ISSN 1561-2430 (print)
УДК 517.5

Поступила в редакцию 12.05.2017
Received 12.05.2017

Я. А. Роўба, Н. Ю. Казлоўская

Гродзенскі дзяржаўны ўніверсітэт імя Янкі Купалы, Гродна, Беларусь

АБ НАБЛІЖЭННІ ФУНКЦЫІ $|\sin x|$ РАЦЫЯНАЛЬНЫМІ АПЕРАТАРАМІ ФЕЕРА

Анатацыя. Рацыянальныя шэрагі Фур'е былі пабудаваны М. М. Джрбашанам у 1956 г. У прыватнасці, знойдзена кампактнае прадстаўленне іх ядра Дзірыхле. На гэтай аснове В. М. Русак увёў рацыянальныя аператары Феера, Джэксана і Вале Пусэна. Частковыя сумы рацыянальных шэрагаў Фур'е, аператары Вале Пусэна і Джэксана знайшлі шырокае прымяненне для адшукання класаў функцый, рацыянальная апраксімацыя якіх лепшая за палінаміяльную ў сэнсе парадку. Рацыянальныя аператары Феера заставаліся недаследаванымі. Таму ўяўляе інтарэс даследаваць іх апраксімацыйныя характарыстыкі для элементарных функцый. Перыядычная функцыя $|\sin x|$ адыгрывае практычна такую ж ролю, што і функцыя $|x|$. У дадзенай рабоце з дапамогай метаду вываду параметра ў камплексную плоскасць атрыманы некаторыя дакладныя і асімптатычныя судачыненні для набліжэнняў функцыі $|\sin x|$ з дапамогай рацыянальных аператараў Феера. Паказана ў прыватнасці, што такія набліжэнні адлюстроўваюць асаблівасці рацыянальнай апраксімацыі.

Ключавыя словы: рацыянальныя аператыры Феера, рацыянальная апраксімацыя

Для цытавання. Роўба, Я. А. Аб набліжэнні функцыі $|\sin x|$ рацыянальнымі аператарамі Феера / Я. А. Роўба, Н. Ю. Казлоўская // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 3. – С. 27–39.

E. A. Rovba, N. Yu. Kozlovskaya

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus

APPROXIMATION OF $|\sin x|$ BY RATIONAL OPERATORS OF FEJÉR TYPE

Abstract. Rational Fourier series were constructed by M. M. Dzhrbashian in 1956. A compact representation of their Dirichlet kernel was also found. Later V. N. Rusak introduced rational operators of Fejér, de la Vallée Poussin and Jackson type. Partial sums of rational Fourier series, operators of de la Vallée Poussin and Jackson type are widely used for finding classes of functions, for which rational approximation is better than polynomial approximation. But in our opinion, rational operators of Fejér type are still unexpolred, so it's interesting to investigate their approximation characteristics for elementary functions. The periodic function $|\sin x|$ plays almost the same role in approximation theory as the function $|x|$. In this article, we have obtained some exact and asymptotic ratios for approximation of $|\sin x|$ by Fejér-type rational operators.

Keywords: Fejér-type rational operators, rational approximation

For citation. Rovba E. A., Kozlovskaya N. Yu. Approximation of $|\sin x|$ by rational operators of Fejér type. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2017, no. 3, pp. 27–39 (in Russian).

Уводзіны. У 1956 г. М. М. Джрбашан [1] пабудаваў рацыянальныя шэрагі Фур'е на адзінкавай акружнасці, якія абагульняюць трыганаметрычныя шэрагі Фур'е. Некалькі пазней В. М. Русак (гл., напр., [2]) увёў рацыянальныя аператары Феера, Джэксана і Вале Пусэна. Частковыя сумы рацыянальных шэрагаў Фур'е, рацыянальныя аператары Джэксана і Вале Пусэна знайшлі шырокае прымяненне ў тэорыі рацыянальных набліжэнняў, у прыватнасці ў знаходжанні класаў функцый, якія адлюстроўваюць асаблівасці рацыянальнай апраксімацыі (гл., напр., [3, 4]). Што датычыцца рацыянальных аператараў Феера, то яны, на наш погляд, асаблівых прымяненняў не знайшлі. Гэтыя аператары, таксама як і ў палінаміяльным выпадку, досыць добра набліжаюць «дрэнныя» функцыі. Але ўзнікае пытанне: ці рэагуюць яны на асаблівасці рацыянальнай апраксімацыі?

Рацыянальныя набліжэнні функцыі $|\sin x|$ вывучаліся ў [5, 6]. У гэтых працах паказана, што раўнамернае набліжэнне функцыі $|\sin x|$ частковымі сумамі рацыянальных шэрагаў Фур'е істотна лепшае за палінаміяльнае набліжэнне ў сэнсе парадку. У дадзенай рабоце даследуюцца набліжэнні функцыі $|\sin x|$ з дапамогай рацыянальных аператараў Феера.

1. Дакладныя роўнасці для набліжэнняў функцыі $|\sin x|$ рацыянальнымі аператарамі Феера. Няхай α_k – адвольныя камплексныя лікі, $|\alpha_k|<1, \quad k=1,2,...,2n.$

Абазначым

$$\lambda_{2n}(u)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\arg\alpha_k)+|\alpha_k|^2}.$$

Для адвольнай функцыі $f\in C_{2\pi}$ вызначым аператар Феера (гл. [7])

$$\Phi_{2n}(x,f)=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_{2n}^2(t,x)dt}{\int_{-\pi}^{\pi}D_{2n}^2(t,x)dt}, \tag{1}$$

дзе

$$D_{2n}(t,x)=\frac{\sin\int_x^t\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(u)\right)du}{\sin\frac{x-t}{2}}.$$

Л е м а 1. *Для функцыі $D_{2n}(t,x)$ праўдзіцца роўнасць*

$$\int_{-\pi}^{\pi}D_{2n}^2(t,x)dt=\pi\lambda_{2n}(x).$$

Доказ лемы 1 можна правесці аналагічна, як у артыкуле [7].

