ISSN 1561-2430 (print)
УДК 517.925.42

Поступила в редакцию 13.08.2017
Received 13.08.2017

**А. В. Кузьмич, А. А. Гринь**

*Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь*

# ВЫДЕЛЕНИЕ СИСТЕМ С ВОЗМУЩЕННЫМ ЛИНЕЙНЫМ ЦЕНТРОМ, ИМЕЮЩИХ НЕ БОЛЕЕ ОДНОГО ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА

**Аннотация.** Рассматривается задача выделения систем с возмущенным линейным центром специального вида, имеющих не более одного предельного цикла во всей фазовой плоскости при всех действительных значениях параметра возмущения μ. Для решения поставленной задачи предлагается способ построения функций Дюлака – Черкаса в виде полинома второй степени относительно фазовой переменной *y*, коэффициенты которого гладко зависят от второй фазовой переменной *x* и непрерывно – от параметра μ. Построение функции Дюлака – Черкаса основано на редукции вспомогательного полинома Φ(*x*,*y*,μ) к функции $\Phi_0(x,\mu)$, зависящей только от переменной *x* и параметра μ. Предложен регулярный способ такой редукции. Представлены примеры выделенных систем, которые имеют единственный предельный цикл во всей фазовой плоскости.

**Ключевые слова:** возмущенный линейный центр, обобщенная система Куклеса, предельный цикл, 16-я проблема Д. Гильберта, функция Дюлака – Черкаса, бифуркация

**Для цитирования.** Кузьмич, А. В. Выделение систем с возмущенным линейным центром, имеющих не более одного предельного цикла / А. В. Кузьмич, А. А. Гринь // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 3. – С. 40–48.

**A. V. Kuzmich, A. A. Hryn**

*Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus*

## CONSTRUCTION OF THE SYSTEMS WITH A PERTURBED LINEAR CENTER HAVING NO MORE THAN ONE LIMIT CYCLE

**Abstract.** The problem under our consideration is to construct systems with a perturbed linear center of special form that have no more than one limit cycle in the entire phase plane for all real values of the perturbation parameter μ. To solve this problem, we have proposed a method for constructing a Dulac – Cherkas function as a second-degree polynomial with respect to a phase variable *y*, whose coefficients smoothly depend on the second-phase variable *x* and continuously depend on the parameter μ. The construction of the Dulac – Cherkas function is based on reducing the auxiliary polynomial Φ(*x*,*y*,μ) to the function $\Phi_0(x,\mu)$ depending only on the variable *x* and the parameter μ. A regular method for such reduction is proposed. Examples of the constructed systems having a unique limit cycle in the entire phase plane are presented.

**Keywords:** perturbed linear center, generalized Kukles system, limit cycle, 16th Hilbert problem, Dulac – Cherkas function, bifurcation

**For citation**. Kuzmich A. V., Hryn A. A. Construction of the systems with a perturbed linear center having no more than one limit cycle. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2017, no. 3, pp. 40–48 (in Russian).

**Введение.** Рассмотрим автономную дифференциальную систему на плоскости, зависящую от действительного параметра μ:

$$\frac{dx}{dt} = y \equiv P(x,y),\ \frac{dy}{dt} = -x + \mu \sum_{j=0}^{n} h_j(x,\mu) y^j \equiv Q(x,y,\mu),\ X = (P,Q), \tag{1}$$

где функции $h_j(x,\mu): R \times R \to R, j = 0,...,n,$ непрерывны по двум переменным и непрерывно дифференцируемы по первой переменной. При μ = 0 система (1) имеет центр в начале координат и представляет собой линейную систему с первым интегралом $H(x,y) \equiv x^2 + y^2 = c^2 > 0,$ где $c$ – произвольное действительное число. В системах (1) из некоторых окружностей $x^2 + y^2 = c_i^2$ могут рождаться предельные циклы, наличие которых существующие методы позволяют доказывать лишь для значений μ, достаточно мало отличающихся от нуля, когда система (1) является близкой к линейной [1]. В этом случае для изучения предельных циклов обычно применяются интеграл Понтрягина, интеграл Пуанкаре – Мельникова, интеграл Абеля, интегрирующий множитель, методы дифференциальных форм и теории усреднения. В случае $n = 3$, когда функция $Q(x,y,\mu)$ является кубическим полиномом относительно фазовых переменных $x$ и $y$, система (1) представляет собой систему Куклеса [2, 3]. Для нее с помощью вышеуказанных методов получено много интересных результатов по предельным циклам [4], которые, как правило, справедливы не для всей фазовой плоскости. Поэтому актуальной является задача получения нелокальной оценки числа и локализации предельных циклов, которая была бы справедливой для всей фазовой плоскости системы (1) при всех ненулевых значениях $\mu \in I \subseteq R.$ Одним из методов, позволяющих получить решение такой задачи для многих систем, является обобщенный подход Л. А. Черкаса [5–9] к признаку Дюлака, основанный на нахождении в области $\Omega \subseteq R^2$ функции Дюлака – Черкаса $\Psi(x,y,\mu) \in C^1(\Omega, R),$ которая удовлетворяет соотношению

$$\Phi(x,y,\mu) \equiv k\Psi \ \mathrm{div}\, X + \frac{\partial \Psi}{\partial x} P + \frac{\partial \Psi}{\partial y} Q > 0 \ \ (<0), \ \forall (x,y) \in \Omega, \ \forall \mu \in I \setminus \{0\}. \tag{2}$$

