ISSN 1561-2430 (print)
УДК 539.12

Поступила в редакцию 07.04.2017
Received 07.04.2017

О. В. Веко[1], Я. А. Войнова[1], Е. М. Овсиюк[2], В. М. Редьков[1]

[1]Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
[2]Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Беларусь

ЧАСТИЦА КОКСА ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ: АНАЛИЗ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Аннотация. Исследовано нерелятивистское уравнение Шредингера для скалярной частицы Кокса с внутренней структурой в присутствии магнитного поля на фоне пространства Лобачевского. Проведено разделение переменных. Уравнение, описывающее движение частицы вдоль оси z, оказывается существенно более сложным, чем при рассмотрении частицы Кокса в пространстве Минковского. Форма графика эффективной потенциальной функции свидетельствует о том, что здесь имеем ситуацию сложного потенциального барьера с необходимостью анализировать прохождение частицы через него. Уравнение приводится к уравнению с шестью регулярными особыми точками. В специально выбранных координатах физическим бесконечностям $z = \pm\infty$ соответствуют особые точки 0 и 1 найденного уравнения. Решения этого уравнения построены в виде степенных рядов, сходимость которых исследована методом Пуанкаре – Перрона. Ряды сходятся во всей физической области переменной $z \in (-\infty, +\infty)$. При рассмотрении обычной частицы в магнитном поле в пространстве Лобачевского возникает более простая задача, также с туннельным эффектом через потенциальный барьер, решаемая точно в терминах гипергеометрических функций.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, спин 0, внутренняя структура частицы Кокса, пространство Лобачевского, магнитное поле, разделение переменных, точные решения, метод Пуанкаре – Перрона

Для цитирования. Частица Кокса во внешнем магнитном поле: анализ в пространстве Лобачевского / О. В. Веко [и др.] // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 3. – С. 56–65.

O. V. Veko[1], Ya. A. Voynova[1], E. M. Ovsiyuk[2], V. M. Red'kov[1]

[1]B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
[2]Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozur, Belarus

COX PARTICLE IN THE APPLIED MAGNETIC FIELD: ANALYSIS IN LOBACHEVSKY SPACE

Abstract. The generalized Schrődinger equation for a scalar Cox particle is studied in the presence of a magnetic field on the background of Lobachevsky space. Separation of variables is performed. An equation describing the particle motion along the z axis appears to be much more complex than that when describing the Cox particle in Minkowski space. The form of the effective potential curve says that we have a quantum-mechanical problem of tunneling type. The derived equation has 6 regular singular points. Singular points 0 and 1 of the derived equation correspond to the physical domains $z = \pm\infty$. The solutions of the equation are constructed with the help of power series. Convergence of the series is examined by the Poincare – Perrone method. These series are convergent within the whole physical domain $z \in (-\infty, +\infty)$. When considering an ordinary particle in Lobachevsky space, a simpler problem of tunneling type arises, which is exactly solved in terms of hypergeometric functions.

Keywords: Schrődinger equation, spin zero, intrinsic structure of the Cox particle, Lobachevsky space, magnetic field, separation of variables, tunneling effect, exact solutions, Poincare – Perrone method

For citation. Veko O. V. , Voynova Ya. A. , Ovsiyuk E. M. , Red'kov V. M. Cox particle in the applied magnetic field: analysis in Lobachevsky space. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2017, no. 3, pp. 56–65 (in Russian).

Введение. В. Коксом была предложена [1] обобщенная релятивистская 20-компонентная модель для скалярной частицы со спином нуль. В присутствии электромагнитного поля волновое уравнение с расширенным набором представлений группы Лоренца после исключения вспомогательных компонент приводит к уравнению для минимального набора компонент, которое модифицированно дополнительным членом взаимодействия с внешним электромагнитным полем. Это дополнительное взаимодействие обусловлено некоторой электромагнитной внутренней структурой, явно проявляющейся во внешних полях. Последняя может быть соотнесена с известным дарвиновским членом в нерелятивистском уравнении Шредингера [2].

В работах [3–8] исследовалось квантово-механическое поведение частицы Кокса во внешних магнитном и электрическом полях в пространствах с неевклидовой геометрией: моделях Лобачевского и Римана. В настоящей работе мы дополнительно исследуем нерелятивистскую частицу Кокса во внешнем магнитном поле на фоне геометрии пространства Лобачевского. После разделения переменных в обобщенном уравнении Шредингера основное внимание уделено построению возможных решений уравнения по переменной z. Здесь существенно влияние геометрии пространства Лобачевского, которое наиболее заметно для больших масштабов расстояния.