З улікам лемы 1 формулу (2) можна перапісаць так:

$$\Phi_{2n}(x,f)=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_{2n}^2(t,x)dt}{\pi\lambda_{2n}(x)}. \tag{2}$$

Паколькі функцыя $\Phi_{2n}(x,f)$ з'яўляецца дакладнай для адзінкі, г. зн.

$$\Phi_{2n}(x,1)\equiv 1,$$

маем, што

$$f(x)-\Phi_{2n}(x,f)=\frac{1}{\pi\lambda_{2n}(x)}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)-f(t)\big)D_{2n}^2(t,x)dt, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Л е м а 2. *Функцыя $\Phi_{2n}(x,f)$ з'яўляецца рацыянальнай парадку не вышэй за $2n$, прычым яе полюсы вызначаюцца з ураўнення $\lambda_{2n}(x)=0$.*

Д о к а з. Лема лёгка вынікае з прадстаўлення

$$D_{2n}^2(t,x)=\frac{1}{4(\xi-z)^2}\left(\xi^2\prod_{k=1}^{2n}\frac{\xi-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}\xi}\frac{1-\overline{\alpha_k}z}{z-\alpha_k}-2+z^2\prod_{k=1}^{2n}\frac{1-\overline{\alpha_k}\xi}{\xi-\alpha_k}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}\right),$$

дзе $z=e^{it}$, $\xi=e^{ix}$. Гэта прадстаўленне няцяжка атрымаць з [1].

Адзначым, што канструкцыя аператара $\Phi_{2n}(x,f)$ некалькі іншая, чым у [7], дзе парадак рацыянальнай функцыі роўны $2n$ пры n параметрах $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$. У нашым выпадку мы маем той жа парадак $2n$, але пры $2n$ параметрах $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{2n}$. Больш шырокі выбар параметраў дазваляе ў некаторых выпадках палепшыць парадак набліжэнняў.

Разгледзім функцыю $f(x) = |\sin x|$. Увядзём абазначэнне

$$\varepsilon_{2n}(\alpha, x) = |\sin x| - \Phi_{2n}(x, |\sin x|), \; x \in \mathbb{R}.$$

Паўсюль далей будзем разглядаць наступны выпадак:

$$\alpha_k \in [0,1), \quad \alpha_{2n-k+1} = -\alpha_k, \; k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Відавочна, што пры такім выбары параметраў

$$\lambda_{2n}(u) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\alpha_k^4}{(1+\alpha_k^2)^2 - 4\alpha_k^2 \cos^2 u}.$$

Т э а р э м а 1. *Для набліжэння функцыі* $|\sin x|$ *рацыянальнымі функцыямі Феера праўдзіцца прадстаўленне*

$$\varepsilon_{2n}(\alpha, x) = \frac{2}{\pi \lambda_{2n}(x)} \cdot \int_{-1}^{1} \left[\frac{(1-\xi^2)\chi_{2n}(\xi)}{(\xi^2 - 2\xi\cos x + 1)^2} \times \right.$$
$$\times \left((\xi^2 \cos x - 2\xi + \cos x) \cos 2\int_0^x \left(\frac{1}{2} + \lambda_{2n}(u) \right) du - \sin x (1-\xi^2) \sin 2\int_0^x \left(\frac{1}{2} + \lambda_{2n}(u) \right) du \right) - \tag{5}$$
$$\left. - \frac{(1-\xi^2)(\xi^2 \cos x - 2\xi + \cos x)}{\xi(\xi^2 - 2\xi\cos x + 1)^2} \right] d\xi, \quad x \in \mathbb{R},$$

дзе

$$\chi_{2n}(\xi) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\xi^2 - \alpha_k^2}{1 - \alpha_k^2 \xi^2}$$

– здабытак Бляшке парадку $2n$.

Д о к а з. З улікам роўнасці (4) атрымаем

$$\varepsilon_{2n}(\alpha, x) = \frac{1}{\pi \lambda_{2n}(x)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin x| - |\sin t|}{\sin^2 \frac{t-x}{2}} \sin^2 \int_t^x \left(\frac{1}{2} + \lambda_{2n}(u) \right) du \, dt. \tag{6}$$

Дапусцім далей, што $x \in (0, \pi)$. Тады пасля некаторых пераўтварэнняў будзем мець

$$\varepsilon_{2n}(\alpha, x) = \frac{1}{\pi \lambda_{2n}(x)} \left(\int_0^{\pi} \frac{\sin x - \sin t}{\sin^2 \frac{t-x}{2}} \sin^2 \int_t^x \left(\frac{1}{2} + \lambda_{2n}(u) \right) du \, dt + \int_0^{\pi} \frac{\sin x - \sin t}{\sin^2 \frac{t+x}{2}} \sin^2 \int_{-t}^x \left(\frac{1}{2} + \lambda_{2n}(u) \right) du \, dt \right).$$

Выкарыстоўваючы формулу (гл. [1])

$$\exp\left(2i \int_0^x \left(\frac{1}{2} + \lambda_{2n}(u) \right) du \right) = e^{ix} \chi_{2n}(e^{ix}),$$

знойдзем

$$\exp\left(2i \int_t^x \left(\frac{1}{2} + \lambda_{2n}(u) \right) du \right) = e^{i(x-t)} \frac{\chi_{2n}(e^{ix})}{\chi_{2n}(e^{it})},$$

$$\exp\left(2i \int_{-t}^x \left(\frac{1}{2} + \lambda_{2n}(u) \right) du \right) = e^{i(x+t)} \chi_{2n}(e^{ix}) \chi_{2n}(e^{it}).$$

