ISSN 1561-2430 (print)

ФИЗИКА

PHYSICS

УДК 530.12

Поступила в редакцию 10.07.2017
Received 10.07.2017

Ю. А. Курочкин

Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО В ТЕРМИНАХ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

Аннотация. Задачи о движении свободной частицы в трехмерном пространстве Лобачевского интерпретируются как рассеяние пространством. Рассмотрены классический и квантово-механический случаи. Дана механическая интерпретация параллельных прямых пространства Лобачевского как траекторий невзаимодействующих материальных точек, вылетевших из точки на бесконечности. В силу свойств параллельных прямых пространства Лобачевского их можно рассматривать как траектории частиц, рассеянных на бесконечно удаленной точке. Введено понятие дифференциальных сечений рассеяния в элемент орисферы для классической и квантово-механической задач. Получено аналитическое выражение для дифференциального сечения в квантово-механической задаче. Для вывода данного выражения использовались решения уравнения Шредингера в орисферических координатах. Отмечается, что часть орисферы, секущая пучок параллельных траекторий, может рассматриваться как модель двумерной плоской вселенной в трехмерном пространстве с кривизной – пространстве Лобачевского.

Ключевые слова: пространство Лобачевского, параллельные прямые, траектории, орисфера, координаты, уравнение Шредингера, рассеяние, сечение рассеяния, модель вселенной

Для цитирования. Курочкин, Ю. А. Интерпретация свободного движения частиц в пространстве Лобачевского в терминах теории рассеяния / Ю. А. Курочкин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 3. – С. 49–55.

Yu. A. Kurochkin

B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

INTERPRETATION OF THE FREE MOTION OF PARTICLES IN THE LOBACHEVSKY SPACE IN THE TERM OF THE SCATTERING THEORY

Abstract. The problems of the motion of free particles in the three-dimensional Lobachevsky space are interpreted as scattering by space. The classical and quantum-mechanical cases are considered. A mechanical interpretation of parallel straight lines of the Lobachevsky space is given as the trajectories of non-interacting material points emitted from a point at infinity. Due to the properties of parallel lines in the Lobachevsky space, they can be considered as trajectories of particles scattered at an infinitely distant point. The concept of differential scattering cross sections in the horosphere element for the classical and quantum-mechanical problems is introduced. An analytical expression for the differential cross section in the quantum-mechanical problem is obtained. To derive this expression, we used the solutions of the Schrödinger equation in horospherical coordinates. It is noted that some part of a horosphere is a secant beam of parallel trajectories, can be considered as a model of a two-dimensional flat universe in the three-dimensional space with curvature – Lobachevsky space.

Keywords: Lobachevsky space, parallel lines, trajectories, horosphere, coordinates, Schrödinger equation, scattering, cross section, model of universe

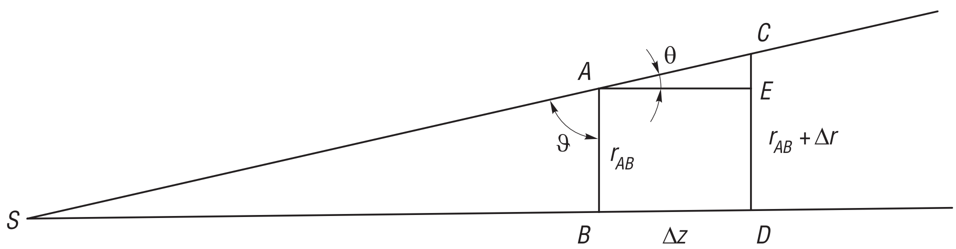
For citation. Kurochkin Yu. A. Interpretation of the free motion of particles in the Lobachevsky space in the term of the scattering theory. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2017, no. 3, pp. 49–55 (in Russian).

Введение. Как хорошо известно, геодезическим риманова пространства можно дать механическую интерпретацию. Их можно рассматривать как траектории свободно движущихся в этом пространстве материальных точек. Траектории пространства Лобачевского при этом, как отмечено Ж. Адамаром, неустойчивы [1]. Пучок параллельных прямых (геодезических) может интерпретироваться как рассеяние пространством Лобачевского сгустка невзаимодействующих между собой частиц, вылетевших из одной бесконечно удаленной точки.