В специальной системе координат цилиндрического типа в пространстве Лобачевского аналог однородного магнитного поля задается равенствами (используем безразмерные координаты):

$$dS^2 = c^2 dt^2 - \mathrm{ch}^2 z (dr^2 + \mathrm{sh}^2 r d\varphi^2) + dz^2,$$
$$\sqrt{-g} = \rho^3 \,\mathrm{sh}\, r \,\mathrm{ch}^2 z, \quad A_\varphi = -B\rho^2(\mathrm{ch}\, r - 1), F_{r\varphi} = -B\rho\,\mathrm{sh}\, r,$$
$$B_3 = -B\rho\,\mathrm{sh}\, r, \quad B^3 = -\frac{B}{\rho\,\mathrm{sh}\, r\,\mathrm{ch}^4 z}, \quad B_i B^i = B^2 \mathrm{ch}^{-4} z. \tag{1}$$

Исходим из представления обобщенного уравнения Шредингера [4–6]. Ниже используем обозначения $eB\rho^2 / \hbar c = b$, $\gamma \mathrm{ch}^{-2} z = \gamma(z)$, $\gamma = eB\Gamma$; e – заряд частицы; параметр Γ характеризует внутреннюю структуру частицы Кокса. Для разделения переменных применим подстановку

$$\Psi = e^{-iEt/\hbar} e^{im\varphi} Z(z) R(r), \quad \varepsilon = \frac{E}{\hbar^2 / 2M\rho^2}; \tag{2}$$

в результате получим уравнение [7]

$$\left[\frac{\mathrm{ch}^{-2} z}{1-\gamma^2(z)} \left(\partial_r^2 + \frac{\mathrm{ch}\, r}{\mathrm{sh}\, r}\partial_r - \frac{[m - b(\mathrm{ch}\, r - 1)]^2}{\mathrm{sh}^2 r} + b\gamma(z) \right) + \varepsilon + \left(\partial_z + 2\frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z} \right)\partial_z \right] R(r) Z(z) = 0; \tag{3}$$

в нем переменные разделяются:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\mathrm{ch}\, r}{\mathrm{sh}\, r}\frac{d}{dr} - \frac{[m - b(\mathrm{ch}\, r - 1)]^2}{\mathrm{sh}^2 r} + \Lambda \right) R = 0, \tag{4}$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + 2\frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}\frac{d}{dz} + \varepsilon + \frac{b\gamma - \Lambda\,\mathrm{ch}^2 z}{\mathrm{ch}^4 z - \gamma^2} \right) Z = 0. \tag{5}$$

Решения радиального уравнения. После замены переменной в уравнении (4)

$$\mathrm{ch}\, r - 1 = -2y, \quad y = -\mathrm{sh}^2\frac{r}{2} \in (-\infty, 0] \tag{6}$$

приходим к следующему (для определенности, пусть $b = -B$, $B > 0$):

$$\left[y(1-y)\frac{d^2}{dy^2} + (1-2y)\frac{d}{dy} - \frac{1}{4}\left(\frac{m^2}{y} - 4B^2 + \frac{(m-2B)^2}{1-y} \right) - \Lambda \right] R = 0.$$

Используя подстановку $R = y^a (1-y)^b F$ при $a = \pm m/2$, $b = \pm(m-2B)/2$, получаем уравнение гипергеометрического типа. Решения таковы [7] (связанным состояниям отвечают положительные значения параметра a и отрицательные значения параметра b):

$$R = \left(-\mathrm{sh}\frac{r}{2} \right)^{|m|} \left(\mathrm{ch}\frac{r}{2} \right)^{-|m-2B|} F\left(\alpha, \beta, \gamma, -\mathrm{sh}^2\frac{r}{2} \right), \tag{7}$$

где α и β определены выражениями

$$a = +\frac{|m|}{2}, \quad b = -\frac{|m-2B|}{2}, \quad \gamma = 2a + 1 = +|m| + 1,$$

$$\alpha = a + b + \frac{1}{2} - \sqrt{B^2 + \frac{1}{4} - \Lambda}, \quad \beta = a + b + \frac{1}{2} + \sqrt{B^2 + \frac{1}{4} - \Lambda}. \tag{8}$$

Детальный анализ показывает [7], что здесь имеем конечное число дискретных уровней энергии, которые описываются соотношениями

$$m < 2B, \quad \frac{m + |m|}{2} + n + 1/2 \le B, \quad n = 0, 1, \ldots, N_B,$$

$$\Lambda - 1/4 = 2B\left(\frac{m + |m|}{2} + n + 1/2\right) - \left(\frac{m + |m|}{2} + n + \frac{1}{2}\right)^2. \tag{9}$$

В обычных единицах формулы выглядят так:

$$\Lambda - \frac{1}{4} = \rho^2 \Lambda_0 - \frac{1}{4}, \quad \lim_{\rho \to \infty} \Lambda_0 = \frac{2M}{\hbar^2}\left(E - \frac{P^2}{2M}\right), \quad m < 2B, \quad m + n + 1/2 \le \frac{eB}{\hbar c}\rho^2,$$

$$\rho^2 \Lambda_0 - \frac{1}{4} = 2\frac{eB}{\hbar c}\rho^2\left(\frac{m + |m|}{2} + n + 1/2\right) - \left(\frac{m + |m|}{2} + n + 1/2\right)^2, \quad n = 0, 1, \ldots, N_B.$$