Адсюль і з формул Эйлера будзем мець

$$\varepsilon_{2n}(\alpha,x)=\frac{1}{2\pi i\lambda_{2n}(x)}\left(\int_0^{\pi}\frac{(e^{ix}-e^{it})(1+e^{ix}e^{it})}{(e^{ix}-e^{it})^2}\left(\frac{e^{ix}}{e^{it}}\cdot\frac{\chi_{2n}(e^{ix})}{\chi_{2n}(e^{it})}+\frac{e^{it}}{e^{ix}}\cdot\frac{\chi_{2n}(e^{it})}{\chi_{2n}(e^{ix})}-2\right)dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\pi}\frac{(e^{ix}-e^{it})(1+e^{ix}e^{it})}{(e^{ix}e^{it}-1)^2}\left(e^{ix}e^{it}\chi_{2n}(e^{ix})\chi_{2n}(e^{it})+\frac{1}{e^{ix}e^{it}}\chi_{2n}(e^{it})\chi_{2n}(e^{ix})-2\right)dt\right).$$

Зробім замены $z=e^{ix}$, $\xi=e^{it}$, атрымаем

$$\varepsilon_{2n}(\alpha,x)=\frac{1}{2\pi\lambda_{2n}(x)}\int_C\frac{(\xi-z)(1+\xi z)}{\xi^2 z}\cdot\left(\frac{z^2\chi_{2n}(z)\chi_{2n}(\xi^{-1})+\xi^2\chi_{2n}(z^{-1})\chi_{2n}(\xi)-2\xi z}{(\xi-z)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\xi^2z^2\chi_{2n}(z)\chi_{2n}(\xi)+\chi_{2n}(z^{-1})\chi_{2n}(\xi^{-1})-2\xi z}{(1-\xi z)^2}\right)d\xi,$$

дзе

$$C=\{\xi:\ \xi=e^{it},\ 0\le t\le\pi\}.$$

Пакладзем цяпер, што $|z|<1$, $\operatorname{Im}z>0$ і запішам наступнае прадстаўленне:

$$\varepsilon_{2n}(\alpha,x)=\frac{1}{2\pi\lambda_{2n}(x)}\left(z\chi_{2n}(z)(I_1+I_2)+\frac{1}{z\chi_{2n}(z)}(I_3+I_4)-2I_5\right), \tag{7}$$

дзе

$$I_1=\int_C\frac{1+\xi z}{\xi^2(\xi-z)}\chi_{2n}(\xi^{-1})d\xi,$$

$$I_2=\int_C\frac{(\xi-z)(1+\xi z)}{(1-\xi z)^2}\chi_{2n}(\xi)d\xi,$$

$$I_3=\int_C\frac{1+\xi z}{\xi-z}\chi_{2n}(\xi)d\xi,$$

$$I_4=\int_C\frac{(\xi-z)(1+\xi z)}{\xi^2(1-\xi z)^2}\chi_{2n}(\xi^{-1})d\xi,$$

$$I_5=\int_C\frac{(1+\xi z)\left((\xi-z)^2+(1-\xi z)^2\right)}{\xi(\xi-z)(1-\xi z)^2}d\xi.$$

Пераўтворым цяпер інтэгралы I_1-I_5.

Зоймемся спачатку інтэгралам I_1. Падінтэгральная функцыя $f_1(\xi)$ інтэграла I_1 аналітычная ў абсягу $|\xi|>1$, $\operatorname{Im}\xi>0$, у пункце $\xi=\infty$ яна мае нуль 2-га парадку, таму

$$\operatorname*{res}_{\xi=\infty} f_1(\xi)=0.$$

Такім чынам,

$$I_1=\int_{-\infty}^{-1}\frac{1+\xi z}{\xi^2(\xi-z)}\chi_{2n}(\xi^{-1})d\xi+\int_1^{+\infty}\frac{1+\xi z}{\xi^2(\xi-z)}\chi_{2n}(\xi^{-1})d\xi.$$

Зробім замену $\xi=\eta^{-1}$, $d\xi=-\eta^{-2}d\eta$. Тады

$$I_1=\int_{-1}^{1}\frac{\xi+z}{1-\xi z}\chi_{2n}(\xi)d\xi.$$

Разгледзім інтэграл I_2. Яго падінтэгральная функцыя аналітычная ў абсягу $|\xi|<1,\ \mathrm{Im}\,\xi>0$. Таму

$$I_2=-\int_{-1}^{1}\frac{(\xi-z)(1+\xi z)}{(1-\xi z)^2}\chi_{2n}(\xi)d\xi.$$

Для інтэграла I_3 маем, што яго падінтэгральная функцыя аналітычная ў абсягу $|\xi|<1, \mathrm{Im}\,\xi>0$, за выключэннем пункту $\xi=z$, – простага полюса. Тады

$$I_3=-\int_{-1}^{1}\frac{1+\xi z}{\xi-z}\chi_{2n}(\xi)d\xi+2\pi i\operatorname*{res}_{\xi=z}\frac{1+\xi z}{\xi-z}\chi_{2n}(\xi)=\int_{-1}^{1}\frac{1+\xi z}{\xi-z}\chi_{2n}(\xi)d\xi+2\pi i(1+z^2)\chi_{2n}(z).$$

Рагледзім інтэграл I_4. Падінтэгральная функцыя $f_4(\xi)$ інтэграла I_4 аналітычная ў абсягу $|\xi|>1, \mathrm{Im}\,\xi>0$, у пункце $\xi=\infty$ мае нуль 2-га парадку, таму

$$\operatorname*{res}_{\xi=\infty}f_4(\xi)=0.$$

Такім чынам,

$$I_4=\int_{-\infty}^{-1}\frac{(\xi-z)(1+\xi z)}{\xi^2(1-\xi z)^2}\chi_{2n}(\xi^{-1})d\xi+\int_{1}^{+\infty}\frac{(\xi-z)(1+\xi z)}{\xi^2(1-\xi z)^2}\chi_{2n}(\xi^{-1})d\xi.$$

Зробім замену $\xi=\eta^{-1},\ d\xi=-\eta^{-2}d\eta.$ Тады

$$I_4=\int_{-1}^{1}\frac{(1-\xi z)(\xi+z)}{(\xi-z)^2}\chi_{2n}(\xi)d\xi.$$

Зоймемся інтэгралам I_5 (гэты інтэграл будзем разумець у сэнсе яго галоўнага значэння). Разгледзім контур

$$\Gamma=C\bigcup[-1,-\varepsilon]\bigcup C_\varepsilon\bigcup[\varepsilon,1],\ \varepsilon\in(0,1),$$