Квантовая механика материальной точки в пространстве Лобачевского также имеет аналогичные особенности. То есть свободное квантово-механическое движение материальной точки в пространстве Лобачевского можно рассматривать как рассеяние точки самим пространством. Демонстрация описания квантово-механического движения как рассеяния удобно осуществлять на основе использования орисферической системы координат, связанной с орисферой, в данном случае трехмерного пространства Лобачевского [2]. Такой подход делает описание близким к описанию проблемы рассеяния в классическом случае.

Таким образом, задачей настоящей работы является описание классического и квантово-механического движения невзаимодействующих материальных точек в трехмерном пространстве Лобачевского в терминах теории рассеяния. Она также продолжает исследования [3–7] по применению геометрии пространства Лобачевского, учитывающие наличие в данном пространстве таких поверхностей, как орисферы, на которых реализуется геометрия плоскости Евклида, что расширяет возможности для построения физических моделей на основе геометрии Лобачевского.

Классическая задача. Пусть в трехмерном вещественном пространстве Лобачевского из бесконечно удаленной точки (точки на абсолюте) вылетает сгусток невзаимодействующих частиц, движущихся по различным геодезическим. По определению данные геодезические являются параллельными прямыми пространства Лобачевского. Будем считать пучок параллельных, вдоль которых движутся частицы, осесимметричным. В плоскости, проходящей через ось пучка и одну из параллельных из точки данной параллельной прямой на ось пучка (рисунок), опустим перпен-



дикуляр. Угол ϑ – есть угол параллельности, и согласно теореме Лобачевского он связан с длиной перпендикуляра r_{AB}:

$$\cos\vartheta = \operatorname{th} r_{AB}. \tag{1}$$

На рисунке точка S – точка на абсолюте, из которой вылетели частицы. Угол $\angle SAB = \vartheta$ – угол параллельности. Угол $\angle CAE$ между прямой SAC и перпендикуляром к AB назовем углом рассеяния, обозначив его θ. Очевидно, данный угол равен

$$\theta = \pi/2 - \vartheta. \tag{2}$$

Отметим, что перпендикуляр AE к отрезку AB в точке A не является прямой, параллельной BD. Тогда с учетом (2) формула (1) перепишется как

$$\sin\theta = \operatorname{th} r_{AB}. \tag{3}$$

В определенном смысле выражение (3) заменяет обычно используемую связь между прицельным параметром и углом рассеяния.

Если через некоторое сечение пучка орисферой-поверхностью, перпендикулярной прямым пучка, прямые (геодезические), по которым движутся частицы, проходят так, что плотность точек пересечения данных прямых с орисферой постоянна, то она в силу однородности пространства также будет постоянна в любом последующем сечении орисферой, хотя и отлична от плотности в предыдущем сечении. Здесь положительное направление вдоль оси пучка выбрано к точке пересечения (точке, из которой вылетают частицы-точки на абсолюте) прямых. При таком выборе направления поверхностная плотность будет уменьшаться при переходе к следующему сечению, что и будет характеризовать расхождение траекторий (рассеяние). Рассмотрим, как будет меняться плотность осесимметричного пучка по мере движения в сторону от источника.

Плотность на некотором сечении

$$n = {N_0}/{S_{AB}}, \tag{4}$$

где S_{AB} – площадь сечения орисферой, в которой лежат точки A и B в орисферических координатах, задаваемых в трехмерном пространстве Лобачевского метрическим элементом [7]:

$$dl^2 = \rho^2[e^{-2z}(dr^2 + r^2 d\varphi^2) + dz^2], \tag{5}$$

который в плоском пределе $\rho \to \infty, \rho r \to r, \rho z \to z,$ переходит в метрический элемент трехмерного пространства Евклида в цилиндрических координатах. Принимается естественное предположение, что число частиц неизменно и равно N_0. Поскольку бесконечно малый элемент площадки на орисфере, соответствующий элементу (5), равен

$$dS = \rho^2 e^{-2z}\ r dr d\varphi, \tag{6}$$

где ρ – радиус кривизны пространства Лобачевского, то, соответственно, площадь конечного кругового сечения на орисфере равна

$$\pi\rho^2 e^{-2z} r^2 = \pi R^2, \tag{7}$$

с

$$R = e^{-z}\ \rho r. \tag{8}$$

Здесь учтено, что для каждого фиксированного сечения z постоянно, ρ также постоянно, поэтому формула (7) площади круга на орисфере совпадает с формулой площади круга на евклидовой плоскости, как и должно быть.