Отсюда в пределе исчезновения кривизны получаем известный результат:

$$E - \frac{P^2}{2M} = \frac{eB\hbar}{Mc}\left(\frac{m + |m|}{2} + n + 1/2\right). \tag{10}$$

Из уравнения (9) следует $\Lambda - 1/4 = 2BN - N^2, \ n = 0, 1, \ldots, N_B$, где

$$\frac{1}{2} \le N = \frac{m + |m|}{2} + n + 1/2 \le |B| = b;$$

следовательно, параметр Λ подчиняется ограничению

$$b \le \Lambda \le b^2 + \frac{1}{4}. \tag{11}$$

Анализ уравнения в переменной *z*. В уравнении (5) исключим член с первой производной подстановкой $Z = \mathrm{ch}^{-1} z f(z)$:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon - 1 - U(z)\right) f(z) = 0, \quad U(z) = -\frac{b\gamma - \Lambda\, \mathrm{ch}^2 z}{\mathrm{ch}^4 z - \gamma^2}. \tag{12}$$

Полученное уравнение (12) можно рассматривать как одномерное шредингеровское с эффективным потенциалом $U(z)$. Соответствующая сила определяется равенством

$$F_z = -\frac{dU}{dz} = 2\, \mathrm{ch}\, z\, \mathrm{sh}\, z\, \frac{\Lambda\, \mathrm{ch}^4 z - 2b\gamma\, \mathrm{ch}^2 z + \gamma^2 \Lambda}{(\mathrm{ch}^4 z - \gamma^2)^2}. \tag{13}$$

Найдем точки локального экстремума потенциала: это $z = 0$ и два корня уравнения:

$$\left(\mathrm{ch}^2 z\right)|_{1,2} = \frac{b}{\Lambda}\gamma \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{\Lambda^2} - 1\right)\gamma^2}\,. \tag{14}$$

Как показано выше, при рассмотрении связанных состояний по радиальной переменной будет всегда выполняться неравенство $\Lambda^2 > b^2$. Это означает, что квадратные корни в (14) являются комплексными числами. Для частицы Кокса имеем ситуацию сложного потенциального барьера с необходимостью анализировать прохождение частицы через него.

Вводим переменную (в ней физически разные точки $z = \pm\infty$ помещаем в разные особые точки дифференциального уравнения)

$$x=\frac{1-z}{2},\ \ z\to-\infty-->x\to 1;\quad z\to+\infty-->x\to 0;$$

уравнение преобразуется к виду

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}\right)\frac{d}{dx}+\frac{1}{4}\frac{\varepsilon-1}{x^2}+\frac{1}{2}\frac{-2\Lambda+\varepsilon-1}{x}+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon-1}{4(1-x)^2}+\frac{\varepsilon-1-2\Lambda}{2(1-x)}+\frac{2\beta+2\Lambda\gamma}{1+4\gamma x(1-x)}+\frac{2\beta-2\Lambda\gamma}{1-4\gamma x(1-x)}\right]f=0. \tag{15}$$

В переменной $X=x^{-1}$ уравнение (15) в окрестности точки $x=0$ выглядит так:

$$\left(\frac{d^2}{dX^2}-\frac{d}{dX}-\frac{(\Lambda\gamma+\beta)(4\gamma+1)}{8\gamma^2}+\Lambda+\frac{\varepsilon-1}{4}+\frac{(\Lambda\gamma-\beta)(-4\gamma+1)}{8\gamma^2}\right)f=0,$$

т. е. $x=\infty$ – обычная (несингулярная) точка. Два квадратичных выражения в знаменателях уравнения (15) дают четыре регулярные особые точки:

$$\frac{1}{1+4\gamma x(1-x)}=-\frac{1}{4\gamma}\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)},\ \ x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+\gamma^{-1}}}{2};$$

$$\frac{1}{1-4\gamma x(1-x)}=+\frac{1}{4\gamma}\frac{1}{(x-x_3)(x-x_4)},\ \ x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{1-\gamma^{-1}}}{2}.$$

Уравнение (15) можно представить в виде

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}\right)\frac{d}{dx}+\frac{\varepsilon-1}{4x^2}+\frac{-2\Lambda+\varepsilon-1}{2x}+\frac{\varepsilon-1}{4(1-x)^2}+\frac{\varepsilon-1-2\Lambda}{2(1-x)}-\right.$$

$$\left.-\frac{2\beta+2\Lambda\gamma}{4\gamma(x_1-x_2)}\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right)+\frac{2\beta-2\Lambda\gamma}{4\gamma(x_3-x_4)}\left(\frac{1}{x-x_3}-\frac{1}{x-x_4}\right)\right]f=0. \tag{16}$$