дзе

$$C_\varepsilon=\{\xi:\ |\xi|=\varepsilon, \mathrm{Im}\,\xi>0\}.$$

Так як унутры контура Г пры досыць малым ε ляжыць адзін асаблівы пункт функцыі

$$f_5(\xi)=\frac{(1+\xi z)\left((\xi-z)^2+(1-\xi z)^2\right)}{\xi(\xi-z)(1-\xi z)^2}$$

– просты полюс $\xi=z$, то

$$\int_\Gamma f_5(\xi)d\xi=2\pi i\operatorname*{res}_{\xi=z}f_5(\xi)=2\pi i\lim_{\xi\to z}\left((\xi-z)\frac{(1+\xi z)\left((\xi-z)^2+(1-\xi z)^2\right)}{\xi(\xi-z)(1-\xi z)^2}\right)=2\pi i\frac{z^2+1}{z}.$$

З іншага боку,

$$\int_\Gamma f_5(\xi)d\xi=\int_C f_5(\xi)d\xi+\int_{-1}^{-\varepsilon}f_5(\xi)d\xi+\int_{C_\varepsilon}f_5(\xi)d\xi+\int_\varepsilon^1 f_5(\xi)d\xi. \quad (8)$$

Абазначым

$$g(\xi)=\frac{(1+\xi z)\left((\xi-z)^2+(1-\xi z)^2\right)}{(\xi-z)(1-\xi z)^2}.$$

Тады

$$\int_{C_\varepsilon}f_5(\xi)d\xi=\int_{C_\varepsilon}\frac{g(\xi)}{\xi}d\xi=\int_{C_\varepsilon}\frac{g(\xi)-g(0)}{\xi}d\xi+g(0)\int_{C_\varepsilon}\frac{1}{\xi}d\xi.$$

Функцыя $g(\xi)$ аналітычная ў пункце $\xi = 0$, таму, калі давызначыць функцыю

$$h(\xi) = \frac{g(\xi) - g(0)}{\xi}$$

у пункце $\xi = 0$:

$$h(0) = \lim_{\xi \to 0} \frac{g(\xi) - g(0)}{\xi} = g'(0),$$

то функцыя $h(\xi)$ будзе непарыўнай і абмежаванай у наваколлі нуля $\left(|h(\xi)| < M \right)$ і

$$\left| \int_{C_\varepsilon} \frac{g(\xi) - g(0)}{\xi} d\xi \right| < M \pi \varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0.$$

З дапамогай замены $\xi = \varepsilon e^{i\varphi}$ знойдзем

$$\int\limits_{C_\varepsilon} \frac{1}{\xi} d\xi = i \int_\pi^0 d\varphi = -\pi i.$$

У выніку атрымаем з улікам таго, што

$$g(0) = -\frac{z^2 + 1}{z},$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\tilde{N}_\varepsilon} f_5(\xi) d\xi = \pi i \frac{z^2 + 1}{z}. \tag{9}$$

Будзем мець

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} f_5(\xi) d\xi + \int_\varepsilon^1 f_5(\xi) d\xi \underset{\varepsilon \to 0}{\to} \text{V.p} \int_{-1}^1 f_5(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 \frac{(1 + \xi z)\left((\xi - z)^2 + (1 - \xi z)^2 \right)}{\xi(\xi - z)(1 - \xi z)^2} d\xi.$$

Адсюль пасля некаторых пераўтварэнняў атрымаем, што

$$\int_{-1}^1 f_5(\xi) d\xi = -z \int_{-1}^1 \frac{(1 - \xi^2)\left((z^2 + 1)(1 + \xi^2) - 4\xi z \right)}{\xi\left(\xi(z^2 + 1) - (1 + \xi^2) z \right)^2} d\xi. \tag{10}$$

Тады з формулы (8) з улікам роўнасцей (9), (10) вынікае, што

$$I_5 = \int_C f_5(\xi) d\xi = 2\pi i \frac{z^2 + 1}{z} - \pi i \frac{z^2 + 1}{z} - \int_{-1}^1 f_5(\xi) d\xi = \pi i \frac{z^2 + 1}{z} + 2z \int_{-1}^1 \frac{(1 - \xi^2)\left((z^2 + 1)(1 + \xi^2) - 4\xi z \right)}{\xi\left(\xi(z^2 + 1) - (1 + \xi^2) z \right)^2} d\xi.$$

Вернемся цяпер да формулы (7). Знойдзем спачатку

$$I_1 + I_2 = -\int_{-1}^1 \left(\frac{(\xi - z)(1 + \xi z)}{(1 - \xi z)^2} \chi_{2n}(\xi) - \frac{\xi + z}{1 - \xi z} \chi_{2n}(\xi) \right) d\xi = 2z \int_{-1}^1 \frac{1 - \xi^2}{(1 - \xi z)^2} \chi_{2n}(\xi) d\xi,$$

$$I_3 + I_4 = -\int_{-1}^1 \left(\frac{1 + \xi z}{\xi - z} \chi_{2n}(\xi) - \frac{(1 - \xi z)(\xi + z)}{(\xi - z)^2} \chi_{2n}(\xi) \right) d\xi + 2\pi i (1 + z^2) \chi_{2n}(z) =$$

$$= 2z \int_{-1}^1 \frac{1 - \xi^2}{(\xi - z)^2} \chi_{2n}(\xi) d\xi + 2\pi i (1 + z^2) \chi_{2n}(z).$$