В работах [10, 11] с помощью нахождения функции Ψ эффективно решалась задача выделения классов систем вида (1) в случаях $n = 3$ и $n = 5$, имеющих не более одного предельного цикла во всей фазовой плоскости при всех действительных значениях $\mu \neq 0$. Ключевая идея нахождения функции Дюлака – Черкаса основана на редукции условия (2) для вспомогательной функции $\Phi(x,y,\mu)$ в виде полинома по $y$ к знакопостоянству одной или нескольких функций, зависящих только от фазовой переменной $x$ и параметра μ.

Целью настоящей работы является разработка подхода для выделения систем вида (1), имеющих не более одного предельного цикла во всей фазовой плоскости при всех ненулевых вещественных значениях параметра μ. Для достижения этого создан способ построения функции Ψ в виде полинома второй степени относительно переменной $y$, основанный на редукции полинома $\Phi(x,y,\mu)$ при произвольном натуральном $n \geq 3$ к одной функции $\Phi_0(x,\mu)$, зависящей только от переменной $x$ и параметра μ.

**1. Предварительные сведения.** При существовании у системы (1) функции Дюлака – Черкаса Ψ в области Ω оценка числа и локализация предельных циклов в ней проводится с помощью кривой

$$W = \{(x,y) \in \Omega : \Psi(x,y) = 0\},$$

которую предельные циклы не могут пересекать, на основе следующих результатов [12, с. 204].

Т е о р е м а 1. *Пусть Ψ является функцией Дюлака – Черкаса системы* (1) *в p-связной области Ω, где кривая W состоит из s овалов. Тогда система* (1) *имеет не более* $p - 1 + s$ *предельных циклов, целиком расположенных в области Ω. Если предельные циклы существуют, то они все являются грубыми.*

З а м е ч а н и е 1. Условие (2) может быть ослаблено, предполагая, что функция Φ может принимать нулевое значение в области Ω на множестве меры нуль, и никакая замкнутая кривая этого множества не является предельным циклом системы (1).

З а м е ч а н и е 2. Пусть Ψ – функция Дюлака – Черкаса системы (1) в области Ω. Тогда любой предельный цикл Γ системы (1), расположенный в Ω, будет устойчивым (неустойчивым), если на нем выражение $k\Phi\Psi$ имеет отрицательный (положительный) знак.

Для доказательства существования предельного цикла у системы (1) при малых значениях $|\mu| \neq 0$ будем применять метод Понтрягина [2, с. 421], изложенный в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а 2. *Если при переходе от системы*

$$\frac{dx}{dt} = -y, \ \frac{dy}{dt} = x \tag{3}$$

*к достаточно близкой возмущенной системе*

$$\frac{dx}{dt} = -y + \mu p(x, y, \mu), \ \frac{dy}{dt} = x + \mu q(x, y, \mu) \tag{4}$$

*в полярных координатах* $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ *уравнение*

$$\int_0^{2\pi} \left[ p(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cos\varphi + q(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sin\varphi \right] d\varphi = 0 \tag{5}$$

*имеет единственный положительный действительный корень* $r_1$, *удовлетворяющий условию*

$$\int_0^{2\pi} \left[ p_x'(r_1\cos\varphi, r_1\sin\varphi) + q_y'(r_1\cos\varphi, r_1\sin\varphi) \right] d\varphi \neq 0, \tag{6}$$

*то из замкнутой траектории* $r = r_1$ *системы* (3) *в достаточно малой окрестности этой окружности рождается, и притом единственный, предельный цикл системы* (4).

**2. Способ построения функции Дюлака – Черкаса.** В дальнейшем будем считать, что Ω – односвязная область, содержащая начало координат. Тогда при построении функции Дюлака – Черкаса Ψ число овалов кривой $W$ будет задавать верхнюю границу для числа предельных циклов системы (1) в области Ω [10, 13].

