\|x\|^k\, dx.$

Ниже считаем, что

$$\frac{1}{a_1(\varepsilon)} = k_{-2}^1\frac{1}{\varepsilon^2} + k_{-1}^1\frac{1}{\varepsilon} + k_0^1,\quad \frac{1}{a_2(\varepsilon)} = k_{-2}^2\frac{1}{\varepsilon^2} + k_{-1}^2\frac{1}{\varepsilon} + k_0^2, \tag{3}$$

так как в этой тематике содержательные результаты получаются именно для таких коэффициентов.

Если предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} S(\varepsilon,\lambda) := D(\lambda) \tag{4}$$

есть нуль, то предел резольвент есть резольвента невозмущенного оператора –Δ. В [2] показано, что предел (4) может быть ненулевым только в трех случаях, которые называются *случаями резонанса*.

Т е о р е м а 1. *Для коэффициентов* $a_1(\varepsilon)$ *и* $a_2(\varepsilon)$ *вида* (3) *предел* $D(\lambda)$ *может быть ненулевым только в трех случаях:*

$$1)\quad \frac{1}{a_1(\varepsilon)} = k_0^1 + k_1^1\varepsilon + k_2^1\varepsilon^2 + o(\varepsilon), \quad \frac{1}{a_2(\varepsilon)} = k_{-2}^2\frac{1}{\varepsilon^2} + k_{-1}^2\frac{1}{\varepsilon} + k_0^2 + o(\varepsilon),$$

т. е. $k_{-2}^1 = 0,\ k_{-1}^1 = 0.$

Тогда

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} \dfrac{k_{-2}^2}{k_0^1 k_{-2}^2 - M_{-1}{}^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

если $k_0^1 k_{-2}^2 - M_{-1}{}^2 \neq 0.$

В случае, когда $k_0^1 k_{-2}^2 = M_{-1}{}^2$, *предел* (4) *равен бесконечности.*

$$2)\quad \frac{1}{a_1(\varepsilon)} = k_{-1}^1\frac{1}{\varepsilon} + k_0^1 + k_1^1\varepsilon + o(\varepsilon), \quad \frac{1}{a_2(\varepsilon)} = k_{-1}^2\frac{1}{\varepsilon} + k_0^2 + k_1^2\varepsilon + o(\varepsilon),$$

т. е. $k_{-2}^1 = 0,\ k_{-2}^2 = 0$ *и при этом выполнено условие резонанса* $k_{-1}^1 k_{-1}^2 = M_{-1}{}^2.$

Тогда

$$D(\lambda) = \frac{1}{k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2 + \dfrac{M_{-1}\mu}{2\pi}} \begin{bmatrix} k_{-1}^2 & -M_{-1} \\ -M_{-1} & k_{-1}^1 \end{bmatrix}.$$

$$3)\quad \frac{1}{a_1(\varepsilon)} = k_{-2}^1\frac{1}{\varepsilon^2} + k_{-1}^1\frac{1}{\varepsilon} + k_0^1 + o(\varepsilon), \quad \frac{1}{a_2(\varepsilon)} = k_0^2 + k_1^2\varepsilon + k_2^2\varepsilon^2 + o(\varepsilon),$$

т. е. $k_{-2}^2 = 0,\ k_{-1}^2 = 0.$

Тогда

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{k_{-2}^1}{k_0^2 k_{-2}^1 - M_{-1}{}^2} \end{bmatrix},$$

если $k_0^2 k_{-2}^1 - M_{-1}{}^2 \neq 0.$

В случае, когда $k_0^2 k_{-2}^1 = M_{-1}{}^2$, *предел* (4) *равен бесконечности.*

Для всех остальных коэффициентов вида (3) *предел* (4) *нулевой.*

2. Поведение собственных значений при стремлении ε к нулю. Из построения резольвенты видно, что при фиксированном ε собственные значения для L_ε определяются из равенства

$$f(\varepsilon,\lambda) := \frac{1}{a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)} - b^2(\varepsilon,\lambda) = 0, \tag{5}$$

где $b(\varepsilon,\lambda)$ зависит от способа аппроксимации. Таким образом, данное равенство позволяет выявить зависимость собственных значений от ε для каждого вида рассматриваемых коэффициентов.

Здесь левая часть, $f(\varepsilon,\lambda)$, есть аналитическая функция от ε, μ, при $\varepsilon \neq 0$. У уравнений вида (5) с аналитической функцией f, как правило, имеется несколько гладких ветвей решений.