Формула (7) прыме выгляд:

$$\varepsilon_{2n}(\alpha,x)=\frac{1}{\pi\lambda_{2n}(x)}\cdot\left(\int_{-1}^{1}\left((1-\xi^2)\chi_{2n}(\xi)\cdot\left(\frac{z^2\chi_{2n}(z)}{(1-\xi z)^2}+\frac{1}{\chi_{2n}(z)(\xi-z)^2}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-2z\frac{(1-\xi^2)\left((z^2+1)(1+\xi^2)-4\xi z\right)}{\xi\left(\xi(z^2+1)-(1+\xi^2)z\right)^2}\right)d\xi\right). \tag{11}$$

Паколькі

$$\left(\chi_{2n}(e^{ix})\right)^{\pm1}=e^{\mp ix}\left(\cos 2\int_0^x\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(u)\right)du\pm i\sin 2\int_0^x\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(u)\right)du\right),$$

то, выканаўшы лімітавы пераход у формуле (11) пры $z\to e^{ix}$, $|z|<1$, атрымаем

$$\varepsilon_{2n}(\alpha,x)=\frac{1}{\pi\lambda_{2n}(x)}\cdot\int_{-1}^{1}\lim_{z\to e^{ix},|z|<1}\left[(1-\xi^2)\chi_{2n}(\xi)\cdot z\left(\left(\frac{1}{(1-\xi z)^2}+\frac{1}{(\xi-z)^2}\right)\cos 2\int_0^x\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(u)\right)du+\right.\right.$$
$$\left.\left.+i\left(\frac{1}{(1-\xi z)^2}-\frac{1}{(\xi-z)^2}\right)\sin 2\int_0^x\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(u)\right)du\right)-2z\frac{(1-\xi^2)\left((z^2+1)(1+\xi^2)-4\xi z\right)}{\xi\left(\xi(z^2+1)-(1+\xi^2)z\right)^2}\right]d\xi.$$

Так як

$$\lim_{z\to e^{ix},\,|z|<1}\frac{(1+\xi^2)(z^2+1)-4\xi z}{(\xi(z^2+1)-z(1+\xi^2))^2}=\frac{2}{e^{ix}}\cdot\frac{\xi^2\cos x-2\xi+\cos x}{(\xi^2-2\xi\cos x+1)^2},$$
$$\lim_{z\to e^{ix},\,|z|<1}\left(\frac{1}{(1-\xi z)^2}+\frac{1}{(\xi-z)^2}\right)=\frac{2}{e^{ix}}\cdot\frac{\xi^2\cos x-2\xi+\cos x}{(\xi^2-2\xi\cos x+1)^2},$$
$$\lim_{z\to e^{ix},\,|z|<1}\left(\frac{1}{(1-\xi z)^2}-\frac{1}{(\xi-z)^2}\right)=\frac{2i}{e^{ix}}\cdot\frac{\sin x(1-\xi^2)}{(\xi^2-2\xi\cos x+1)^2},$$

то атрымаем у выніку формулу (5).

2. Ацэнкі набліжэнняў функцыі $|\sin x|$ рацыянальнымі аператарамі Феера.

Т э а р э м а 2. *Няхай зададзеныя лікі* α_k, $\alpha_k\in[0,1)$, $k=1,2,\ldots$, *такія, што шэраг* $\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|\alpha_k|)$ *разбягаецца. Тады праўдзіцца судачыненне*

$$\varepsilon_{2n}(\alpha,x)=\frac{4}{\pi\lambda_{2n}(x)}\left(1+\cos x\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right)+o\left(\frac{1}{\lambda_{2n}(x)}\right),\ n\to\infty,\quad x\in(-\pi,0)\bigcup(0,\pi). \tag{12}$$

Заўважым, што ўмова, якая накладваецца на шэраг, з’яўляецца неабходнай і дастатковай умовай поўнасці адпаведнай сістэмы рацыянальных функцый у прасторы C (гл. [8]).

Д о к а з. У выпадку, калі $x\in(-\pi,0)\bigcup(0,\pi)$, з формулы (5) тэарэмы 1 атрымаем

$$\varepsilon_{2n}(\alpha,x)=\frac{2}{\pi\lambda_{2n}(x)}\cdot\left(\int_{-1}^{1}\frac{(1-\xi^2)\chi_{2n}(\xi)}{(\xi^2-2\xi\cos x+1)^2}\cdot\left((\xi^2\cos x-2\xi+\cos x)\cos 2\int_0^x\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(u)\right)du-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sin x(1-\xi^2)\sin 2\int_0^x\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(u)\right)du\right)d\xi-\int_{-1}^{1}\frac{(1-\xi^2)(\xi^2\cos x-2\xi+\cos x)}{\xi(\xi^2-2\xi\cos x+1)^2}d\xi\right). \tag{13}$$

Заўважым, што

$$|a\cos\alpha+b\sin\alpha|\le\sqrt{a^2+b^2}.$$

Скарыстаўшыся гэтай формулай з роўнасці (13), атрымаем наступную ацэнку для першага інтэграла правай часткі:

$$\left|\int_{-1}^{1}\frac{(1-\xi^2)\chi_{2n}(\xi)}{(\xi^2-2\xi\cos x+1)^2}\left((\xi^2\cos x-2\xi+\cos x)\cos 2\int_0^x\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(u)\right)du-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sin x(1-\xi^2)\sin 2\int_0^x\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(u)\right)du\right)d\xi\right|\le\int_{-1}^{1}\frac{(1-\xi^2)\,|\,\chi_{2n}(\xi)\,|}{\xi^2-2\xi\cos x+1}d\xi. \tag{14}$$

Увядзём абазначэнне

$$I_{2n}=\int_{-1}^{1}\frac{(1-\xi^2)\,|\,\chi_{2n}(\xi)\,|}{\xi^2-2\xi\cos x+1}d\xi.$$

Заўважыўшы, што

$$\xi^2-2\xi\cos x+1\ge\sin^2 x,\ \ \xi\in[-1,1],$$

атрымаем

$$I_{2n}\le\frac{1}{\sin^2 x}\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)\,|\,\chi_{2n}(\xi)\,|\,d\xi=\frac{2}{\sin^2 x}\int_{0}^{1}(1-\xi^2)\,|\,\chi_{2n}(\xi)\,|\,d\xi=\frac{2}{\sin^2 x}I'_{2n}, \tag{15}$$