Площадь кольца, на которую увеличилась площадь сечения при изменении радиуса R в результате сдвига dR вдоль оси пучка, по которой ориентирована ось z на бесконечно малое до $R'=R+dR$,

$$d\sigma = \pi(R'^2 - R^2) = \pi(R' + R)(R' - R) = 2\pi R dR.$$

Число пересечений данной площадки параллельными прямыми равно

$$dN = n d\sigma = 2N_0 \frac{dR}{R}. \tag{9}$$

В кольцо, заключенное между радиусами R_0 и R, попадает число частиц, равное

$$N = N_0 \ln\frac{R}{R_0}. \tag{10}$$

Если сечение радиуса R является сечением, полученным в результате сдвига на Δz вдоль оси z сечения радиуса R в отрицательном направлении, то, согласно (8),

$$N = -N_0 \Delta z. \tag{11}$$

Знак «минус» в формуле (11) указывает на уменьшение числа пересечений прямых в диске радиуса R_0 при его сдвиге на Δz и переходе этих точек пересечения в площадь кольца, на которую увеличилась площадь сечения при сдвиге.

Можно ввести понятие дифференциального сечения для рассмотренного выше классического случая. Учтем, что рассеяние происходит в элемент орисферы площадью, определяемой (6), и примем стандартные определения

$$dN = j_{in} d\sigma = n_{in} v d\sigma,\ dN = \pi\rho^2 n_s v e^{-2z} r dr d\varphi = \pi\rho^2 j_s e^{-2z} r dr d\varphi. \tag{12}$$

Приравняв оба dN, получим формулу для дифференциального сечения рассеяния по аналогии с определением дифференциального сечения в теории рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{\pi r dr d\varphi} = \rho^2 \frac{j_s}{j_{in}} e^{-2z} = \rho^2 \frac{n_s}{n_{in}} e^{-2z}. \tag{13}$$

Здесь $j_{in} = n_{in}v$ и $j_s = n_s v$ – соответственно плотность потока, падающего и рассеянного, n_{in}, n_s – поверхностная плотность точек пересечения прямых, пересекающих орисферы, v – скорость движения частиц вдоль геодезических. Отметим, что скорость v в известном смысле носит условный характер и введена для того, чтобы определение сечения (13) совпадало со стандартным.

Плоский предел в (13) осуществляется для выражения

$$e^{2\Delta z}\frac{d\sigma}{\pi\rho^2 r dr d\varphi} = \frac{n_s}{n_{in}}, \tag{14}$$

когда при $\rho \to \infty$, $e^{-\Delta z}\rho r \to r'$ переходит в r' цилиндрической системы координат трехмерного евклидова пространства, φ при этом остается неизменным, а $n_{in} = n_s$. Геометрически плоский предел означает, что конус геодезических пространства Лобачевского с вершиной на абсолюте переходит в цилиндр трехмерного евклидова пространства, и все сечения имеют одинаковую площадь, а следовательно, поверхностные плотности на них одинаковы.

Выше представлена качественная, кинематическая картина. Для динамической интерпретации эффекта расходимости траекторий рассмотрим описание свободной частицы в орисферических координатах на основе нерелятивистского уравнения Гамильтона – Якоби. Общий вид данного уравнения в криволинейных координатах пространственной части

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2m} g^{ik}\frac{\partial W}{\partial x^i}\frac{\partial W}{\partial x^k}, \tag{15}$$

где W – действие частицы, m – ее масса, g^{ik} – тензор, обратный метрическому тензору трехмерного пространства, $(i, k = 1, 2, 3)$. Отметим, что использование релятивистского уравнения Гамильтона – Якоби в данном случае не вносит ничего нового.

В орисферических координатах уравнение (15) примет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2m\rho^2}\left\{ e^{2z}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right\}. \tag{16}$$

Оно допускает разделение переменных и имеет решение

$$W = k^2 t + M\varphi + \int dr\sqrt{k_\perp{}^2 - \frac{M^2}{r^2}} + \int dz\sqrt{k^2 - e^{2z}k_\perp{}^2}, \tag{17}$$

которое после дифференцирования по переменной разделения $k_\perp$ приводит к связи переменных r и z при приравнивании к нулю возникающих констант интегрирования:

$$\sqrt{\frac{k^2}{k_\perp{}^2} - e^{2z}} = \sqrt{r^2 - \frac{M^2}{k_\perp{}^2}}, \tag{18}$$

где $k^2 = 2mE\rho^2$.