В [5] было исследовано поведение этих ветвей в зависимости от выбранных коэффициентов и выбранной функции φ, где $\varphi \in D(\mathbf{R})$, $\varphi(x) \in \mathbf{R}$ и $\int \varphi(x)dx = 1$. Для этого был применен метод диаграмм Ньютона и показано, что разным случаям резонанса соответствуют разные диаграммы. Рассмотрим наиболее важные моменты этого подхода, который позволяет найти асимптотику не только ветвей решений уравнения (5), но и собственных функций при стремлении ε к нулю.

Пусть переменные x и y связаны уравнением

$$f(x, y) = 0, \tag{6}$$

где $f(x, y) = \sum c_{kj} x^k y^j$ – аналитическая функция. Задача заключается в построении неявных функций, заданных этим уравнением, которые представимы в виде рядов по дробным степеням независимой переменной:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^{\nu k}.$$

В этой записи предполагается, что показатели степени x – числа ν_k возрастают $(\nu_{k+1} > \nu_k)$ и коэффициенты α_k ненулевые.

Если f является полиномом, сформулированная задача решается с помощью метода диаграмм Ньютона, главный принцип которого описывается в работах [6–9].

Основной шаг заключается в нахождении главного члена разложения, т. е. чисел ν_0 и α_0. Для краткости обозначим эти коэффициенты через ν и α; будем искать решения вида

$$y(x) = \alpha x^{\nu} + o(x^{\nu}), \alpha \neq 0. \tag{7}$$

Подставив $y(x)$ вида (7) в уравнение (6) и преобразовав его, получаем выражение вида

$$\sum c_{kj} x^k \left(\alpha x^{\nu}\right)^j = \sum\sum c_{kj} \alpha^j \left(x^{k+\nu j} + o(x^{k+\nu j})\right).$$

Далее рассматриваются только те k, j, при которых показатель $k + \nu j$ имеет наименьшее значение, так как главный член разложения зависит только от этих слагаемых. Легко видеть, что если такая пара k, j только одна, то решение требуемого вида не существует. Таким образом, искомое ν может существовать только тогда, когда таких пар несколько.

В случае многочлена для выбора тех значений ν, которые дают решение, Ньютон предложил следующий геометрический прием. На плоскости XY рассматривается множество точек (k, j), соответствующих ненулевым коэффициентам c_{kj}. Выпуклая оболочка множества таких точек называется многогранником Ньютона для полинома $f(x,y)$. Тогда искомые числа ν могут быть только тангенсами угла наклона сторон полученного многогранника, таких чисел может быть только конечное число и при таких ν уравнение для нахождения коэффициента α содержит конечное число слагаемых, т. е. α находится как корень некоторого многочлена.

При рассмотрении аналитических функций часть из приведенных выше рассуждений сохраняется. Пусть теперь f есть функция из левой части (5). Аналогично случаю полинома, рассмотрим множество M_f, состоящее из точек (k, j), соответствующих ненулевым коэффициентам c_{kj}. Функция f имеет разложение

$$\frac{1}{a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)} - b^2(\varepsilon,\lambda) = k_{-2}^1 k_{-2}^2 \frac{1}{\varepsilon^4} + \left(k_{-2}^1 k_{-1}^2 + k_{-1}^1 k_{-2}^2\right)\frac{1}{\varepsilon^3} + \left(k_{-2}^1 k_0^2 + k_{-1}^1 k_{-1}^2 + k_0^1 k_{-2}^2 - M_{-1}^2\right)\frac{1}{\varepsilon^2} +$$
$$+\left(k_{-2}^1 k_0^2 + k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2 + k_1^1 k_{-2}^2 + \frac{M_{-1}\mu}{2\pi}\right)\frac{1}{\varepsilon} + \left(k_{-2}^1 k_2^2 + k_{-1}^1 k_1^2 + k_1^1 k_{-1}^2 + k_0^1 k_0^2 + k_2^1 k_{-2}^2 - \frac{\mu^2}{16\pi^2}\right) +$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty} C_k \mu^{k+2} \varepsilon^k, \tag{8}$$

где коэффициенты C_k выражаются через M_k.