дзе

$$I'_{2n}=\int_0^1(1-\xi^2)\,|\,\chi_{2n}(\xi)\,|\,d\xi.$$

У інтэграле I'_{2n} выканаем замену

$$\xi=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$$

і знойдзем, што

$$I'_{2n}=2\int_0^1 t\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{\beta_k-t}{\beta_k+t}\right|\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\quad \beta_k=\frac{1-\alpha_k^2}{1+\alpha_k^2},\ k=1,2,\ldots,n.$$

Зададзім адвольны лік $\varepsilon\in(0,1)$.
Тады

$$I'_{2n}<2\int_0^{\varepsilon}t\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}+2\int_{\varepsilon}^{1}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{\beta_k-t}{\beta_k+t}\right|dt. \tag{16}$$

Будзем мець далей

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}=1-\sqrt{1-\varepsilon^2}=O(\varepsilon^2),\quad \varepsilon\to 0 \tag{17}$$

і

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{\beta_k-t}{\beta_k+t}\right|dt\le\max_{t\in[\varepsilon,1]}\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{\beta_k-t}{\beta_k+t}\right|. \tag{18}$$

Няцяжка праверыць, што, калі $\beta\le\varepsilon$, то

$$\left|\frac{\beta-t}{\beta+t}\right|\le\frac{1-\beta}{1+\beta}=1-\frac{2\beta}{1+\beta}<e^{-\frac{2\beta}{1+\beta}},\quad t\in[\varepsilon,1].$$

Калі ж $\beta>\varepsilon$, то

$$\left|\frac{\beta-t}{\beta+t}\right|\le\frac{\beta-\varepsilon}{\beta+\varepsilon}<e^{-\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}},\quad t\in[\varepsilon,1].$$

Такім чынам,

$$\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{\beta_k - t}{\beta_k + t}\right| \le \exp\left(-2\left(\sum_{k\in\Omega}\frac{\beta_k}{1+\beta_k} + (n-n^*)\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\right), \quad t\in[\varepsilon,1],$$

дзе $\Omega = \{k : k = 1,2,\ldots,n,\ \beta_k < \varepsilon\}$, n^* – колькасць нумароў у мностве Ω.

Адсюль з улікам формул (15)–(18) атрымаем

$$I_{2n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

пры ўмове, што шэраг

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\alpha_k|)$$

разбягаецца.

Вылічым зараз

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1-\xi^2)(\xi^2\cos x - 2\xi + \cos x)}{\xi(\xi^2 - 2\xi\cos x + 1)^2}d\xi. \tag{19}$$

Для гэтага падінтэгральную функцыю раскладзём на элементарныя дробы. Шуканае раскладанне мае выгляд

$$\frac{(1-\xi^2)(\xi^2\cos x - 2\xi + \cos x)}{\xi(\xi^2 - 2\xi\cos x + 1)^2} = \frac{\cos x}{\xi} + \frac{-2\cos x\cdot\xi + 2}{\xi^2 - 2\xi\cos x + 1} + \frac{4\cos x\sin^2 x\cdot\xi - 4\sin^2 x}{(\xi^2 - 2\xi\cos x + 1)^2}. \tag{20}$$

Знойдзем спачатку нявызначаны інтэграл

$$\int\frac{(1-\xi^2)(\xi^2\cos x - 2\xi + \cos x)}{\xi(\xi^2 - 2\xi\cos x + 1)^2}d\xi.$$

Згодна з формулай (20), пасля шэрагу вылічэнняў атрымаем

$$\int\frac{(1-\xi^2)(\xi^2\cos x - 2\xi + \cos x)}{\xi(\xi^2 - 2\xi\cos x + 1)^2}d\xi = \cos x\ln\left|\frac{\xi}{\xi^2 - 2\xi\cos x + 1}\right| - 2\sin^2 x\frac{\xi}{\xi^2 - 2\xi\cos x + 1}.$$

Нарэшце вылічым інтэграл (19), разумеючы яго ў сэнсе галоўнага значэння па Кашы

$$\begin{gathered}\mathrm{V.p.}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\xi^2)(\xi^2\cos x - 2\xi + \cos x)}{\xi(\xi^2 - 2\xi\cos x + 1)^2}d\xi = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{(1-\xi^2)(\xi^2\cos x - 2\xi + \cos x)}{\xi(\xi^2 - 2\xi\cos x + 1)^2}d\xi + \right.\\ \left. + \int_{\varepsilon}^{1}\frac{(1-\xi^2)(\xi^2\cos x - 2\xi + \cos x)}{\xi(\xi^2 - 2\xi\cos x + 1)^2}d\xi\right) = -2\cos x\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - 2.\end{gathered} \tag{21}$$

З формул (13), (21) цяпер вынікае, што ў выпадку, калі $x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$,

$$\varepsilon_{2n}(\alpha,x) = \frac{4}{\pi\lambda_{2n}(x)}\left(1+\cos x\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right) + o\left(\frac{1}{\lambda_{2n}(x)}\right),\ n\to\infty.$$

Т э а р э м а 3. *Калі $x = 0$ ці $x = \pi$, то праўдзяцца наступныя няроўнасці:*

$$\frac{4\ln\lambda_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi\lambda_{2n}(0)} < \varepsilon_{2n}(\alpha,x) \le \frac{4\left(1+\ln\left(\pi\lambda_{2n}(0)\right)\right)}{\lambda_{2n}(0)}. \tag{22}$$

Д о к а з. Будзем лічыць, напрыклад, што $x = 0$. Тады з формулы (6) маем

$$\varepsilon_{2n}(\alpha,0)=\frac{2}{\pi\lambda_{2n}(0)}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sin^2\frac{t}{2}}\sin^2\int_0^t\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(u)\right)du\,dt=$$
$$=\frac{4}{\pi\lambda_{2n}(0)}\int_0^{\pi}\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\sin^2\int_0^t\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(u)\right)du\,dt. \tag{23}$$