Возведя в квадрат выражение (18), получим зависимость r^2 от z:

$$r^2 = \frac{k^2}{k_\perp{}^2} + \frac{M^2}{k_\perp{}^2} - e^{2z}. \tag{19}$$

Из выражения (19) следует, что качественное кинематическое рассмотрение, проведенное выше, как и следовало бы ожидать, соответствует предельным случаям в динамическом описании на основе уравнения Гамильтона – Якоби (16). Действительно, точке на бесконечности, при $r^2 = 0$, из которой вылетают частицы, отвечает предельный случай, когда $z \to \infty$, и это возможно только тогда, когда $k_\perp{}^2 \to 0$, что интуитивно ожидаемо. При этом, когда $k_\perp{}^2 \to 0$, при $z \to -\infty$, $r^2 \to \infty$, что так же соответствует вышеприведенному чисто кинематическому рассмотрению.

Квантово-механическая задача. Рассмотрим движение свободной квантово-механической частицы в трехмерном пространстве Лобачевского как рассеяние. Для этого будем данный процесс описывать с помощью того же общего определения сечения (13). В данном случае плотность рассеянного тока определяется согласно общей формуле

$$j^a{}_s = \frac{i\hbar}{2m\rho}(\psi^*\nabla^a\psi - \psi\nabla^a\psi^*) \tag{20}$$

для волновой функции, записанной в орисферических координатах (a = 1,2,3). Выражение для плотности потока падающей плоской (не рассеянной) волны exp($-i\kappa z$), рассчитанное по формуле (20), равно

$$j^a = \left(0, 0, {}^{\hbar\kappa}\!/\!_{m\rho}\right). \tag{21}$$

Плотность потока через секущую пучок орисферу определяется третьей (z-й) компонентой

$$j^3{}_s = \frac{i\hbar}{2m\rho}\left(\psi^*\nabla^3\psi - \psi\nabla^3\psi^*\right). \tag{22}$$

Уравнение Шредингера в орисферических координатах трехмерного пространства Лобачевского, задаваемых бесконечно малым интервалом (5), имеет вид

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi,$$

где гамильтониан выражается как

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m\rho^2}\left[e^{2z}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) + e^{2z}\frac{\partial}{\partial z}e^{-2z}\frac{\partial}{\partial z} - 1\right]. \tag{23}$$

Будем рассматривать стационарную задачу рассеяния, описываемую уравнением Шредингера

$$H\psi = E\psi. \tag{24}$$

Подставляя выражение для гамильтониана (23), получим уравнение

$$\left[e^{2z}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) + e^{2z}\frac{\partial}{\partial z}e^{-2z}\frac{\partial}{\partial z} - 1\right]\psi(r,\varphi,z) = k^2\psi(r,\varphi,z), \tag{25}$$

где $k^2 = -\frac{2mE\rho^2}{\hbar^2}$. Отметим, что введенная здесь k^2 отличается от аналогичной величины в классической задаче знаком и делителем $\hbar^2$.

Уравнение (25) допускает разделение переменных так, что

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\chi(r,\varphi) = k_\perp{}^2\chi(r,\varphi), \tag{26}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}e^{-2z}\frac{\partial}{\partial z}w(z) = \left[(k^2-1)e^{-2z} - k_\perp^2\right]w(z). \tag{27}$$

Здесь введены обозначения $\psi(r,\varphi,z) = \chi(r,\varphi)\,\mathrm{w}(z)$.

Учитывая равенство нулю потока через боковые поверхности, найдем плотность потока через секущую орисферу, которая совпадает с z – компонентой плотности потока и, следовательно, связана с решением уравнения (27). Данное утверждение следует из определения градиента в орисферических координатах (5).

Уравнение (27) для наших целей удобно представить в следующем виде:

$$\frac{d^2w}{dz^2}-2\frac{dw}{dz}-(k^2-1)w=-k_\perp{}^2e^{2z}w, \tag{28}$$

или в результате стандартного преобразования, после исключения первой производной,

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-k^2\right)\varphi=-k_\perp{}^2e^{2z}\varphi. \tag{29}$$

Решение уравнения (29) имеет вид $K_{i\sigma}\left(k_\perp e^z\right)$, где $K_{i\sigma}$ – функция Макдональда, определенная при любых комплексных и, в частности, чисто мнимых значениях индекса $i\sigma=\sqrt{k^2}$, $\sigma^*=\sigma$.