Таким образом, имеем уравнение с шестью регулярными особыми точками:

$$0,\ \ 1,\ \ x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+\gamma^{-1}}}{2},\ \ x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{1-\gamma^{-1}}}{2}. \tag{17}$$

С учетом того, что физический интервал изменения переменной – это

$$z\in(-\infty,+\infty)\ \ -->\ \ x\in(0,1), \tag{18}$$

ввиду малости параметра γ заключаем, что четыре особые точки x_1, x_2, x_3, x_4 (две вещественные и две комплексные) лежат далеко от точек $x=0$, $x=1$, и можно считать, что эти четыре точки не попадают внутрь кругов радиуса 1 около физических особенностей $x=0$ и $x=1$.

Находим поведение решений около двух особых точек:

$$x\to 0,\ \ \left(\frac{d^2}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{(\varepsilon-1)/4}{x^2}\right)f=0,\quad f=x^A,\quad A=\pm\frac{i\sqrt{\varepsilon-1}}{2};$$

$$x\to 1,\ \ \left(\frac{d^2}{x^2}+\frac{1}{x-1}\frac{d}{dx}\frac{(\varepsilon-1)/4}{(x-1)^2}\right)f=0,\quad f=x^B,\quad B=\pm\frac{i\sqrt{\varepsilon-1}}{2}.$$

Найдем поведение решений около особых точек x_1, x_2, x_3, x_4. Они однотипны, поэтому достаточно рассмотреть одну точку:

$$f''+\alpha f'+\frac{\beta}{x-x_1}f=0,\ \ f=(x-x_1)^{\rho};$$

для индекса ρ получаем алгебраическое уравнение с простыми решениями:

$$\rho(\rho-1)=0 \quad \Rightarrow \quad \rho=0,\ 1.$$

Для уравнения (15) ищем решения Фробениуса около точки $x = 0$ в виде $f = x^A (x-1)^B F(x)$. Накладывая уже известные ограничения на параметры A и B:

$$A=\pm\frac{i\sqrt{\varepsilon-1}}{2},\quad B=\pm\frac{i\sqrt{\varepsilon-1}}{2}, \tag{19}$$

и умножая уравнение на выражение

$$x(x-1)\cdot[1-4\gamma x(x-1)]\cdot[1+4\gamma x(x-1)],$$

получаем уравнение в виде, пригодном для построения решений в виде степенных рядов:

$$\begin{gathered}
x(x-1)\Big[1-16\gamma^2x^2(x-1)^2\Big]\frac{d^2F}{dx^2}+ \\
+\Big[1-16\gamma^2x^2(x-1)^2\Big]\big((2A+1)(x-1)+(2B+1)x\big)\frac{dF}{dx}+ \\
+\Big\{(2AB+A+B)\Big[1-16\gamma^2x^2(x-1)^2\Big]+ \\
+\frac{1}{2}(\varepsilon-1-2\Lambda)(x-1)\Big[1-16\gamma^2x^2(x-1)^2\Big]+\frac{1}{2}(\varepsilon-1-2\Lambda)x\Big[1-16\gamma^2x^2(x-1)^2\Big]+ \\
+(2\beta-2\Lambda\gamma)\,x(x-1)\big[1-4\gamma x(x-1)\big]+(2\beta+2\Lambda\gamma)\,x(x-1)\big[1+4\gamma x(x-1)\big]\Big\}F=0.
\end{gathered}$$

Отметим, что данное уравнение симметрично относительно замены

$$x \Longleftrightarrow (x-1),\quad A \Longleftrightarrow B,$$

это позволяет одновременно построить разложения в степенной ряд по переменным x и $(x-1)$.

Будем использовать обозначения

$$\begin{gathered}
\frac{\varepsilon-1-2\Lambda}{2}=M,\quad 2\beta-2\Lambda\gamma=K,\quad 2\beta+2\Lambda\beta=L,\quad 4\gamma=\Gamma; \\
2A+2B+2=\alpha,\quad 2AB+A+B=\beta.
\end{gathered}$$

Уравнение можно переписать так:

$$\begin{gathered}
x(x-1)\Big[1-\Gamma^2x^2(x-1)^2\Big]F''+ \\
+\Big[1-\Gamma^2x^2(x-1)^2\Big]\big(\alpha x-2A-1\big)F'+\Big\{\beta\Big[1-\Gamma^2x^2(x-1)^2\Big]+ \\
+M(x-1)\Big[1-\Gamma^2x^2(x-1)^2\Big]+Mx\Big[1-\Gamma^2x^2(x-1)^2\Big]+ \\
+Kx(x-1)\big[1+\Gamma x(x-1)\big]+Lx(x-1)\big[1-\Gamma x(x-1)\big]\Big\}F=0.
\end{gathered}$$