Разаб'ём інтэграл (23) на два, распаўсюджаных на прамежкі $[0,\delta_n]$ і $[\delta_n,\pi]$, дзе δ_n – некаторы лік, $0<\delta_n<\pi$. Атрымаем

$$\varepsilon_{2n}(\alpha,0)=\frac{4}{\pi\lambda_{2n}(0)}\left(I_1+I_2\right),$$

дзе

$$I_1=\int\limits_0^{\delta_n}\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\sin^2\int_0^t\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(u)\right)du\,dt,$$
$$I_2=\int\limits_{\delta_n}^{\pi}\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\sin^2\int_0^t\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(u)\right)du\,dt.$$

Ацэнім далей інтэгралы I_1, I_2 зверху. Выкарыстоўваючы няроўнасці

$$|\sin x|\le|x|,\quad x\in\mathbb{R}, \tag{24}$$
$$\sin x\ge\frac{2}{\pi}\cdot x,\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

атрымаем

$$I_1\le\int_0^{\delta_n}\frac{\pi}{t}\int_0^t\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(u)\right)du\,dt. \tag{25}$$

Заўважым цяпер, што

$$\lambda_{2n}(u)\le\lambda_{2n}(0),\quad u\in\mathbb{R}. \tag{26}$$

Таму

$$I_1\le\int_0^{\delta_n}\frac{\pi}{t}\int_0^t\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(0)\right)dudt=\int_0^{\delta_n}\frac{\pi}{t}t\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(0)\right)du\,dt=\pi\delta_n\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(0)\right). \tag{27}$$

Зоймемся інтэгралам I_2. Будзем мець

$$I_2\le\int_{\delta_n}^{\pi}\frac{\pi}{t}dt=\pi\ln\frac{\pi}{\delta_n}. \tag{28}$$

З няроўнасцей (27) і (28) вынікае, што

$$\varepsilon_{2n}(\alpha,0)\le\frac{4}{\pi\lambda_{2n}(0)}\left(\pi\delta_n\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(0)\right)+\pi\ln\frac{\pi}{\delta_n}\right)=4\left(\delta_n+\frac{1}{2\lambda_{2n}(0)}+\frac{\ln\frac{\pi}{\delta_n}}{\lambda_{2n}(0)}\right).$$

Абраўшы $\delta_n = \dfrac{1}{2\lambda_{2n}(0)}$, атрымаем наступную ацэнку:

$$\varepsilon_{2n}(\alpha,0) \le \frac{4\left(1+\ln\left(\pi\lambda_{2n}(0)\right)\right)}{\lambda_{2n}(0)}.$$

Ацэнім цяпер інтэграл (23) знізу. Разаб'ём яго на два, распаўсюджаных на прамежкі $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ і $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, і ў другім з атрыманых інтэгралаў зробім замену $s=\pi-t$. У выніку будзем мець

$$\varepsilon_{2n}(\alpha,0) = \frac{8}{\pi\lambda_{2n}(0)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin t}\sin^2\int_0^t\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(u)\right)du\,dt.$$

Выкарыстоўваючы няроўнасць (24), атрымаем

$$\varepsilon_{2n}(\alpha,0) \ge \frac{8}{\pi\lambda_{2n}(0)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{t}\sin^2\int_0^t\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(u)\right)du\,dt =$$

$$= \frac{8}{\pi\lambda_{2n}(0)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{t\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(t)\right)}\sin^2\int_0^t\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(u)\right)du\cdot\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(t)\right)dt.$$

Адзначым, што

$$\int_0^t\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(u)\right)du \ge \int_0^t\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(t)\right)du = t\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(t)\right).$$

І таму

$$\varepsilon_{2n}(\alpha,0) \ge \frac{8}{\pi\lambda_{2n}(0)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\int_0^t\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(u)\right)du}\sin^2\int_0^t\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(u)\right)du\cdot\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(t)\right)dt.$$

У апошнім інтэграле выканаем замену

$$z = \int_0^t\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(u)\right)du.$$

Так як пры такой замене $dz = \left(\dfrac{1}{2}+\lambda_{2n}(t)\right)dt$, то

$$\varepsilon_{2n}(\alpha,0) \ge \frac{8}{\pi\lambda_{2n}(0)}\int_0^A\frac{\sin^2 z}{z}dz, \tag{29}$$

дзе

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}(u)\right)du.$$

Паколькі

$$\lambda_{2n}(u) = \sum_{k=1}^n\frac{1-\alpha_k^4}{(1+\alpha_k^2)^2-4\alpha_k^2\cos^2 u} \ge \lambda_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right),\quad u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

будзем мець

$$A \ge \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

і таму

$$\int_0^A\frac{\sin^2 z}{z}dz \ge \int_0^{\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\lambda_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}\frac{\sin^2 z}{z}dz \ge I, \tag{30}$$

дзе

$$I = \int_0^N \frac{\sin^2 z}{z} dz, \quad N = \left[\frac{1}{2} + \lambda_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right].$$

Цяпер разаб'ём інтэграл I на інтэгралы, распаўсюджаныя на адрэзкі $\left[\frac{\pi(k-1)}{2}, \frac{\pi k}{2}\right]$, $k = 1, 2, \ldots, N$:

$$I = \sum_{k=1}^{N} \int_{\frac{\pi(k-1)}{2}}^{\frac{\pi k}{2}} \frac{\sin^2 z}{z} dz \geq \sum_{k=1}^{N} \frac{2}{\pi k} \int_{\frac{\pi(k-1)}{2}}^{\frac{\pi k}{2}} \sin^2 z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}\left(\ln N + C\right),$$

дзе C – пастаянная Эйлера.

Адсюль і з няроўнасцей (29), (30) вынікае, што

$$\varepsilon_{2n}(\alpha, 0) \geq \frac{4(\ln N + C)}{\pi \lambda_{2n}(0)} > \frac{4 \ln \lambda_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi \lambda_{2n}(0)}.$$

Выпадак, калі $x = \pi$, разглядаецца аналагічна.