Плотность потока, рассеянного в орисферу, рассчитанная по формуле (20) для данного конкретного решения, равна

$$j_s{}^3=\frac{i\hbar k_\perp e^z}{4m\rho}\left(K_{i\sigma}K^*{}_{i\sigma-1}+K_{i\sigma}K^*{}_{i\sigma+1}-K^*{}_{i\sigma}K_{i\sigma-1}-K^*{}_{i\sigma}K_{i\sigma+1}\right),$$

соответственно дифференциальное сечение имеет вид

$$e^{2z}\frac{d\sigma}{\pi\rho^2 rdrd\varphi}=\frac{2m\rho j^3{}_s}{\hbar\kappa}=\frac{ik_\perp e^z}{2\kappa}\left(K_{i\sigma}K^*{}_{i\sigma-1}+K_{i\sigma}K^*{}_{i\sigma+1}-K^*{}_{i\sigma}K_{i\sigma-1}-K^*{}_{i\sigma}K_{i\sigma+1}\right). \tag{30}$$

Заметим, что выражение (30) обращается в нуль в пределе плоского пространства, когда $\rho\to\infty, k^2\to-\infty$, $\sigma\to\infty$. Для обоснования сказанного воспользуемся интегральным представлением $K_{i\sigma}$ (см. [8])

$$K_{i\sigma}(w)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-wcht+i\sigma t}dt,\quad K_{i\sigma\pm1}(w)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-wcht+(i\sigma\pm1)t}dt. \tag{31}$$

Каждый из интегралов (31) есть преобразование Фурье, в которых $w=k_\perp e^z$ выступает в роли параметра. Воспользуемся методом оценки таких интегралов при $\sigma\to\infty$, который дан, например, в [9], и сводится к повторному взятию интегралов по частям. Для первого из интегралов (31), полученных таким образом, имеем

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2}\int\limits_{-l}^{l}e^{-wcht+i\sigma t}dt=\lim_{l\to\infty}e^{-wcht}\left.\frac{e^{i\sigma t}}{2i\sigma}\right|_{-l}^{l}+O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)=\lim_{l\to\infty}e^{-wchl}\frac{\sin\sigma l}{2i\sigma}+O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right). \tag{32}$$

Как видно из выражения (32), члены σ^{-1} экспоненциально убывают при всех конечных значениях z безотносительно к величине σ, и только при значениях $z\to-\infty$ для данного члена существенно значение кривизны. Легко проверить, что для производных функции Макдональда, которые представляют собой комбинации, пропорциональные $K_{i\sigma-1}+K_{i\sigma+1}$, ситуация аналогична. Таким образом, можно ожидать, что эффекты рассеяния, определяемые формулой (30), проявляются в квантовом случае как высшие порядки в разложениях по кривизне.

Заключение. В данной работе задачи классической и квантовой механики о движении свободной материальной точки в трехмерном пространстве Лобачевского рассмотрены как задачи о рассеянии. Для этого использовались представления об орисферах и орисферические координаты. В случае классической задачи сечение осесимметричного пучка орисферой с меняющейся в зависимости от переменной z площадью можно рассматривать как модель эволюции двумерной «вселенной». Роль последней исполняет орисферическое сечение пучка параллельных геодезических при различных значениях z. Таким образом, переменная z исполняет роль «времени».

Дальнейший анализ и сравнение классического и квантового случаев был бы полезен для формирования более точного представления о роли сингулярности как исходной точки эволюции системы в каждом из рассмотренных случаев.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф16-044).

Автор выражает благодарность профессору Е. А. Толкачеву за полезные советы и участникам семинара лаборатории теоретической физики Института физики НАН Беларуси за плодотворное обсуждение работы.

Acknowledgements. This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (Project No. F 16-044).

The author would like to thank Professor E.A. Tolkachev for useful advice and participants in the seminar of the Laboratory of Theoretical Physics of the B.I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus and for fruitful discussions of the work.