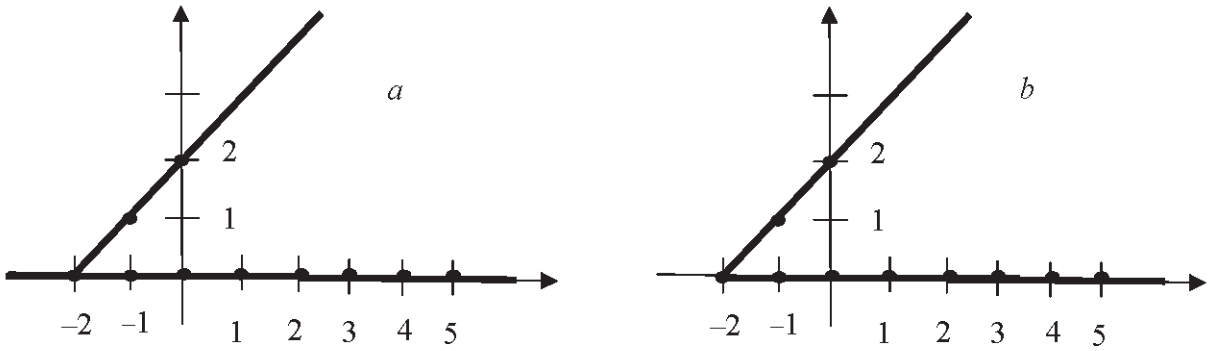

Рис. 1. Диаграмма Ньютона: *a* – диаграмма Ньютона для уравнения (8); *b* – диаграмма Ньютона для уравнения (8) в случае первого резонанса

Fig. 1. Newton's diagram: *a* – Newton's diagram for equation (8); *b* – Newton's diagram for equation (8) for the first resonance

В общем случае диаграмма Ньютона M_f имеет вид, изображенный на рис. 1, *a*. В этом случае первое слагаемое в сумме (8) растет быстрее остальных, откуда следует, что при малых ε оператор L_ε не имеет собственных значений. Геометрически это проявляется в следующем. Граница выпуклой оболочки множества M_f содержит полупрямую $y = x + 3$, $x \geq -3$, а на этой полупрямой есть только одна точка из множества M_f. Поэтому уравнение для нахождения первого члена асимптотики содержит только одно слагаемое и не имеет решения.

Первому случаю резонанса соответствует диаграмма Ньютона на рис. 1, *b*. Диаграммы на рис. 1, *a* и 1, *b* отличаются только отрезком [–3; –2]. Но диаграмма на рис. 1, *b* содержит часть прямой $\mu = 2 + \varepsilon$, лежащую на границе выпуклой оболочки. Поэтому могут существовать решения, у которых главный член асимптотики имеет вид $\mu(\varepsilon) = \alpha\varepsilon^{-1}, \alpha \neq 0$.

Запишем сумму членов разложения функции f из (5), соответствующих прямой $\mu = 2 + \varepsilon$. Получаем, что эта сумма имеет вид

$$\left(k_0^1 k_{-2}^2 - M_{-1}^2\right)\frac{1}{\varepsilon^2} + \left(\frac{M_{-1}\mu}{2\pi}\right)\frac{1}{\varepsilon} + \left(-\frac{\mu^2}{16\pi^2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \mu^{k+2}\varepsilon^k = \mu^2\psi(\varepsilon\mu),$$

где $\psi(\varepsilon) = \left(k_0^1 k_{-2}^2 - M_{-1}^2\right)\frac{1}{\varepsilon^2} + \left(\frac{M_{-1}}{2\pi}\right)\frac{1}{\varepsilon} + \left(-\frac{1}{16\pi^2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varepsilon^k.$

При подстановке $\mu(\varepsilon) = \alpha\varepsilon^{-1}$, $\alpha \neq 0$ получаем равенство $\mu^2\psi(\alpha) = 0$. Таким образом, если $\psi(\alpha) = 0$, то $\mu(\varepsilon) = \alpha\varepsilon^{-1} + o(\varepsilon)$, $\alpha \neq 0$ является главным членом асимптотики собственного значения. Функция ψ определяется способом аппроксимации, каждый корень уравнения $\psi(\alpha) = 0$ порождает собственное значение, стремящееся к бесконечности $\varepsilon \to \infty$. При этом не существует

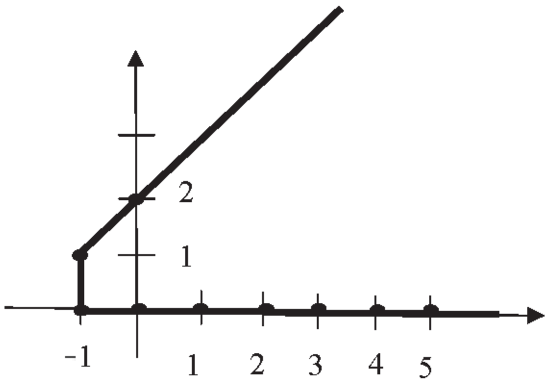

Рис. 2. Диаграмма Ньютона для уравнения (8) в случае второго резонанса

Fig. 2. Diagram of Newton's equation (8) for the second resonance

других решений, имеющих степенную асимптотику. Это согласовано с тем, что предельный оператор в этом случае резонанса не имеет собственных значений.

Наиболее интересным является второй случай резонанса, когда $k_{-1}^1 k_{-1}^2 = M_{-1}^2$.

