ISSN 1561-2430 (print)
УДК 539.21

Поступила в редакцию 30.06.2017
Received 30.06.2017

Н. Г. Крылова[1], Г. В. Грушевская[1], В. М. Редьков[2]

[1]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
[2]Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

ДИНАМИКА ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ 1-ГО РОДА В ФИНСЛЕРОВОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕНГМЮРОВСКОГО МОНОСЛОЯ

Аннотация. В работе получены уравнения Эйлера – Лагранжа, описывающие динамику фазового перехода 1-го рода в конфигурационном финслеровом пространстве ленгмюровского монослоя. Развит приближенный метод анализа полученных уравнений, который основан на сочетании аналитического и численного исследований с использованием нулевого приближения при фиксированном времени релаксации и более точного приближения с модельным распределением времен релаксации. Показана гетерогенность динамики системы, что соответствует метастабильному состоянию монослоя при наличии зародышей фаз с различными временами релаксации. Распределение времен релаксации характеризуется наличием максимума, причем его высота зависит от скорости сжатия монослоя. Рост максимума в распределении времен релаксации при повышении скорости сжатия ассоциируется с появлением выраженного плато на изотерме. На этой основе теоретически обосновано характерное поведение изотерм сжатия монослоя в области фазового перехода. Аналитически исследована динамика двумерного фазового перехода при малых скоростях сжатия и проведен сравнительный анализ поведения системы в двух приближениях: в приближении одного времени релаксации и в приближении модельного распределения времен релаксации. Показано, что существование зародышей фаз с различными временами релаксации приводит к появлению эффективной центробежной силы, величина которой зависит от градиента электрокапиллярных сил.

Ключевые слова: фазовый переход первого рода, динамика Эйлера – Лагранжа, пространство Финслера, ленгмюровский монослой, распределение времен релаксации

Для цитирования. Крылова, Н. Г. Динамика фазовых переходов 1-го рода в финслеровом конфигурационном пространстве ленгмюровского монослоя / Н. Г. Крылова, Г. В. Грушевская, В. М. Редьков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 3. – С. 66–77.

N. G. Krylova[1], H. V. Grushevskaya[1], V. M. Red'kov[2]

[1]Belarusian State University, Minsk, Belarus
[2]B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

FIRST-ORDER PHASE TRANSITION DYNAMICS IN THE FINSLER CONFIGURATION SPACE OF THE LANGMUIR MONOLAYER

Abstract. In the article, the Euler – Lagrange equations, which describe first-order phase transition dynamics in a configuration Finsler space of a Langmuir monolayer, have been obtained. An approximate method for analysis of the equations has been developed. The method is based on a combination of analytical and numerical calculations using the zero-order approximation with a fixed relaxation time and the more exact approximation with a model distribution of relaxation times. Heterogeneous dynamics of the system has been demonstrated. Such dynamics corresponds to the monolayer metastable state with different relaxation times of phase nuclei. The relaxation time distribution has a maximum and a maximum height depends on a monolayer compression rate. The increase of the maximum height at enhancement of a compression rate is accompanied by an explicit plateau of the isotherm that displays the characteristic behavior of the monolayer isotherm in the region of phase transition. The dynamics of a two-dimensional phase transition has been numerically studied at the compression rate as being sufficiently low, and a comparative analysis of the system behavior at two approximations (the approximation of fixed relaxation time and the approximation of model distribution of relaxation times) has been made. It has been found that the presence of phase nuclei with different relaxation times causes an effective centrifugal force, the magnitude of which depends on the gradient of electrocapillary forces.

Keywords: first-order phase transition, Euler – Lagrange dynamics, Finsler space, Langmuir monolayer, relaxation time distribution

For citation. Krylova N. G., Grushevskaya H. V., Red'kov V. M. First-order phase transition dynamics in the Finsler configuration space of the Langmuir monolayer. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2017, no. 3, pp. 66–77 (in Russian).

© Крылова Н. Г., Грушевская Г. В., Редьков В. М., 2017

Введение. В настоящее время для изготовления высокоупорядоченных наноматериалов на основе органических амфифильных молекул применяется технология Ленгмюра – Блоджетт (ЛБ) [1]. Получаемые с использованием ЛБ-технологии тонкопленочные материалы применяются для создания композитных сенсорных и сегнетоэлектрических наноструктур для электроники [2].