Учитывая, что правые части системы (1) являются полиномами по переменной $y$, естественно строить функцию Дюлака – Черкаса Ψ в виде полинома

$$\Psi(x, y, \mu) = \sum_{w=0}^{l} \Psi_w(x, \mu) y^w. \tag{7}$$

Тогда после подстановки правых частей системы (1) и полинома (7) в соотношение (2) получим

$$\begin{gathered} \Phi(x, y, \mu) \equiv \left( \Psi_0'(x, \mu) + \Psi_1'(x, \mu) y + \ldots + \Psi_l'(x, \mu) y^l \right) y + \\ + \left( \Psi_1(x, \mu) + 2\Psi_2(x, \mu) y + \ldots + l\Psi_l(x, \mu) y^{l-1} \right) \times \left( -x + \mu \sum_{j=0}^{n} h_j(x, \mu) y^j \right) + \\ + k\mu \left( \Psi_0(x, \mu) + \Psi_1(x, \mu) y + \ldots + \Psi_l(x, \mu) y^l \right) \times \left( \sum_{j=1}^{n} j h_j(x, \mu) y^{j-1} \right). \end{gathered} \tag{8}$$

Функцию $\Phi(x,y,\mu)$ из (8) после группировки по переменной $y$ запишем в виде

$$\Phi(x, y, \mu) = \sum_{i=0}^{m} \Phi_i(x, \mu) y^i, \tag{9}$$

где коэффициентные функции $\Phi_i(x,\mu)$ зависят от неизвестных функций $h_0(x, \mu), \ldots, h_n(x, \mu)$, от функций $\Psi_0(x, \mu), \ldots, \Psi_l(x, \mu)$, их первых производных и от числа $k$. Если функции $h_n(x, \mu), \Psi_l(x, \mu)$ не обращаются тождественно в нуль при $x \in R$, $\mu \in I$, то степени $n$ и $m$ соответственно полиномов $Q(x,y,\mu)$ и $\Phi(x,y,\mu)$ связаны следующим условием:

$$m = \max\{l + 1, l + n - 1\}.$$

Для сведения функции (8) к виду $\Phi_0(x,\mu)$ потребуем выполнения тождеств

$$\Phi_i(x, \mu) \equiv 0, \ \ i = 1, \ldots, m. \tag{10}$$

Из соотношения (8) вытекает, что в случаях $l = 1$ и $l = 2$ тождества (10) представляют собой систему $n$ и $n + 1$ линейных алгебраических уравнений соответственно, из которых необходимо найти $n - 1$ и $n$ неизвестных в виде функций $h_j(x,\mu)$ и числа $k$. В случае $l = 1$ кривая $W$ не может содержать овалов, а следовательно, в соответствии с теоремой 1 система (1) не может иметь предельных циклов в односвязной области Ω. Поэтому рассмотрим случай $l = 2$, когда кривая $W$ может состоять из единственного овала, а знакоопределенность полинома $\Phi(x,y,\mu)$ доказывается за счет его редукции к виду $\Phi(x,y,\mu) = \Phi_0(x,\mu)$. Функцию $\Psi(x,y,\mu)$ будем находить в виде

$$\Psi(x,y,\mu) = \Psi_0(x,\mu) + \Psi_1(x,\mu)y + \Psi_2(x,\mu)y^2. \tag{11}$$

Тогда коэффициентные функции $\Phi_j(x,\mu)$ выражения (9) запишутся следующим образом:

$$\begin{gathered}
\Phi_{n+1}(x,\mu) = (2+kn)\mu h_n(x,\mu)\Psi_2(x,\mu),\\
\Phi_n(x,\mu) = (2+k(n-1))\mu h_{n-1}(x,\mu)\Psi_2(x,\mu) + (1+kn)\mu h_n(x,\mu)\Psi_1(x,\mu),\\
\cdots\cdots\cdots\\
\Phi_i(x,\mu) = (2+k(i-1))\mu h_{i-1}(x,\mu)\Psi_2(x,\mu) + (1+ki)\mu h_i(x,\mu)\Psi_1(x,\mu) +\\
+(i+1)k\mu h_{i+1}(x,\mu)\Psi_0(x,\mu),\ i = 4,\ldots,n-1,\\
\cdots\cdots\cdots\\
\Phi_3(x,\mu) = \Psi_2'(x,\mu) + (2+2k)\mu h_2(x,\mu)\Psi_2(x,\mu) + (1+3k)\mu h_3(x,\mu)\Psi_1(x,\mu) +\\
+4k\mu h_4(x,\mu)\Psi_0(x,\mu),\\
\Phi_2(x,\mu) = \Psi_1'(x,\mu) + (2+k)\mu h_1(x,\mu)\Psi_2(x,\mu) + (1+2k)\mu h_2(x,\mu)\Psi_1(x,\mu) +\\
+3k\mu h_3(x,\mu)\Psi_0(x,\mu),\\
\Phi_1(x,\mu) = \Psi_0'(x,\mu) + 2\mu h_0(x,\mu)\Psi_2(x,\mu) + (1+k)\mu h_1(x,\mu)\Psi_1(x,\mu) +\\
+2k\mu h_2(x,\mu)\Psi_0(x,\mu) - 2x\Psi_2(x,\mu).
\end{gathered} \tag{12}$$