В этом примере существует одна ветвь решения уравнения (5), которое имеет конечный предел при $\varepsilon \to 0$, а остальные ветви уходят на бесконечность со скоростью $\frac{1}{\varepsilon}$.

Действительно, для этого случая диаграмма Ньютона выглядит следующим образом (рис. 2).

Различие в виде диаграмм приводит к разнообразному поведению собственных значений – корней уравнения (5).

На полученной диаграмме Ньютона имеется вертикальный отрезок, которому соответствуют, как и в случае многочленов, ветви решений, имеющие конечный предел при $\varepsilon \to 0$. Асимптотическое поведение таких ветвей определяется из уравнения, соответствующего этому вертикальному отрезку:

$$\left(k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2 + \frac{M_{-1}\mu}{2\pi}\right)\frac{1}{\varepsilon} = 0.$$

У данного уравнения имеется только одно решение

$$\mu_0 = -\frac{2\pi\left(k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2\right)}{M_{-1}}.$$

Заметим, что это число является единственным собственным значением предельного оператора, соответствующего указанному случаю резонанса. Таким образом, у семейства аппроксимирующих операторов существует одна непрерывная ветвь собственных значений, стремящаяся к собственному значению предельного оператора.

Как и в случае первого резонанса, одной из граней выпуклой оболочки является бесконечная полупрямая. Уравнение, для описания этой грани, имеет вид

$$\left(-\frac{\mu^2}{16\pi^2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \mu^{k+2} \varepsilon^k = \mu^2 \psi_1(\varepsilon\mu).$$

Аналогично получаем, что решениями, соответствующими этой грани, являются функции вида $\mu = \frac{\alpha}{\varepsilon}$, где α – корень уравнения $\psi_1(\alpha) = 0$. Все такие решения уходят на бесконечность при $\varepsilon \to 0$.

Как и в классическом случае многочлена, может быть найден второй и последующие члены разложения. Для этого рассматриваются решения вида $\mu(\varepsilon) = \mu_0 + \mu_1\varepsilon + o(\varepsilon)$, где второй член $\mu_1(\varepsilon)$ определяется из соответствующей диаграммы Ньютона (рис. 3).

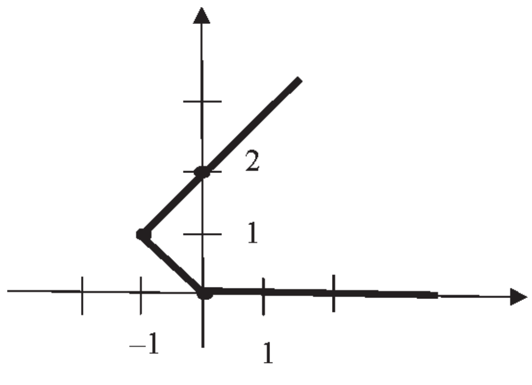

Рис. 3. Диаграмма Ньютона для нахождения $\mu_1(\varepsilon)$

Fig. 3. Newton's diagram to find $\mu_1(\varepsilon)$

3. Исследование собственных вектор-функций. Каждой из описанных выше ветвей собственных значений соответствует семейство собственных вектор-функций. В прикладных вопросах обычно процесс описывается с помощью оператора L_ε при конкретном фиксированном малом значении ε. Поэтому представляет интерес информация о виде собственных вектор-функций, соответствующих малым значениям ε, т. е. построение асимптотики собственных вектор-функций.

Собственные вектор-функции при фиксированном ε есть ненулевые решения системы

$$-\Delta u_1 - \lambda u_1 + a_1(\varepsilon)\int u_2(y,\varepsilon)\varphi_\varepsilon(y)dy\varphi_\varepsilon(x) = 0,$$
$$-\Delta u_2 - \lambda u_2 + a_2(\varepsilon)\int u_1(y,\varepsilon)\varphi_\varepsilon(y)dy\varphi_\varepsilon(x) = 0.$$

Применяя оператор $R_0(\lambda)$, обратный к $-\Delta u - \lambda u$, получаем: если решение существует, то оно имеет вид (при λ, не лежащих на положительной полуоси)

$$u_1(x,\varepsilon) = C_1(\varepsilon)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(x), \tag{9}$$
$$u_2(x,\varepsilon) = C_2(\varepsilon)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(x);$$

где

$$C_1(\varepsilon) = -a_1(\varepsilon)\int u_2(y,\varepsilon)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$
$$C_2(\varepsilon) = -a_2(\varepsilon)\int u_1(y,\varepsilon)\varphi_\varepsilon(y)dy.$$

Преобразовав выражения, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1(\varepsilon) + a_1(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_2(\varepsilon) = 0, \\ a_2(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_1(\varepsilon) + C_2(\varepsilon) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Условием совместности этой системы является равенство $1 - a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)b^2(\varepsilon,\lambda) = 0$, которое совпадает с условием, что λ является собственным значением. Напомним, что мы рассматриваем λ, не лежащие на положительной полуоси.