Уравнение для функции $F(x)$ можно символически представить в виде

$$PF''+QF'+RF=0,$$

где

$$\begin{gathered}
P=-\Gamma^2x^6+3\Gamma^2x^5-3\Gamma^2x^4+\Gamma^2x^3+x^2-x= \\
=p_6x^6+p_5x^5+p_4x^4+p_3x^3+p_2x^2+p_1x; \\
Q=-\Gamma^2\alpha x^5+\Gamma^2(2A+1+2\alpha)x^4-\Gamma^2(\alpha+4A+2)x^3+\Gamma^2(2A+1)x^2+\alpha x-(2A+1)= \\
=q_5x^5+q_4x^4+q_3x^3+q_2x^2+q_1x+q_0\,; \\
R=-2\Gamma^2Mx^5+\Big(-\Gamma^2\beta+5\Gamma^2M+\Gamma K-\Gamma L\Big)x^4+\Big(2\Gamma^2\beta-4\Gamma^2M-2\Gamma K+2\Gamma L\Big)x^3+ \\
+\Big(-\Gamma^2\beta+\Gamma^2M+K+\Gamma K+L-\Gamma L\Big)x^2+(2M-K-L)x+(\beta-M)= \\
=r_5x^5+r_4x^4+r_3x^3+r_2x^2+r_1x+r_0.
\end{gathered}$$

То есть, имеем уравнение

$$\left(p_6x^6 + p_5x^5 + p_4x^4 + p_3x^3 + p_2x^2 + p_1x\right)F'' +$$
$$+\left(q_5x^5 + q_4x^4 + q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x + q_0\right)F' +$$
$$+\left(r_5x^5 + r_4x^4 + r_3x^3 + r_2x^2 + r_1x + r_0\right)F = 0.$$

Будем строить решения в виде степенного ряда

$$F = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n x^n, \quad F' = \sum_{n=1}^{n=\infty} nc_n x^{n-1}, \quad F'' = \sum_{n=2}^{n=\infty} n(n-1)c_n x^{n-2};$$

проводя необходимые вычисления, приходим к 7-членным рекуррентным соотношениям:

$$n = 6,...$$
$$r_5c_{n-5} + \left[p_6(n^2 - 9n + 20) + g_5(n-4) + r_4\right]c_{n-4} +$$
$$+\left[p_5(n^2 - 7n + 12) + g_4(n-3) + r_3\right]c_{n-3} +$$
$$+\left[p_4(n^2 - 5n + 6) + g_3(n-2) + r_2\right]c_{n-2} +$$
$$+\left[p_3(n^2 - 3n + 2) + g_2(n-1) + r_1\right]c_{n-1} +$$
$$+\left[p_2(n^2 - n) + g_1n + r_0\right]c_n + \left[p_1(n^2 + n) + g_0(n+1)\right]c_{n+1} = 0.$$

Сходимость ряда исследуем методом Пуанкаре – Перрона [9, 10]. Делим последнее соотношение на c_{n-5} и умножаем его на n^{-2}, устремляем $n \to \infty$. В результате получим алгебраическое уравнение для величины, связанной с возможными радиусами сходимости степенного ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}}, \quad R_{\text{conv}} = |R|, \quad p_1 + p_2R + p_3R^2 + p_4R^3 + p_5R^4 + p_6R^5 = 0. \tag{20}$$

Это уравнение по-другому переписывается так:

$$(R-1)[1 - 4\gamma R(R-1)][1 + 4\gamma R(R-1)] = 0;$$

корни следующие:

$$R = 1, \quad R_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+\gamma^{-1}}}{2}, \quad R_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1+\gamma^{-1}}}{2}. \tag{21}$$

Минимального радиуса сходимости $R_{\text{conv}}^{\min} = 1$ достаточно, чтобы покрыть всю физическую область изменения переменной $x \in (0,1)$. На основе использованной подстановки можно построить две пары комплексно сопряженных решений. Можно построить решения как через степенные ряды по переменной (x), так и через степенные ряды по переменной (x – 1); они имеют простое асимптотическое поведение в разных особых точках. Дальше продвинуться с аналитическим исследованием туннельного эффекта для частицы Кокса в пространстве Лобачевского не удалось.

Анализ уравнения для обычной частицы в пространстве Лобачевского. Рассмотрим более простую задачу, возникающую при $\gamma = 0$. Это случай обычной скалярной частицы в пространстве Лобачевского:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon - 1 - U(z)\right)f(z) = 0, \quad U(z) = +\frac{\Lambda}{\text{ch}^2 z}, \quad U(z \to \pm\infty) = +0. \tag{22}$$

Это уравнение шредингеровского типа в простом поле барьерного типа $U = \Lambda\, \text{ch}^{-2} z$ с возможностью туннельного эффекта. Фактически решение этой математической задачи известно [11] в контексте анализа потенциалов, для которых одномерное уравнение Шредингера решается точно.