При этом функция $\Phi_0$ записывается в виде

$$\Phi_0(x,\mu) = k\mu\Psi_0(x,\mu)h_1(x,\mu) + \mu\Psi_1(x,\mu)h_0(x,\mu) - x\Psi_1(x,\mu). \tag{13}$$

Далее, для достижения условия (2) на множестве $\Omega \times I$ с учетом замечания 1, как и в работе [13], используем структурную зависимость коэффициентных функций $\Phi_i(x,\mu)$ от функций $h_j(x,\mu), \Psi_j(x,\mu), \Psi'_j(x,\mu)$. Из тождеств $\Phi_{n+1} \equiv 0,\ \Phi_n \equiv 0,\ \ldots,\ \Phi_1 \equiv 0$ последовательно получаем

$$\begin{gathered}
k = -\frac{2}{n}, \quad h_{n-1}(x,\mu) = \frac{n\Psi_1(x,\mu)h_n(x,\mu)}{\Psi_2(x,\mu)(2n-2)},\\
\cdots\cdots\cdots\\
h_{i-1}(x,\mu) = \frac{2(i+1)\Psi_0(x,\mu)h_{i+1}(x,\mu) - \Psi_1(x,\mu)h_i(x,\mu)(n-2i)}{\Psi_2(x,\mu)(2n-2(i-1))},\ i = 4,\ldots,n-1,\\
\cdots\cdots\cdots\\
h_2(x,\mu) = \frac{8\mu h_4(x,\mu)\Psi_0(x,\mu) - \mu h_3(x,\mu)\Psi_1(x,\mu)(n-6) - n\Psi_2'(x,\mu)}{\mu\Psi_2(x,\mu)(2n-4)},\\
h_1(x,\mu) = \frac{6\mu h_3(x,\mu)\Psi_0(x,\mu) - \mu h_2(x,\mu)\Psi_1(x,\mu)(n-4) - n\Psi_1'(x,\mu)}{\mu\Psi_2(x,\mu)(2n-2)},\\
h_0(x,\mu) = \frac{4\mu h_2(x,\mu)\Psi_0(x,\mu) - \mu h_1(x,\mu)\Psi_1(x,\mu)(n-2) - n\Psi'_0(x,\mu) + 2nx\Psi_2(x,\mu)}{2n\mu\Psi_2(x,\mu)}.
\end{gathered} \tag{14}$$

Таким образом, доказана

Т е о р е м а 3. *Многочлен* $\Phi(x,y,\mu)$ *из соотношения* (8) *для системы* (1) *при любых числах* $n \in N,\ \mu \neq 0$ *и при произвольной функции* $\Psi$ *вида* (11), *где* $\Psi_2(x,\mu) \neq 0,$ *всегда можно привести к виду* $\Phi(x,y,\mu) = \Phi_0(x,\mu).$

После подстановки выражений (14) в соотношение (13) получившаяся функция $\Phi_0(x,\mu)$ будет зависеть от функций $\Psi_0(x,\mu), \Psi_1(x,\mu), \Psi_2(x,\mu), h_n(x,\mu)$, и за счет подходящего выбора этих функций всегда можно добиться знакопостоянства функции $\Phi_0(x,\mu)$ при $x \in R$ и $0 \neq \mu \in I$.

**3. Выделение систем (1), имеющих не более одного предельного цикла.** Рассмотрим случай $n = 7$, т. е. систему (1) будем строить в виде

$$\frac{dx}{dt} = y, \ \frac{dy}{dt} = -x + \mu \sum_{j=0}^{7} h_j(x,\mu) y^j. \tag{15}$$