В процессе сжатия ленгмюровского слоя толщиной в одну молекулу (монослоя) на поверхности полярной жидкости наблюдаются последовательные двумерные (2D) фазовые переходы 1-го рода из состояния растянутой жидкости в жидкокристаллическое, а затем − в кристаллическое состояние [1, 3, 4].

Фазовый переход первого рода протекает в три стадии: две из них представляют собой быстрый и медленный релаксационные процессы соответственно с малым и большим временем жизни. Третья стадия – это промежуточное метастабильное состояние, для динамики которого характерно существование зародышей фаз (релаксационных единиц) с различными временами жизни (т. е. динамика этой стадии гетерогенна). При определенных условиях вещество в переходном метастабильном состоянии из одной фазы в другую может существовать достаточно долго [5]. Так, стеклообразное состояние является метастабильным состоянием с распределением времен релаксации [6]. В рамках теории случайных графов в [7] было установлено, что фазовый переход первого рода проявляется как сужение распределения возможных конфигураций ансамбля частиц и протекает через гетерогенную фазу (метастабильное состояние). Известная теория [8–12] фазовых переходов 1-го рода базируется на предположении о существовании двух временных масштабов до и после перехода в стеклообразное состояние, при этом не учитывается возможность распределения зародышей фаз по различным временам релаксации [13, 14].

Экспериментально показано, что 2D-фазовые переходы 1-го рода существенно зависят от условий формирования монослоев: ионного состава субфазы, температуры, величины скорости сжатия [4, 17–23]. Влияние скорости сжатия на протекание 2D-фазовых переходов обусловлено поворотом диполей на границе раздела фаз и перераспределением плотности заряда двойного электрически заряженного слоя Гельмгольца [17, 19, 22, 23]. Эти процессы носят название электрокапиллярных явлений. Ранее, при построении моделей фазовых переходов в ленгмюровских монослоях, электрокапиллярные явления на границе раздела фаз не учитывались [17, 24]. Однако экспериментальные исследования [17–21] показывают, что их влияние существенно, что делает теоретическое описание этих явлений важным для понимания процессов структуризации и формирования доменной структуры ЛБ-пленок.

В работах [23, 25, 26] был найден эффективный потенциал, описывающий электрокапиллярные явления и определяющий суммарный эффект взаимодействия молекул субфазы с молекулами ленгмюровского монослоя. С использованием этого потенциала было предложено геометрическое описание конфигурационного пространства системы и построена финслерова метрическая функция такого пространства. При этом рассмотрение финслерового конфигурационного пространства позволяет моделировать возможность распределения зародышей кристаллической фазы по временам релаксации.

Целью настоящей работы является изучение особенностей динамики двумерных фазовых переходов 1-го рода в ленгмюровских монослоях при наличии зародышей фаз с различными временами релаксации. Такая гетерогенная динамика моделируется в финслеровом конфигурационном пространстве.

Геодезические в конфигурационном финслеровом пространстве. Фазовое пространство $\left\{\vec{r},\dot{\vec{r}},t,\dot{\xi}\right\}$ определяет расширенное конфигурационное пространство монослоя. Здесь координаты $\vec{r}\equiv\{r,\varphi\}$ и t определяют радиус-вектор и время возникновения зародыша кристаллической фазы; $\dot{\xi}$, $\dot{r}$ и $\dot{\varphi}$ обозначают производные от координат t, r, φ по эволюционному параметру s. Величина $\dot{\xi}$ обозначает время релаксации, а $\dot{r}$ и $\dot{\varphi}$ – радиальную и угловую компоненты скорости зародыша фазы. При таком рассмотрении эволюционный параметр s определяет число образовавшихся фазовых элементов макроскопической системы [23].