Пусть $\lambda_j(\varepsilon)$ есть одна из ветвей собственных значений, описанная выше. Рассмотрим соответствующие ей собственные вектор-функции. Поскольку они определяются с точностью до произвольного множителя, то будем считать $C_2(\varepsilon) = C(\varepsilon)$ произвольным, а $C_1(\varepsilon) = -C_2(\varepsilon)a_1(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)$ из (10). Тогда

$$u_1(x,\varepsilon) = -C(\varepsilon)a_1(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda_j(\varepsilon))\big(R_0(\lambda_j(\varepsilon))\varphi_\varepsilon\big)(x), \tag{11}$$
$$u_2(x,\varepsilon) = C(\varepsilon)\big(R_0(\lambda_j(\varepsilon))\varphi_\varepsilon\big)(x).$$

Поскольку $C(\varepsilon)$ произвольно, задача о нахождении предела семейства (11) при $\varepsilon \to 0$ не имеет решений. Чтобы придать смысл этому вопросу, будем выбирать $C(\varepsilon)$ специальным образом. Наиболее простой способ определить $C(\varepsilon)$ заключается в перенормировке семейства (11). Для этого разделим (11) на

$$\sqrt{\int\Big[\big(u_1(x,\varepsilon)\big)^2 + \big(u_2(x,\varepsilon)\big)^2\Big]dx} = |C(\varepsilon)|\sqrt{\Big[1 + \big(a_1(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda_j(\varepsilon))\big)^2\Big]\int\Big[\big(R_0(\lambda_j(\varepsilon))\varphi_\varepsilon\big)(x)\Big]^2 dx}.$$

Это соответствует выбору $C(\varepsilon) = \dfrac{1}{\sqrt{\Big[1 + \big(a_1(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda_j(\varepsilon))\big)^2\Big]\int\Big[\big(R_0(\lambda_j(\varepsilon))\varphi_\varepsilon\big)(x)\Big]^2 dx}}.$

Получаем семейство собственных вектор-функций вида

$$v_1(x,\varepsilon)=\frac{-a_1(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda_j(\varepsilon))\left(R_0\left(\lambda_j(\varepsilon)\right)\varphi_\varepsilon\right)(x)}{\sqrt{\left[1+\left(a_1(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda_j(\varepsilon))\right)^2\right]\int\left[\left(R_0\left(\lambda_j(\varepsilon)\right)\varphi_\varepsilon\right)(x)\right]^2dx}},$$

$$v_2(x,\varepsilon)=\frac{\left(R_0\left(\lambda_j(\varepsilon)\right)\varphi_\varepsilon\right)(x)}{\sqrt{\left[1+\left(a_1(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda_j(\varepsilon))\right)^2\right]\int\left[\left(R_0\left(\lambda_j(\varepsilon)\right)\varphi_\varepsilon\right)(x)\right]^2dx}}, \qquad (12)$$

имеющих в $L_2(R^3)^2$ норму 1 при всех ε.

Поведение семейства функций $\left(R_0\left(\lambda_j(\varepsilon)\right)\varphi_\varepsilon\right)(x)$ и выражений $a_1(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda_j(\varepsilon))$ зависит от поведения ветви $\lambda_j(\varepsilon)$ и коэффициента $a_1(\varepsilon)$. В соответствии с качественно различными случаями поведения $\lambda_j(\varepsilon)$ для них возникают разные описания асимптотического поведения собственных вектор-функций (12).

Самый содержательный результат получается в случае второго резонанса, когда одна из ветвей имеет конечный предел, а остальные стремятся к бесконечности.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\frac{1}{a_1(\varepsilon)}=k_{-1}^1\frac{1}{\varepsilon}+k_0^1+k_1^1\varepsilon+o(\varepsilon)$, $\frac{1}{a_2(\varepsilon)}=k_{-1}^2\frac{1}{\varepsilon}+k_0^2+k_1^2\varepsilon+o(\varepsilon)$, *выполнено условие резонанса* $k_{-1}^1k_{-1}^2=M_{-1}{}^2$ *и* $\lambda_0(\varepsilon)$ *есть ветвь собственных значений, имеющая конечный предел* $\lambda_0=-\mu_0^2$, *где* $\mu_0=\frac{-2\pi\left(k_{-1}^1k_0^2+k_0^1k_{-1}^2\right)}{M_{-1}}$. *Если* $-\mu_0{}^2$ *не лежит на положительной полуоси, то семейство собственных вектор-функций при* $\varepsilon\to 0$ *сходится к вектор-функции*

$$\begin{pmatrix}u_1(x)\\ u_2(x)\end{pmatrix}=\tilde{C}\frac{1}{4\pi\|x\|}e^{-\mu_0\|x\|}\begin{pmatrix}\dfrac{-a_1^1M_{-1}}{\sqrt{1+\left[-a_1^1M_{-1}\right]^2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{1+\left[-a_1^1M_{-1}\right]^2}}\end{pmatrix}, \qquad (13)$$