Тогда соответствующий полином (9) принимает вид

$$\Phi(x,y,\mu) = \sum_{i=0}^{8} \Phi_i(x,\mu) y^i,$$

где

$$\begin{gathered}
\Phi_8(x,\mu) = (2+7k)\mu h_7(x,\mu)\Psi_2(x,\mu), \\
\Phi_7(x,\mu) = (2+6k)\mu h_6(x,\mu)\Psi_2(x,\mu) + (1+7k)\mu h_7(x,\mu)\Psi_1(x,\mu), \\
\Phi_6(x,\mu) = (2+5k)\mu h_5(x,\mu)\Psi_2(x,\mu) + (1+6k)\mu h_6(x,\mu)\Psi_1(x,\mu) + \\
+7k\mu h_7(x,\mu)\Psi_0(x,\mu), \\
\Phi_5(x,\mu) = (2+4k)\mu h_4(x,\mu)\Psi_2(x,\mu) + (1+5k)\mu h_5(x,\mu)\Psi_1(x,\mu) + \\
+6k\mu h_6(x,\mu)\Psi_0(x,\mu), \\
\Phi_4(x,\mu) = (2+3k)\mu h_3(x,\mu)\Psi_2(x,\mu) + (1+4k)\mu h_4(x,\mu)\Psi_1(x,\mu) + \\
+5k\mu h_5(x,\mu)\Psi_0(x,\mu), \\
\Phi_3(x,\mu) = \Psi'_2(x,\mu) + (2+2k)\mu h_2(x,\mu)\Psi_2(x,\mu) + (1+3k)\mu h_3(x,\mu)\Psi_1(x,\mu) + \\
+4k\mu h_4(x,\mu)\Psi_0(x,\mu), \\
\Phi_2(x,\mu) = \Psi'_1(x,\mu) + (1+2k)\mu h_2(x,\mu)\Psi_1(x,\mu) + (2+k)\mu h_1(x,\mu)\Psi_2(x,\mu) + \\
+3k\mu h_3(x,\mu)\Psi_0(x,\mu), \\
\Phi_1(x,\mu) = \Psi'_0(x,\mu) + 2k\mu h_2(x,\mu)\Psi_0(x,\mu) + (1+k)\mu h_1(x,\mu)\Psi_1(x,\mu) + \\
+2\mu h_0(x,\mu)\Psi_2(x,\mu) - 2x\Psi_2(x,\mu).
\end{gathered} \tag{16}$$

Чтобы иметь возможность для существования предельного цикла у системы (15), функцию $\Psi$ рассмотрим в виде

$$\Psi(x,y,\mu) = ax^2 + ay^2 - c, \quad a, c \in R^+. \tag{17}$$

Тогда с учетом соотношений $\Psi_0(x,\mu) \equiv ax^2 - c, \Psi_1(x,\mu) \equiv 0, \Psi_2(x,\mu) \equiv a$, а также выражений (16) из тождеств $\Phi_8 \equiv 0, \ldots, \Phi_1 \equiv 0$ в соответствии с (14) последовательно находим

$$\begin{gathered}
k = -\frac{2}{7}, \\
h_6(x,\mu) = 0, \\
h_5(x,\mu) = \frac{7}{2a}(ax^2 - c) h_7(x,\mu), \\
h_4(x,\mu) = 0, \\
h_3(x,\mu) = \frac{35}{8a^2}(ax^2 - c)^2 h_7(x,\mu), \\
h_2(x,\mu) = 0, \\
h_1(x,\mu) = \frac{35}{16a^3}(ax^2 - c)^3 h_7(x,\mu), \\
h_0(x,\mu) = 0.
\end{gathered} \tag{18}$$

Для функции Φ получаем выражение

$$\Phi_0(x,\mu) = -\frac{5}{8a^3}\mu(ax^2-c)^4 h_7(x,\mu).$$

Отсюда заключаем, что если функция $h_7(x,\mu)$ является знакопостоянной для всех $x\in R$ и $\mu\neq 0$, то справедливо условие $\Phi_0(x,\mu)\geq 0$ $(\leq 0)$ и полином Ψ вида (17) в соответствии с замечанием 1 является функцией Дюлака – Черкаса системы (15) при выполнении соотношений (18). Таким образом, имеет место

Т е о р е м а 4. *Система*

$$\frac{dx}{dt}=y,\ \frac{dy}{dt}=-x+\mu h_7(x,\mu)\left(\frac{35}{16a^3}(ax^2-c)^3y+\frac{35}{8a^2}(ax^2-c)^2y^3+\frac{7}{2a}(ax^2-c)y^5+y^7\right) \quad (19)$$

*при выполнении условия* (17) *и знакопостоянстве функции* $h_7(x,\mu)$ *для всех действительных значений параметра* μ *имеет не более одного предельного цикла во всей фазовой плоскости. Если предельный цикл существует, то он является устойчивым (неустойчивым) при* $\Phi_0>0$ $(\Phi_0<0)$.