Метрическая функция F^2 3-мерного финслерового пространства задается выражениями [23, 25, 26]

$$F^2 = A\frac{\dot{\xi}^3}{\dot{r}} + B\dot{\xi}^2 - C\frac{\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)}{2}, \tag{1}$$

$$B = \Lambda^2 - \tilde{p}\left(P_1 e^{\frac{2Vt}{r}} - \frac{2}{3}(Vt)^5\left(6 - \frac{Vt}{r}\right)Ei\left[\frac{2Vt}{r}\right]\right), \quad A = \tilde{p}V\left(P_2 e^{\frac{2Vt}{r}} - \frac{4}{3}(Vt)^5 Ei\left[\frac{2Vt}{r}\right]\right),$$
$$C = ma_c^2 n_c, \qquad \tilde{p} = \frac{p}{n_c} = \frac{q^2 k}{5\varepsilon\varepsilon_0 n_c}\frac{n_0^2}{R_0^2}; \tag{2}$$

где

$$P_1 = -\frac{3}{4}r^5 + (Vt)r^4 + \frac{3}{4}(Vt)^2 r^3 + \frac{5}{6}(Vt)^3 r^2 + \frac{11}{6}(Vt)^4 r - \frac{1}{3}(Vt)^5,$$
$$P_2 = r^5 + \frac{1}{2}(Vt)r^4 + \frac{1}{3}(Vt)^2 r^3 + \frac{1}{3}(Vt)^3 r^2 + \frac{2}{3}(Vt)^4 r;$$

Λ – вспомогательная константа, имеющая размерность энергии и позволяющая ввести метрическую функцию как положительно определенную и однородную 2-го порядка по скоростям; V – скорость сжатия монослоя; Ei – интегральная показательная функция; n_0 и R_0 – поверхностная плотность и радиус монослоя в начальный момент времени $t_0 = 0$; k – коэффициент, характеризующий ориентационную релаксацию поверхностных диполей; q – заряд гидрофильной части молекулы в водной субфазе; n_c и a_c – поверхностная плотность и критический размер зародыша кристаллической фазы; m – масса молекулы монослоя. Используем обозначения $x^j = (t, r, \varphi)$ и $y^j = (\dot{\xi}, \dot{r}, \dot{\varphi})$. Финслеров метрический тензор g_{ij} задается формулой [27, 28]

$$g_{ij}\left(x^k, y^k\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j} = \begin{pmatrix} 3A\frac{\dot{\xi}}{\dot{r}} + B & -\frac{3}{2}A\left(\frac{\dot{\xi}}{\dot{r}}\right)^2 & 0 \\ -\frac{3}{2}A\left(\frac{\dot{\xi}}{\dot{r}}\right)^2 & A\left(\frac{\dot{\xi}}{\dot{r}}\right)^3 - \frac{C}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{C}{2}r^2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Геодезические в финслеровом пространстве определяются уравнениями Лагранжа – Эйлера [27]:

$$\frac{dy^i}{ds} + 2G^i = 0, \quad G^i = \frac{1}{4}g^{il}\left\{2\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right\}y^j y^k. \tag{4}$$

Для метрики (3) компоненты вектора G^i записываются так:

$$G^1 = \frac{A}{4\Delta_2}\left[\frac{1}{2}A_t\frac{\dot{\xi}^6}{\dot{r}^4} + B_t\frac{\dot{\xi}^5}{\dot{r}^3} + \frac{1}{2}B_r\frac{\dot{\xi}^4}{\dot{r}^2} + \frac{3}{2}Cr\frac{\dot{\xi}^2\dot{\varphi}^2}{\dot{r}^2}\right] - \frac{C}{8\Delta_2}\left[2A_t\frac{\dot{\xi}^3}{\dot{r}} + B_t\dot{\xi}^2 + 3A_r\dot{\xi}^2 + 2B_r\dot{\xi}\dot{r}\right],$$
$$G^2 = \frac{3}{4}\frac{A}{\Delta_2}\left[-\frac{1}{2}A_r\frac{\dot{\xi}^4}{\dot{r}^2} + \frac{1}{2}B_t\frac{\dot{\xi}^4}{\dot{r}^2} + Cr\frac{\dot{\xi}\dot{\varphi}^2}{\dot{r}}\right] - \frac{B}{4\Delta_2}\left[A_t\frac{\dot{\xi}^4}{\dot{r}^2} + 2A_r\frac{\dot{\xi}^3}{\dot{r}} + B_r\dot{\xi}^2 - Cr\dot{\varphi}^2\right], \tag{5}$$
$$G^3 = \frac{1}{r}\dot{r}\dot{\varphi},$$