которая является собственной вектор-функцией предельного оператора.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя то, что $\lambda_0=-\mu_0^2$ не лежит на положительной полуоси, можно прямыми вычислениями проверить, что $\left(R_0\left(\lambda_j(\varepsilon)\right)\varphi_\varepsilon\right)(x)$ сходится к фундаментальному решению $E_{\lambda_0}(x)$ по метрике L_2.

В частности, $\sqrt{\int\left[\left(R_0\left(\lambda_j(\varepsilon)\right)\varphi_\varepsilon\right)(x)\right]^2dx}$ сходится к $\left\|E_{\lambda_0}(x)\right\|$.

Из вышеизложенного получаем, что $\frac{\left(R_0\left(\lambda_j(\varepsilon)\right)\varphi_\varepsilon\right)(x)}{\sqrt{\int\left[\left(R_0\left(\lambda_j(\varepsilon)\right)\varphi_\varepsilon\right)(x)\right]^2dx}}$ при $\varepsilon\to 0$ сходится к $\tilde{C}\frac{1}{4\pi\|x\|}e^{-\mu_0\|x\|}$, где $\tilde{C}=\left\|\frac{e^{-\mu_0\|x\|}}{4\pi\|x\|}\right\|^{-1}$.

Рассмотрим поведение коэффициентов системы (12) для второго случая резонанса

$$\begin{pmatrix}\dfrac{-a_1(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda_j(\varepsilon))}{\sqrt{\left[1+\left(a_1(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda_j(\varepsilon))\right)^2\right]}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{\left[1+\left(a_1(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda_j(\varepsilon))\right)^2\right]}}\end{pmatrix}, \qquad (14)$$

при $\varepsilon\to 0$ и где $\lambda_j(\varepsilon)$ – корень уравнения $1-a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)b^2(\varepsilon,\lambda)=0$.

В терминах исходных коэффициентов случай 2) соответствует коэффициентам вида

$$a_1(\varepsilon) = a_1^1\varepsilon + a_2^1\varepsilon^2 + o(\varepsilon), \quad a_2(\varepsilon) = a_1^2\varepsilon + a_2^2\varepsilon^2 + o(\varepsilon),$$

или

$$\frac{1}{a_1(\varepsilon)} = k_{-1}^1\frac{1}{\varepsilon} + k_0^1 + k_1^1\varepsilon + o(\varepsilon), \quad \frac{1}{a_2(\varepsilon)} = k_{-1}^2\frac{1}{\varepsilon} + k_0^2 + k_1^2\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Во втором случае резонанса, при $\mu \to \mu_0$, где $\mu_0 = \dfrac{-2\pi\left(k_{-1}^1k_0^2 + k_0^1k_{-1}^2\right)}{M_{-1}}$, получаем, что предел (14) при $\varepsilon \to 0$ равен $\begin{pmatrix} \dfrac{-a_1^1M_{-1}}{\sqrt{1+\left[-a_1^1M_{-1}\right]^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+\left[-a_1^1M_{-1}\right]^2}} \end{pmatrix}$, а предел собственных вектор-функций имеет вид (13).

Покажем, что во всех остальных случаях предел семейства нормированных собственных вектор-функций не существует.

Напомним, что последовательность функций f_n, заданных на пространстве с мерой, сходится к функции f почти всюду, если $f_n(x) \to f(x)$ почти для всех $x \in X$, т. е. существует такое множество X_0 меры нуль, что $f_n(x) \to f(x)$ для всех $x \in X \setminus X_0$.