Поскольку анализ этот простой задачи обобщен выше на более сложный случай частицы Кокса, то для лучшего понимания ситуации имеет смысл кратко рассмотреть в этом же контексте и простой случай.

Применим переменную $x = (1-z)/2$, получим уравнение

$$\left[x(1-x)\frac{d^2}{dx^2} + (1-2x)\frac{d}{dx} - \Lambda + \frac{(\varepsilon-1)/4}{1-x} + \frac{(\varepsilon-1)/4}{x} \right] f = 0. \tag{23}$$

Вводя подстановку $f(x) = x^A (1-x)^B F(x)$, приходим к

$$x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2} + \left[2A+1-(2A+2B+2)x\right]\frac{dF}{dx} +$$

$$+\left[-(A+B)(A+B+1) - \Lambda + \frac{1}{4}\frac{4A^2+\varepsilon-1}{x} + \frac{1}{4}\frac{4B^2+\varepsilon-1}{1-x} \right] F = 0.$$

При A, B, выбранных согласно

$$A = \pm\frac{i}{2}\sqrt{\varepsilon-1}, \quad B = \pm\frac{i}{2}\sqrt{\varepsilon-1}, \tag{24}$$

уравнение упрощается до гипергеометрического типа

$$x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2} + \left[2A+1-(2A+2B+2)x\right]\frac{dF}{dx} - \left[(A+B)(A+B+1)+\Lambda\right]F = 0$$

с параметрами (применяем обозначение $\lambda = \sqrt{4\Lambda-1}$)

$$a = \frac{1}{2} + A + B + \frac{i\lambda}{2}, \quad b = \frac{1}{2} + A + B - \frac{i\lambda}{2}, \quad c = 2A+1,$$

$$f(x) = x^A (1-x)^B F(x), \quad F(a,b,c;x), \quad x = \frac{1-z}{2}. \tag{25}$$

Выберем решение с заданным поведением в области $z \to +\infty$ $(x \to 0)$ в виде плоской волны, двигающейся направо:

$$A = -i\sqrt{\varepsilon-1}/2, \quad B = +i\sqrt{\varepsilon-1}/2,$$

$$f = x^{-i\sqrt{\varepsilon-1}/2}(1-x)^{+i\sqrt{\varepsilon-1}/2} F(a_1,b,c;x),$$

$$a = \frac{1}{2} + \frac{i\lambda}{2}, \quad b = \frac{1}{2} - \frac{i\lambda}{2}, \quad c = -i\sqrt{\varepsilon-1} + 1,$$

$$f(x \to 0) = x^{-i\sqrt{\varepsilon-1}/2} = e^{+iz\sqrt{\varepsilon-1}/2}. \tag{26}$$

Чтобы найти поведение этого решения при $z \to -\infty$ $(x \to 1)$, воспользуемся соотношением Куммера

$$u_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} u_2 + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u_6, \tag{27}$$

где

$$u_1 = F(a,b,c;x), \quad u_2 = F(a,b,a+b+1-c;1-x),$$

$$u_6 = (1-x)^{c-a-b} F(c-a,c-b,c+1-a-b;1-x).$$

В области $z \to -\infty$ $(x \to 1)$ соотношение Куммера (27) принимает вид

$$u_1(z \to -\infty) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-x)^{c-a-b}, \quad c-a-b = -i\sqrt{\varepsilon-1},$$

что после умножения на $x^{-i\sqrt{\varepsilon-1}/2}\,(1-x)^{i\sqrt{\varepsilon-1}/2}$ дает нужную асимптотическую формулу:

$$f(z\to-\infty)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}(1-x)^{-i\sqrt{\varepsilon-1}/2}+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-x)^{+i\sqrt{\varepsilon-1}/2}. \tag{28}$$

По-другому она записывается так:

$$f(z\to-\infty)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}e^{+iz\sqrt{\varepsilon-1}/2}+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}e^{-iz\sqrt{\varepsilon-1}/2}. \tag{29}$$

Эта формула описывает эффект туннелирования частицы, падающей на барьер слева:

$$(z\to-\infty)Me^{+iz\sqrt{\varepsilon-1}/2}+Ne^{-iz\sqrt{\varepsilon-1}/2}\longrightarrow e^{+iz\sqrt{\varepsilon-1}/2}(z\to+\infty). \tag{30}$$

Коэффициент прохождения D равен

$$D=\frac{|M|^2}{|N|^2}=\left|\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\right|^2, \tag{31}$$

где

$$\Gamma(a)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{i\lambda}{2}\right),\ \ \Gamma(b)=\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{i\lambda}{2}\right),$$

$$\Gamma(c-a)=\Gamma\left(\frac{1}{2}-i(\sqrt{\varepsilon-1}+\lambda/2)\right),\quad \Gamma(c-b)=\Gamma\left(\frac{1}{2}-i(\sqrt{\varepsilon-1}-\lambda/2)\right).$$