где использованы обозначения

$$\Delta_2 = \frac{3A^2}{4}\left(\frac{\dot{\xi}}{\dot{r}}\right)^4 + AB\left(\frac{\dot{\xi}}{\dot{r}}\right)^3 - \frac{3AC}{2}\frac{\dot{\xi}}{\dot{r}} - \frac{BC}{2},$$

$$A_t = \frac{\partial A}{\partial t},\ A_r = \frac{\partial A}{\partial r},\ B_t = \frac{\partial B}{\partial t},\ B_r = \frac{\partial B}{\partial r}.$$

Уравнения (4)–(5) являются сложными. Рассмотрим их численное решение. Начальные условия выбираем такими: $\dot{\xi}(s=0) := 1$ и $\dot{r}(s=0) := \dot{r}_0$. Эти условия означают, что рассматриваем начало эволюции макроскопической системы с появления зародыша фазы критического размера. Начальная скорость $\dot{r}_0$ оценивается из равенства кинетической энергии зародыша и разности энергий поверхностного натяжения до и после распада гидратного комплекса. При этом получаем $mn_c a_c^2 \dot{r}_0^2 = \tilde{\pi}_c a_c^2$, где значение коэффициента поверхностного натяжения $\tilde{\pi}_c$ находится из эксперимента. Таким образом, величина $\dot{r}_0$ может лежать в диапазоне 10^{-6}–10^{-5} м/с (для определенности оценка делалась для случая монослоя стеариновой кислоты).

Результаты численного анализа при различных скоростях сжатия V показаны на рис. 1 и 2. Зависимость $\dot{\xi}(s)$ имеет максимум, который сдвигается в сторону малых значений параметра s с увеличением скорости сжатия. До и после экстремального значения s релаксационные процессы протекают с большими и малыми временами соответственно. В области экстремального значения s динамика системы гетерогенна. Резкий максимум в $\dot{\xi}(s)$ при больших V (см. рис. 1, *a*, *b*) ассоциируется с ярко выраженным плато на кривой $s(r)$ (см. рис. 2, *a*, *b*).

Чтобы проанализировать зависимость координаты r от параметра эволюции s, найдем связь между приращением поверхностного давления $\Delta\tilde{\pi}$ (обусловленным появлением в метастабильном монослое зародышей кристаллической фазы) и параметром s. В случае слабо взаимодействующих зародышей можно воспользоваться двумерным уравнением состояния идеального газа

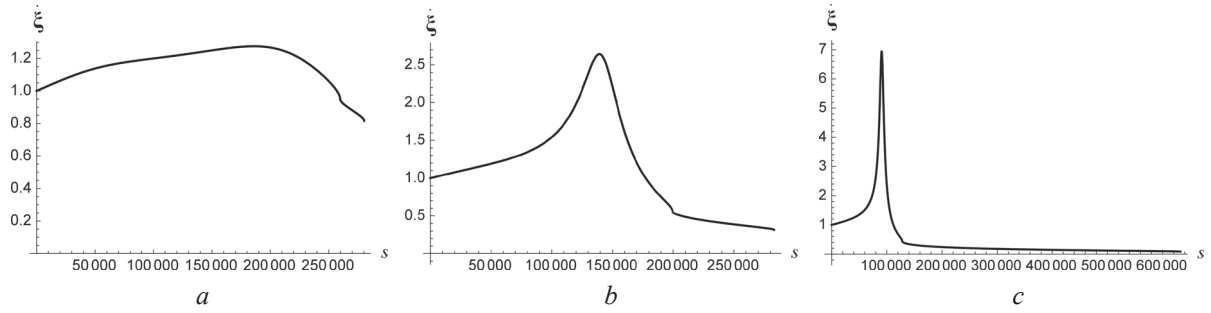
$$\Delta\tilde{\pi} S = N k_B T, \tag{6}$$

где S – площадь монослоя; N – число зародышей фазы; T – температура; k_B – постоянная Больцмана. Пусть в начальный момент времени t_0 образуются зародыши в точках монослоя r_0^i. Количество зародышей в произвольный момент времени t задается соотношением

$$N = \sum_i s\left(t, r_0^i\right),$$

переходя к непрерывному пределу и используя теорему о среднем, получаем

$$N = \iint_S s(t, r_0) r_0\, dr_0\, d\varphi \approx s(t, \langle r_0 \rangle) S.$$



a *b* *c*

Рис. 1. Распределение времен релаксации при различных скоростях сжатия монослоя; начальные условия: $\dot{\xi}(s=0)=1$, $\dot{r}(s=0)=-5\cdot10^{-6}$ м/с, $\xi(s=0)=0$, $r(s=0)=1$ м; значения скорости сжатия: $V = 2\cdot10^{-6}$ м/с (*a*); $V = 3\cdot10^{-6}$ м/с (*b*); $V = 4\cdot10^{-6}$ м/с (*c*)