Теперь с помощью теоремы 2 докажем существование единственного предельного цикла для системы (19) при $h_7(x,\mu)\equiv 1$. Рассматривая функции

$$p(x,y)=0,\ q(x,y)=\frac{35}{16a^3}(ax^2-c)^3y+\frac{35}{8a^2}(ax^2-c)^2y^3+\frac{7}{2a}(ax^2-c)y^5+y^7,$$

уравнение (5) запишем в виде

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\Bigg(&-\frac{35}{16a^2}c^2r\sin^2\varphi+\frac{105}{16a^2}c^2r^5\cos^2\varphi\sin^2\varphi-\frac{105}{16a}cr^5\cos^4\varphi\sin^2\varphi+\\&+\frac{35}{16}r^7\cos^6\varphi\sin^2\varphi+\frac{35}{8a^2}c^2r^2\sin^3\varphi-\frac{35}{4a}cr^4\cos^2\varphi\sin^3\varphi+\\&+\frac{35}{8}r^6\cos^4\varphi\sin^3\varphi-\frac{7}{2a}cr^5\sin^6\varphi+\frac{7}{2}r^7\cos^2\varphi\sin^6\varphi+r^7\sin^8\varphi\Bigg)d\varphi=\\&=\frac{35\pi r}{1024a^3}(29a^3r^6-88a^2cr^4+48ac^2r^2-64c^3)=0\end{aligned} \quad (20)$$

и условие (6) представим следующим образом:

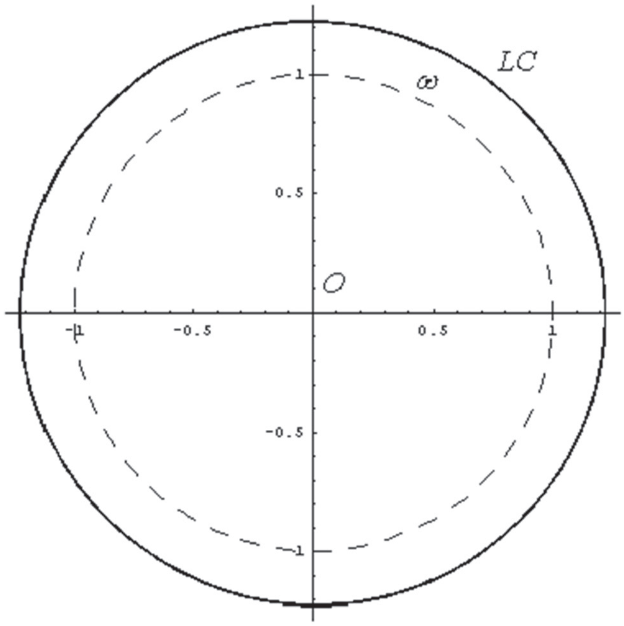
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\Bigg(&-\frac{35c^3}{16a^3}+\frac{105c^2}{16a^2}r^2\cos^2\varphi-\frac{105c}{16a}r^4\cos^4\varphi+\frac{35}{16}r^6\cos^6\varphi+\frac{35c^2}{4a^2}r\sin\varphi-\\&-\frac{35c}{2a}r^3\cos^2\varphi\sin\varphi+\frac{35}{4}r^5\cos^4\varphi\sin\varphi-\frac{35c}{2a}r^4\sin^4\varphi+\frac{35}{2}r^6\cos^2\varphi\sin^4\varphi+7r^6\sin^6\varphi\Bigg)d\varphi=\\&=\frac{35\pi}{128a^3}(29a^3r^6-66a^2cr^4+24ac^2r^2-16c^3)\neq 0.\end{aligned} \quad (21)$$

Уравнение (20) имеет единственный положительный корень

$$r_1\approx\sqrt{\frac{88c}{77a}+\frac{892c\sqrt[3]{2}}{87a\sqrt[3]{26777+87\sqrt{88869}}}+\frac{2c\sqrt[3]{4(26777+87\sqrt{88869})}}{87a}},$$

который удовлетворяет неравенству (21). Таким образом, доказана

Т е о р е м а 5. *Система* (19) *при* $h_7(x,\mu)\equiv 1$, $a,c\in R^+$ *и достаточно малых значениях* $|\mu|\neq 0$ *имеет единственный предельный цикл в фазовой плоскости, который является грубым и стремится к окружности с центром в начале координат радиуса* $r_1$, *когда* μ *стремится к нулю.*




Расположение предельного цикла LC и овала кривой $W$ для системы (19) при $h_7(x,\mu)\equiv 1,\ \mu=0{,}1,\ a=1,\ c=1$

Localization of the limit cycle (LC) and the oval of the curve $W$ for system (19) where $h_7(x,\mu)\equiv 1,\ \mu=0.1,\ a=1,\ c=1$

В частном случае для $c$ = 1 и $a$ = 1 получено $r_1 \approx 1{,}65054$ при $\mu$ = 0,1. Предельный цикл LC системы (19) и овал ω кривой $W$ изображены на рисунке соответственно сплошной и пунктирной линиями.