Можно продолжить вычисления, если воспользоваться известной формулой для Г-функций:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+iZ\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-iZ\right)=\frac{\pi}{\cos i\pi Z}=\frac{\pi}{\pi Z}.$$

Ситуацию, когда частица падает на барьер справа, можно исследовать аналогично, если выбрать решения со следующей асимптотикой в области $z\to-\infty(x\to1)$:

$$A=-i\sqrt{\varepsilon-1}/2,\quad B=+i\sqrt{\varepsilon-1}/2,$$
$$g(x)=x^A(1-x)^B u_6(x)=x^{-i\sqrt{\varepsilon-1}/2}(1-x)^{+i\sqrt{\varepsilon-1}/2}\times$$
$$\times(1-x)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c+1-a-b;1-x),$$
$$a=\frac{1}{2}+\frac{i\lambda}{2},\ \ b=\frac{1}{2}-\frac{i\lambda}{2},\ \ c=-i\sqrt{\varepsilon-1}+1,$$
$$g\big(z\to-\infty(x\to1)\big)=(1-x)^{-i\sqrt{\varepsilon-1}/2}=e^{-iz\sqrt{\varepsilon-1}/2}. \tag{32}$$

Чтобы найти асимптотику этого решения в области $z\to+\infty(x=0)$, нужно воспользоваться формулой Куммера

$$u_6(x)=\frac{\Gamma(c+1-a-b)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}u_1(z)+\frac{\Gamma(c+1-a-b)\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}u_5, \tag{33}$$
$$u_6=F(a,b,a+b+1-c;1-x),\quad u_1(x)=F(a,b,c;x),$$
$$u_5=x^{1-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c;x).$$

В области $x\to0$ это соотношение принимает вид

$$u_6(x)=\frac{\Gamma(c+1-a-b)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}+\frac{\Gamma(c+1-a-b)\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}x^{i\sqrt{\varepsilon-1}},\ \ 1-c=+i\sqrt{\varepsilon-1};$$

после умножения на $x^{-i\sqrt{\varepsilon-1}/2}$ получаем

$$g\big(z\to+\infty(x\to0)\big)=$$
$$=\frac{\Gamma(c+1-a-b)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}x^{-i\sqrt{\varepsilon-1}/2}+\frac{\Gamma(c+1-a-b)\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}x^{+i\sqrt{\varepsilon-1}/2}, \tag{34}$$

что можно переписать иначе:

$$g\left(z \to +\infty(x \to 0)\right) =$$
$$= \frac{\Gamma(c+1-a-b)\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} e^{-iz\sqrt{\varepsilon-1}/2} + \frac{\Gamma(c+1-a-b)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} e^{+iz\sqrt{\varepsilon-1}/2}. \quad (35)$$

Таким образом, волна, двигаясь справа, частично проходит, а частично отражается от барьера:

$$z \to -\infty \longleftarrow M' e^{-iz\sqrt{\varepsilon-1}/2} + N' e^{+iz\sqrt{\varepsilon-1}/2} (z \to +\infty). \quad (36)$$

Коэффициент прохождения $D' = 1 - R'$ налево равен

$$D' = \frac{|M'|^2}{|N'|^2} = \left| \frac{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \right|^2, \quad (37)$$

где

$$\Gamma(1-a) = \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{i\lambda}{2}\right), \quad \Gamma(1-b) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{i\lambda}{2}\right),$$
$$\Gamma(c-a) = \Gamma\left(\frac{1}{2} - i(\sqrt{\varepsilon-1} + \lambda/2)\right), \quad \Gamma(c-b) = \Gamma\left(\frac{1}{2} - i(\sqrt{\varepsilon-1} - \lambda/2)\right).$$

Вычисления коэффициента повторять нет необходимости, поскольку результат будет прежним. Это согласуется с симметрией исходного уравнения относительно преобразования $z \to -z$.

Список использованных источников

1. Cox, W. Higher-rank representations for zero-spin field theories / W. Cox // J. Phys. Math. Gen. – 1982. – Vol. 15, № 2. – P. 627–635.

2. Schweber, S. S. An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory / S. S. Schweber. – NewYork: Harper&Row, Publ., Inc., 1961. – 905 p.

3. Овсиюк, Е. М. Скалярная частица с внутренней структурой в электромагнитном поле в искривленном пространстве-времени / Е. М. Овсиюк. О. В. Веко, К. В. Казмерчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20). – С. 32–36.

4. Quantum mechanical scalar particle with intrinsic structure in external magnetic and electric fields: influence of geometrical background / O. V. Veko [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2014. – Vol. 17, № 4. – P. 464–466.

5. Ovsiyuk, E. M. Spin zero Cox's particle with an intrinsic structure: general analysis in external electromagnetic and gravitational fields / E. M. Ovsiyuk // Ukr. J. Phys. – 2015. – Vol. 60, № 6. – P. 485–496.