Заключэнне. Ацэнка (12) тэарэмы 2 сведчыць, што набліжэнне функцыі $f(x) = |\sin x|$ з дапамогай аператараў Феера $\Phi_{2n}(x, f)$ з фіксаванымі рэчаіснымі параметрамі α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ з'яўляецца велічынёй парадку $O\left(\frac{1}{n}\right)$ у кожным пункце $x \in (-\pi, 0) \bigcup (0, \pi)$. Гэты вынік прадказальны і ўзгадняецца з аналагічным вынікам у палінаміяльным выпадку. Вынік тэарэмы 3 таксама прадказальны, калі лічыць параметры α_k, $k = 1, 2, ..., n$ фіксаванымі.

Зусім іншая сітуацыя складваецца, калі параметры α_k, $k = 1, 2, ..., n$ лічыць свабоднымі. Калі, напрыклад, у тэарэме 3 выбраць, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$, $\alpha_n = 1 - \frac{1}{n \ln n}$, то атрымаем, што $\varepsilon_{2n}(\alpha, 0) = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$, г. зн. тут няма таго эфекту, які назіраецца ў палінаміяльным выпадку, дзе сярэднія Феера набліжаюць гэту функцыю як $O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$, $n \to \infty$.

Такім чынам, у рацыянальным выпадку з дапамогай аператараў Феера можна наблізіць функцыю $|\sin x|$ у кожным пункце $x \in \mathbb{R}$ з хібнасцю $O\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$ пры пэўным выбары рэчаісных параметраў α_1, α_2, … α_n. Застаецца адкрытым пытанне, ці магчыма забяспечыць раўнамерную ацэнку на $\mathbb{R}$ больш высокага парадку, чым у палінаміяльным выпадку, адпаведным выбарам вышэйуказаных параметраў.

Падзякі. Работа выканана ў рамках навукова-даследчай работы «Рацыянальная апраксімацыя функцый і яе прымяненне ў лікавым аналізе мадэляў» (2016–2020 гг., № ГР 20162269) пры выкананні Дзяржаўнай праграмы навуковых даследаванняў «Канвергенцыя 2020» (падпраграма «Метады матэматычнага мадэлявання складаных сістэм»).

Acknowledgments. This work was done as part of the research work "Rational approximation of functions and their application in numerical analysis of models" (2016–2020, No. ГР. 20162269) being carried out according to the State Research Program "Convergence 2020" (subprogram "Methods for Mathematical Modeling of Complex Systems".

Спіс выкарыстаных крыніц

1. Джрбашян, М. М. К теории рядов Фурье по рациональным функциям / М. М. Джрбашян // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1956. – Т. 9, № 7. – С. 3–28.

2. Русак, В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения / В. Н. Русак. – Минск: Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1979. – 176 с.

3. Petrushev, P. P. Rational approximation of real functions / P. P. Petrushev, V. A. Popov. – Cambridge University Press, 1987. – 384 p.

4. Ровба, Е. А. Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации / Е. А. Ровба. – Гродно: ГрГУ, 2001. – 106 с.

5. Ровба, Е. А. О приближении функции $|\sin x|$ рациональными рядами Фурье / Е. А. Ровба // Мат. заметки. – 1989. – Т. 46. – С. 52–59.

6. Микулич, Е. Г. Точные оценки равномерных приближений функции $|\sin x|$ частными суммами рядов Фурье по рациональным функциям / Е. Г. Микулич // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2011. – № 1. – С. 84–90.

7. Русак, В. Н. О приближении рациональными дробями / В. Н. Русак // Докл. АН БССР. – 1964. – Т. 8, № 7. – С. 432–435.

8. Ахиезер, Н. И. Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. – М.: Наука, 1965. – 408 с.

References

1. Dzhrbashian M. M. To Fourier series theory about rational functions. *Izvestiya Akademii Nauk Armyanskoi SSR. Ser. fiziko-matematicheskikh nauk* [*Procedings of the Academy of Sciences of the Armenian SSR. Series of physical and mathematical sciences*], 1956, vol. 9, no.7, pp. 3–28 (in Russian).

2. Rusak V. N. *Rational functions as approximation apparatus*. Minsk, 1979, 176 p. (in Russian).

3. Petrushev P. P., Popov V. A. *Rational approximation of real functions*. Cambridge University Press, 1987, 384 p. Doi: 10.1017/cbo9781107340756

4. Rovba E. A. I*nterpolation and Fourier series in rational approximation*. Grodno, Grodno State University, 2001, 106 p. (in Russian).

5. Rovba E. A. An approximation of $|\sin x|$ by rational Fourier series. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1989, vol. 46, no. 4, pp. 788–794. Doi: 10.1007/bf01158146

6. Mikulich E. G. Sharp estimates for uniform approximation of $|\sin x|$ by partial sums of Fourier series about rational functions. *Vestnik BGU. Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika = Vestnik BSU. Series 1: Physics. Mathematics. Informatics*, 2011, no. 1, pp. 84–90 (in Russian).

7. Rusak V. N. An approximation by rational fractions. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Doklady of the Academy of Sciences of the BSSR], 1964, vol. 8, no. 7, pp. 432–435 (in Russian).

8. Akhiezer N. I. *Lectures on the theory of approximation*. Moscow, Nauka Publ., 1965, 408 p. (in Russian).

Информация об авторах

Ровба Евгений Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики факультета математики и информатики, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: rovba.ea@gmail.com

Козловская Наталья Юрьевна – студентка 5-го курса, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: Kozlowskaya_Natalya@tut.by

Information about the authors

Yauhen A. Rouba – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Faculty of Mathematics and Informatics, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Azheshki Str., 230023, Grodna, Republic of Belarus). E-mail: rovba.ea@gmail.com

Natallia Y. Kazlouskaya – 5th year student, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Azheshki Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: Kozlowskaya_Natalya @tut.by