Аналогично с помощью разработанного способа в случае $n$ = 9 доказана

Т е о р е м а 6. *Система*

$$\frac{dx}{dt}=y,\ \frac{dy}{dt}=-x+\mu\left(\frac{315(ax^2-c)^5}{128a^4}y+\frac{105(ax^2-c)^4}{16a^3}y^3+\frac{63(ax^2-c)^3}{8a^2}y^5+\right.$$
$$\left.+\frac{9(ax^2-c)^2}{2a}y^7+(ax^2-c)y^9\right) \tag{22}$$

*при всех действительных значениях параметра* $\mu$ *имеет не более одного предельного цикла во всей фазовой плоскости. Если предельный цикл существует, то он является устойчивым (неустойчивым) при* $\mu < 0$ ($\mu > 0$).

Для системы (22) функция Дюлака – Черкаса рассматривалась в виде (17), а соответствующая функция $\Phi_0(x,\mu)$ записывается следующим образом:

$$\Phi_0(x,\mu)=-\frac{35}{64}\mu(ax^2-c)^6. \tag{23}$$

Очевидно, что условие $\Phi_0(x,\mu)\le 0\ (\ge 0)$ будет справедливым при $\mu>0\ (<0)$.

Единственность предельного цикла в конкретных случаях системы (22) доказывается методом Понтрягина, где

$$p(x,y)=0,\ q(x,y)=\frac{315(ax^2-c)^5}{128a^4}y+\frac{105(ax^2-c)^4}{16a^3}y^3+\frac{63(ax^2-c)^3}{8a^2}y^5+$$
$$+\frac{9(ax^2-c)^2}{2a}y^7+(ax^2-c)y^9. \tag{24}$$

Используя функции (24), уравнение (5) запишем в виде

$$\frac{105\pi r}{65536a^4}(231a^5r^{10}-1764a^4cr^8+5040a^3c^2r^6-7040a^2c^3r^4+4992ac^4r^2-1536c^5)=0, \quad (25)$$

и условие (6) представим следующим образом:

$$\frac{315\pi}{16384a^4}(231a^5r^{10}-1470a^4cr^8+3360a^3c^2r^6-3520a^2c^3r^4+1664ac^4r^2-256c^5)\neq 0. \quad (26)$$

Например, уравнение (25) при $a = 1$, $c = 1$, имеет единственный положительный корень $r_1 \approx 1{,}78633$, который удовлетворяет условию (26). Таким образом, система (22) в этом случае имеет единственный предельный цикл в фазовой плоскости, который является грубым и стремится к окружности с центром в начале координат радиуса $r_1 \approx 1{,}78633$, когда μ стремится к нулю. Фазовый портрет системы (22) качественно эквивалентен фазовому портрету системы (19), изображенному на рисунке.

**Заключение.** Таким образом, в настоящей работе разработан подход для выделения систем с возмущенным линейным центром специального вида, имеющих не более одного предельного цикла во всей фазовой плоскости при всех действительных значениях параметра возмущения μ. Для решения поставленной задачи предлагается способ построения функций Дюлака – Черкаса в виде полинома второй степени относительно фазовой переменной $y$, коэффициенты которого гладко зависят от второй фазовой переменной $x$ и непрерывно – от параметра μ. Построение функции Дюлака – Черкаса основано на редукции вспомогательного полинома $\Phi(x,y,\mu)$ к функции $\Phi_0(x,\mu)$, зависящей только от переменной $x$ и параметра μ. Предложен регулярный способ такой редукции. Представлены примеры выделенных систем, которые имеют единственный предельный цикл во всей фазовой плоскости.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф17М-148).

**Acknowledgements.** This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (Project No. F17M-148).

## Список использованных источников

1. Теория бифуркации динамических систем на плоскости / А. А. Андронов [и др.]. – М.: Наука, 1967.– 488 с.
2. Han, M. Normal Forms, Melnikov Functions and Bifurcation of Limit Cycles / M. Han, P. Yu // Appl. Math. Sci. – 2012. – Vol. 181. – P. 401.
3. Куклес, И. С. О некоторых случаях отличия фокуса от центра / И. С. Куклес // Докл. АН СССР.– 1944.– Т. 42, № 5. – С. 208–211.
4. Limit cycles for the Kukles system / H. Zang [et al.] // J. Dynamical and Control Systems. – 2008. – Vol. 14, № 2. – P. 283–298.
5. Гринь, А. А. Функция Дюлака для систем Льенара / А. А. Гринь, Л. А. Черкас // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2000. – Т. 4. – С. 29–38.
6. Черкас, Л. А. О функции Дюлака для системы Куклеса / Л. А. Черкас, А. А. Гринь // Дифференц. уравнения. – 2010.– Т. 46, № 6.– С. 811–819.
7. Grin, A. A. On some classes of limit cycles of planar dynamical systems / A. A. Grin, K. Schneider // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis. – 2007. – Vol. 14, № 5. – P. 641–656.
8. Черкас, Л. А. Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости / Л. А. Черкас // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 5. – С. 689–699.
9. Черкас, Л. А. Об оценке числа предельных циклов системы Льенара с малым параметром / Л. А. Черкас, О. Н. Малышева // Дифференц. уравнения.– 2011.– Т. 47, № 2. – С. 225–230.
10. Grin, A. A. On the construction of a class of generalized Kukles systems having at most one limit cycle / A. A. Grin, K. Schneider // J. Math. Analysis and Applications. – 2013. – Vol. 408, № 2. – P. 484–497.
11. Гринь, А. А. О существовании предельного цикла в одном классе обобщенных систем Куклеса / А. А. Гринь, А. В. Кузьмич // Вестн. ГрГУ им. Я. Купалы. Сер. 2, Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. – 2013. – № 3. – С. 33–40.
12. Черкас, Л. А. Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход) / Л. А. Черкас, А. А. Гринь, В. И. Булгаков. – Гродно: ГрГУ, 2013. – 489 с.
13. Cherkas, L. A. Dulac-Cherkas functions for generalized Lienard systems / L. A. Cherkas, A. A Grin, K. Schneider [Electronic resource] // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. – 2011. – № 35. – P. 1–23. – Mode of access: http://www.math.uszeged.hu/ejqtde/