Последовательность x_n точек банахова пространства X слабо сходится к точке $x_0 \in X$, если для любого $f \in X^/$ выполнено $f(x_n) \to f(x_0)$.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\dfrac{1}{a_1(\varepsilon)} = k_{-1}^1\dfrac{1}{\varepsilon} + k_0^1 + k_1^1\varepsilon + o(\varepsilon)$, $\dfrac{1}{a_2(\varepsilon)} = k_{-1}^2\dfrac{1}{\varepsilon} + k_0^2 + k_1^2\varepsilon + o(\varepsilon)$ *и выполнено условие резонанса* $k_{-1}^1k_{-1}^2 = M_{-1}{}^2$, *и* $\lambda_j(\varepsilon)$ – *одна из ветвей собственных значений, стремящихся к бесконечности. Тогда при* $\varepsilon \to 0$ *нормированное семейство собственных вектор-функций сходится почти всюду и слабо к нулю и, следовательно, не имеет предела в пространстве* L_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\lambda_j(\varepsilon) = \dfrac{-V}{\varepsilon}$. Тогда $b(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon}\left(M_{-1} - \dfrac{V}{4\pi} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} M_kV^{k+1}\varepsilon^{k-1}\right)$, а предел системы коэффициентов (14) при $\varepsilon \to 0$ равен

$$\begin{pmatrix} \dfrac{-a_1^1\left(M_{-1} - \dfrac{V}{4\pi}\right)}{\sqrt{1+\left[-a_1^1\left(M_{-1} - \dfrac{V}{4\pi}\right)\right]^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+\left[-a_1^1\left(M_{-1} - \dfrac{V}{4\pi}\right)\right]^2}} \end{pmatrix}.$$

Поэтому исследование поведения семейства собственных функций сводится к исследованию поведения $f_\varepsilon(x) = \dfrac{\left(R_0\left(\lambda_j(\varepsilon)\right)\varphi_\varepsilon\right)(x)}{\sqrt{\int\left[\left(R_0\left(\lambda_j(\varepsilon)\right)\varphi_\varepsilon\right)(x)\right]^2 dx}}$.

Надо проверить, что $f_\varepsilon(x)$ почти всюду стремится к нулю и что

$$\int f_\varepsilon(x)g(x)dx \to 0 \qquad (15)$$

для любой функции $g \in L_2$.

После преобразования Фурье получаем, что норма $\sqrt{\int\left[\left(R_0\left(\lambda_j(\varepsilon)\right)\varphi_\varepsilon\right)(x)\right]^2 dx}$ выражается через величину

$$N(\varepsilon)=\sqrt{\int\left(\frac{\hat{\varphi}(\varepsilon\xi)}{|\xi|^2+\dfrac{V}{\varepsilon}}\right)^2 d\xi},$$

и можно показать, что она ведет себя асимптотически как $\sqrt[4]{\varepsilon}$.

После преобразования Фурье интеграл из (15) выражается через

$$\frac{1}{N(\varepsilon)}=\int\frac{\hat{\varphi}(\varepsilon\xi)\hat{g}(\xi)}{|\xi|^2+\dfrac{V}{\varepsilon}}d\xi.$$

Здесь в каждой фиксированной точке ξ подынтегральное выражение стремится к 0, как ε, а пронормированная функция – как $\sqrt[4]{\varepsilon^3}$, т. е. почти всюду сходится к нулю.

Согласно неравенству Коши – Буняковского,

$$\left|\int\frac{\hat{\varphi}(\varepsilon\xi)\hat{g}(\xi)}{|\xi|^2+\dfrac{V}{\varepsilon}}d\xi\right|^2\le\int\left(\frac{\hat{\varphi}(\varepsilon\xi)}{|\xi|^2+\dfrac{V}{\varepsilon}}\right)^2 d\xi\int\left|\hat{g}(\xi)\right|^2 d\xi.$$

Здесь интегралы $\int\left(\dfrac{\hat{\varphi}(\varepsilon\xi)}{|\xi|^2+\dfrac{V}{\varepsilon}}\right)^2 d\xi$ стремятся к нулю, как $\sqrt{\varepsilon}$. Поэтому интегралы (15) стремятся к 0.

Таким образом, семейство нормированных собственных функций $f_\varepsilon(x)$ слабо сходится к 0 в L_2. Аналогично доказательству теорем 2 и 3 можно провести доказательство следующих теорем.

Теорема 4. *Пусть* $\dfrac{1}{a_1(\varepsilon)}=k_0^1+k_1^1\varepsilon+k_2^1\varepsilon^2+o(\varepsilon)$, $\dfrac{1}{a_2(\varepsilon)}=k_{-2}^2\dfrac{1}{\varepsilon^2}+k_{-1}^2\dfrac{1}{\varepsilon}+k_0^2+o(\varepsilon)$ *и* $\mu=-\dfrac{2\pi\left(k_1^1k_{-1}^2+k_0^1k_0^2+k_2^1k_{-2}^2\right)}{M_{-1}}\varepsilon+o(\varepsilon)$, *тогда при* $\varepsilon\to 0$ *нормированное семейство собственных вектор-функций сходится почти всюду и слабо к нулю.*