6. Veko, O. V. Cox's particle in magnetic and electric fields on the background of hyperbolic Lobachevsky geometry / O. V. Veko // Proc. of the IX Int. Conf. «Methods of non-Euclidean geometry in physics and mathematics», Bolyai–Gauss–Lobachevsky-9 (BGL-9), Minsk, 27–30 Nov. 2015 / ed. by Yu. Kurochkin, V. Red'kov. – Minsk, 2015. – P. 284–294.

7. Veko, O. V. Cox's particle in magnetic and electric fields on the background of hyperbolic Lobachevsky geometry / O. V. Veko // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2016. – Vol. 19, № 1. – P. 50–61.

8. Веко, О. В. Нерелятивистская частица Кокса с внутренней структурой в электрическом поле: анализ в пространстве Лобачевского / О. В. Веко, Е. М. Овсиюк, В. М. Редьков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 71–81.

9. Ronveaux, A. Heun's Differential Equation / A. Ronveaux. – Oxford: Oxford University Press, 1995. – 380 p.

10. Slavyanov, S. Yu. Special Functions. A Unified Theory Based on Singularities / S. Yu. Slavyanov, W. Lay. – Oxford: Oxford University Press, 2000. – 312 p.

11. Ландау, Л. Д. Квантовая механика (нерелятивистская теория) / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: Наука, 1974. – 752 с.

References

1. Cox W. Higher-rank representations for zero-spin field theories. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1982, vol. 15, no. 2, pp. 627–635. Doi: 10.1088/0305-4470/15/2/029

2. Schweber S. S. *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*. New York, Harper&Row, Publishers, Inc., 1961. 905 p.

3. Ovsiyuk E. M., Veko O. V., Kazmerchuk K. V. Scalar particle with intrinsic structure in electromagnetic field in curved space. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2014, no. 3 (20), pp. 32–36 (in Russian).

4. Veko O. V., Kazmerchuk K. V., Kisel V. V., Ovsiyuk E. M., Red'kov V. M. Quantum mechanical scalar particle with intrinsic structure in external magnetic and electric fields: influence of geometrical background. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2014, vol. 17, no. 4, pp. 464–466.

5. Ovsiyuk E. M. Spin zero Cox's particle with an intrinsic structure: general analysis in external electromagnetic and gravitational fields. *Ukrainian Journal of Physics*, 2015, vol. 60, no. 6, pp. 485–496. Doi: 10.15407/ujpe60.06.0485

6. Veko O. V. Cox's particle in magnetic and electric fields on the background of hyperbolic Lobachevsky geometry. Kurochkin Yu., Red'kov V. (eds.) *Proceedings of the IX International Conference «Methods of non-Euclidean geometry in physics and mathematics», Bolyai – Gauss – Lobachevsky-9 (BGL-9), Minsk, 27–30 November 2015*. Minsk, 2015, pp. 284–294.

7. Veko O. V. Cox's particle in magnetic and electric fields on the background of hyperbolic Lobachevsky geometry. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2016, vol. 19, no. 1, pp. 50–61.

8. Veko O. V., Ovsiyuk E. M., Red'kov V. M. Cox nonrelativistic particle of intrinsic structure in the electric field: analysis in the Lobachevsky space. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2017, no. 2, pp. 71–81 (in Russian).

9. Ronveaux A. *Heun's Differential Equation*. Oxford, Oxford University Press, 1995. 380 p.

10. Slavyanov S. Yu., Lay W. *Special Functions. A Unified Theory Based on Singularities*. Oxford, Oxford University Press, 2000. 312 p.

11. Landau L. D., Lifshits E. M. *Quantum mechanics (non-relativistic theory).* 3rd ed. Moscow, Nauka Publ., 1974. 752 p. (in Russian).

Информация об авторах

Веко Ольга Владимировна – аспирант, Институт физики им. Б. И. Степанова, Национальная академия наук Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vekoolga@mail.ru

Войнова Янина Александровна – аспирант, Институт физики им. Б. И. Степанова, Национальная академия наук Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail; E-mail: voinyuschka@mail.ru

Овсиюк Елена Микайловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики и методики преподавания физики, Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина (ул. Студенческая, 28, 247760, г. Мозырь, Гомельская обл., Республика Беларусь). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

Редьков Виктор Михайлович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник центра теоретической физики Института физики им. Б. И. Степанова, Национальная академия наук Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: redkov@dragon.bas-net.by

Information about the authors

Olga V. Veko – Postgraduate, B. I. Stepanov Institute of Physics, National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vekoolga@mail.ru

Yanina A. Voynova – Postgraduate, B. I. Stepanov Institute of Physics, National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: voinyuschka@mail.ru

Elena M. Ovsiyuk – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin (28, Studencheskaya Str, 247760, Mozyr, Republic of Belarus). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

Viktor M. Red'kov – D. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher, Center of Theoretical Physics, B. I. Stepanov Institute of Physics, National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: redkov@dragon.bas-net.by