## References

1. Andrtonov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. I., Majer A.G. *The theory of bifurcation of dynamical systems in the plane*. Moskow, Nauka Publ., 1967. 488 p. (in Russian).

2. Han M., Yu. P. Normal Forms, Melnikov Functions and Bifurcation of Limit Cycles. *Applied Mathematical Sciences*, 2012, vol. 181, p. 401. Doi: 10.1007/978-1-4471-2918-9

3. Kukles I. S. On some cases of the distinction of focus from the center. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Doklady of the Academy of Sciences of the USSR], 1944, vol. 42, no. 5, pp. 208–211 (in Russian).

4. Zang H., Zhang T., Tian Y., Tade M. Limit cycles for the Kukles system. *Journal of Dynamical and Control Systems,* 2008, vol. 14, no. 2, pp. 283–298. Doi: 10.1007/s10883-008-9036-x

5. Grin A. A., Cherkas L. A. Dulac function for Lienard systems. *Trudy Instituta matematiki* [Proceedings of the Institute of Mathematics], 2000, vol. 4, pp. 29–38 (in Russian).

6. Cherkas L. A., Grin A. A. On a Dulac function for the Kukles system. *Differential equations*, 2010, vol. 46, no. 6, pp. 818–826. Doi: 10.1134/s0012266110060066

7. Grin A. A., Schneider K. On some classes of limit cycles of planar dynamical systems. *Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems Series A: Mathematical Analysis,* 2007, vol. 14, no. 5, pp. 641–656.

8. Cherkas L. A. Dulac function for polynomial autonomous systems in plane. *Differential equations*, 1997, vol. 33, no. 5, pp. 689–699 (in Russian).

9. Cherkas L. A., Malysheva O. N. How to estimate the number of limit cycles in Lienard systems with a small parameter. *Differential equations*, 2011, vol. 47, no. 2, pp. 224–230. Doi: 10.1134/s001226611102008x

10. Grin A. A., Schneider K. On the construction of a class of generalized Kukles systems having at most one limit cycle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2013, vol. 408, no. 2, pp. 484–497. Doi: 10.1016/j.jmaa.2013.05.052

11. Grin A. A., Kuzmich A. V. About existence of a limit cycle in a class of generalized Kukles systems. *Vestnik GrGU im. Ianki Kupaly. Ser. 2. Matematika. Fizika. Informatika, vychslitel'naya technika I upravlenie = Vestnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control*, 2013, no. 3, pp. 33–40 (in Russian).

12. Cherkas L. A., Grin A. A., Bulgakov V. I. *Constructive methods of investigation of limit cycles of second order autonomous systems (numerical-algebraic approach).* Grodno, Grodno State University, 2013, 489 p. (in Russian).

13. Cherkas L. A., Grin A. A., Schneider K. Dulac-Cherkas functions for generalized Lienard systems. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2011, no. 35, pp. 1–23. Doi: 10.14232/ejqtde.2011.1.35

## Информация об авторах

**Кузьмич Андрей Викторович** – старший преподаватель кафедры фундаментальной и прикладной математики факультета математики и информатики, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: andrei-ivn@mail.ru

**Гринь Александр Александрович** – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры факультета математики и информатики, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: grin@grsu.by

## Information about the authors

**Andrei V. Kuzmich** – Senior Lecturer of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Faculty of Mathematics and Informatics, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Republic of Belarus). E-mail: andrei-ivn@mail.ru

**Aliaksandr A. Hryn** – D. Sc. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Head of the Department of Mathematical Analysis, Differential Equations and Algebra, Faculty of Mathematics and Informatics, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Republic of Belarus). E-mail: grin@grsu.by