Список использованных источников

1. Адамар, Ж. Неевклидова геометрия в теории автоморфных функций / Ж. Адамар. – Москва; Ленинград: ГИТТЛ-(1951). – 138 с.

2. Олевский, М. Н. Триортогональные системы в пространствах постоянной кривизны, в которых уравнение $\Delta_2 U + \lambda U = 0$ допускает полное разделение переменных // Мат. сб. – 1950. – Т. 27. – С. 379–426.

3. Курочкин, Ю. А. Когерентные состояния на орисфере пространства Лобачевского / Ю. А. Курочкин, И. Ю. Рыбак, Д. В. Шелковый // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 5. – С. 44–48.

4. Kurochkin, Yu. Coherent states on horospheric three-dimensional Lobachevsky space // Yu. Kurochkin, I. Rybak, Dz. Shoukavy // J. Math. Phys. – 2016. – Vol. 57, №. 8. – P. 082111.

5. Hadron as Coherent State on the Horosphere of the Lobachevsky Momentum Space / Y. Kurochkin [et al.] // Physics of the Particles and Nuclei Letters. – 2016. – Vol. 13, №.3. – P. 285–288.

6. Овсиюк, Е. М. Точно решаемые задачи квантовой механики и классической теории поля в пространствах с неевклидовой геометрией / Е. М. Овсиюк. – Минск: РИВШ, 2013. – 406 с.

7. Овсиюк, Е. М. О моделировании потенциального барьера в теории Шредингера геометрией пространства Лобачевского / Е. М. Овсиюк, О. В. Веко // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2011. – № 2. – С. 30–37.

8. Виленкин, Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп / Н. Я. Виленкин. – М.: Наука. 1965. – 588 с.

9. Мигдал, А. Б. Качественные методы в квантовой теории / А. Б. Мигдал. – М.: Наука, 1975. – 335 с.

References

1. Hadamard J. *Non Euclidean Geometry in the theory of the automorphic functions*. Moskowa, Leningrad, state publishing house of technical literature, 1951. 132 p. (in Russian).

2. Olevskii M. N. Triorthogonal systems in spaces of constant curvature in which the equation Δ2u+λu=0Δ2u+λu=0 allows a complete separation of variables. *Matematicheskii Sbornik = Sbornik: Mathematics,* 1950, vol. 27, pp. 379–426 (in Russian).

3. Kurochkin Yu. A., Rybak I. Yu., Shelkovyi D. V. Coherent states on horospheric three-dimensional Lobachevsky space. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2014, vol. 58, no 5, pp. 44–48 (in Russian).

4. Kurochkin Yu. A, Rybak I. Yu., Shoukavy D. V. Coherent states on horospheric three-dimensional Lobachevsky space. *Journal of Mathematical Physics,* 2016, vol. 57, no. 8, p. 082111. Doi: 10.1063/1.4960474

5. Kurochkin Y, Kulchitsky Y., Harkusha S., Russakovich N. Hadron as Coherent State on the Horosphere of the Lobachevsky Momentum Space. *Physics of the Particles and Nuclei Letters*, 2016, vol. 13, no. 3, pp. 285–288. Doi: 10.1134/s1547477116030158

6. Ovsiyuk E. M. *Exactly solved problems quantum mechanics and classical theory of the field in space with non-Euclidean geometry.* Minsk, Republican Institute of Higher Education, 2013, 406 p. (in Russian).

7. Ovsiyuk E. M., Veco O. V. About modeling of the potential barrier in the Shcredinger theory by Lobachevsky space geometry. *Vestnic Brestskogo universiteta. Seriya 4, Fizika. Matematika = Brest University Herald. Seriya 4 Physics. Mathamatics*, 2011, no. 2, pp. 30–37 (in Russian).

8. Vilenkin N. Ya. *Special functions and theory of the group representations*. Moskow, Nauka Publ., 1965. 588 p. (in Russian).

9. Migdal A. B. *Quality methods in quantum theory.* Moskow, Nauka Publ., 1975, 335 p. (in Russian).

Информация об авторе

Курочкин Юрий Андреевич – доктор физико-математических наук, заведующий центром «Теоретическая физика» Института физики им. Б. И. Степанова, Национальная академия наук Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by

Information about the author

Yurii A. Kurochkin – D. Sc. (Physics and Mathematics), Head of the Center of Theoretical Physics, B. I. Stepanov Institute of Physics, National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by