Теорема 5. *Пусть* $\dfrac{1}{a_1(\varepsilon)}=k_{-2}^1\dfrac{1}{\varepsilon^2}+k_{-1}^1\dfrac{1}{\varepsilon}+k_0^1+o(\varepsilon)$, $\dfrac{1}{a_2(\varepsilon)}=k_0^2+k_1^2\varepsilon+k_2^2\varepsilon^2+o(\varepsilon)$ *и* $\mu=-\dfrac{2\pi\left(k_{-2}^1k_2^2+k_{-1}^1k_1^2+k_0^1k_0^2\right)}{M_{-1}}\varepsilon+o(\varepsilon)$, *тогда при* $\varepsilon\to 0$ *нормированное семейство собственных вектор-функций сходится почти всюду и слабо к нулю.*

Список использованных источников

1. Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверио [и др.]. – М.: Мир, 1991. – 568 с.
2. Кот, М. Г. О резольвентной сходимости операторов, аппроксимирующих систему уравнений δ-образными коэффициентами / М. Г. Кот // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2015. – № 3. – С. 111–117.
3. Антоневич, А. Б. Аппроксимации операторов с дельта-образными коэффициентами / А. Б. Антоневич, Т. А. Романчук // Актуальные проблемы математики: сб. науч. тр. ГрГУ им. Я. Купалы; редкол.: Е. А. Ровба [и др.]. – Гродно: ГрГУ, 2008. – С. 11–28.
4. Антоневич, А. Б. Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций / А. Б. Антоневич, Т. А. Романчук. – Саарбрюккен: Laplambert, 2012. – 148 с.
5. Кот, М. Г. Асимптотика собственных значений операторов, аппроксимирующих дифференциальные уравнения с δ-образными коэффициентами / М. Г. Кот // Журн. Бел. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2017. – № 1. – С. 3–10.

6. Кащенко, И. С. Асимптотическое разложение решений уравнений: метод указания / И. С. Кащенко. – Ярославль: ЯрГУ, 2011. – 44 с.

7. Васильев, В. А. Асимптотика экспоненциальных интегралов, диаграмма Ньютона и классификация точек минимума / В. А. Васильев // Функциональный анализ и его приложения. – 1977. – Т. 11, вып. 3. – С. 1–11.

8. Забрейко, П. П. Диаграммы Ньютона и алгебраические кривые / П. П. Забрейко, А. В. Кривко-Красько // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2014. – Т. 22, № 2. – С. 32–45.

9. Забрейко, П. П. Диаграммы Ньютона и алгебраические кривые. II / П. П. Забрейко, А. В. Кривко-Красько // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2015. – Т. 23, № 1. – С. 64–75.

References

1. Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R., Holden H., Exner P. S*olvable models in quantum mechanics*. Berlin, Springer, 1988. 458 p. Doi: 10.1007/978-3-642-88201-2

2. Kot M. G. About resolvent convergence of operator approximating systems of equations with δ-shaped coefficints. *Vestnik BGU. Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika = Vestnik BSU. Series 1: Physics. Mathematics. Informatics*, 2015, no. 3, pp.111–117 (in Russian).

3. Antonevich A. B., Romanchuk T. A. Approximation operators with delta -shaped coefficints. *Aktualnye problemy matematiki: sbornik nauchnyh trudov* [Actual problems of mathematics: the collection of scientific papers]. Grodno, Grodno State University, 2008, pp. 11–28 (in Russian).

4. Antonevich A. B., Romanchuk T. A. *Equations with delta-shaped coefficients: method of finite-dimensional approximations*. Saarbrücken, Laplambert, 2012. 148 p. (in Russian).

5. Kot M. G. Asymptotics of the eigenvalues of approximating differential equations with δ-different coefficients. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika = Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2017, no. 1, pp. 3–10 (in Russian).

6. Kaschenko I. S. *The asymptotic expansion of the solutions of equations: the method of guidance.* Yaroslavl, Yaroslavl State University, 2011. 44 p. (in Russian).

7. Vasil'ev V. A. Asymptotic exponential integrals, Newton's diagram and classification of minimum points. *Functional Analysis and Its Applications*, 1977, vol. 11, no. 3, pp. 163–172. Doi: 10.1007/bf01079460

8. Zabreiko P. P, Krivko-Kras'ko A. V. Newton diagrams and algebraic curves. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2014, vol. 22, no. 2, pp. 32–45 (in Russian).

9. Zabreiko P. P, Krivko-Kras'ko A. V. Newton diagrams and algebraic curves II. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2015, vol. 23, no. 1, pp. 64–75 (in Russian).

Информация об авторе

Кот Марина Геннадьевна – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: mtorkaylo @mail.ru

Information about the author

Marina G. Kot – Postgraduate, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mtorkaylo@mail.ru