Fig. 1. Distribution of relaxation times at different monolayer compression rates; initial conditions: $\dot{\xi}(s=0)=1$, $\dot{r}(s=0)=-5\cdot10^{-6}$ m/s, $\xi(s=0)=0$, $r(s=0)=1$ m; compression rates: $V = 2\cdot10^{-6}$ m/s (*a*); $V = 3\cdot10^{-6}$ m/s (*b*); $V = 4\cdot10^{-6}$ m/s (*c*)

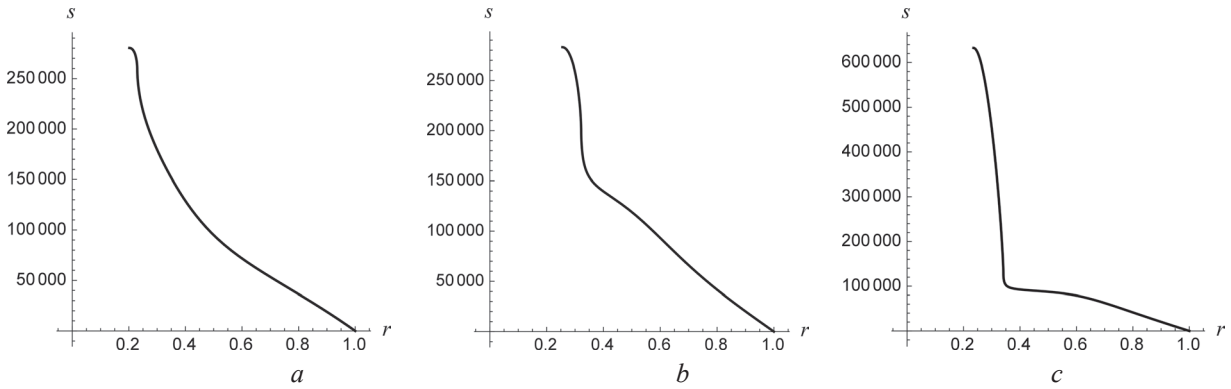


Рис. 2. Зависимость параметра эволюции от координаты r; начальные условия: $\dot{\xi}(s=0)=1$, $\dot{r}(s=0)=-5\cdot10^{-6}$ м/с, $\xi(s=0)=0$, $r(s=0)=1$ м; значения скорости сжатия: $V=2\cdot10^{-6}$ м/с (*a*); $V=3\cdot10^{-6}$ м/с (*b*) ; $V=4\cdot10^{-6}$ м/с (*c*)

Fig. 2. Dependence of the evolution parameter on the radial coordinate r; initial conditions: $\dot{\xi}(s=0)=1$, $\dot{r}(s=0)=-5\cdot10^{-6}$ m/s, $\xi(s=0)=0$, $r(s=0)=1$ m; compression rates: $V=2\cdot10^{-6}$ m/s (*a*) ; $V=3\cdot10^{-6}$ m/s (*b*) ; $V=4\cdot10^{-6}$ m/s (*c*)

Учитывая последнее равенство в уравнении состояния (6), находим

$$\Delta\tilde{\pi}\sim s.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что представленные на рис. 2 зависимости $s(r)$ также описывают поведение изотерм $\Delta\tilde{\pi}(r)$ в процессе фазового перехода при различных скоростях сжатия монослоя. При низких скоростях V с уменьшением r происходит постепенное возрастание поверхностного давления $\Delta\tilde{\pi}$, при этом изотерма $\Delta\tilde{\pi}(r)$ «негоризонтальна» в области фазового перехода (см. рис. 2, *a*, *b*). При увеличении скорости V появляется ярко выраженное плато (см. рис. 2, *c*). Теоретическое объяснение «негоризональности» плато изотерм для двумерных систем является важной задачей, поскольку такого типа поведение наблюдается экспериментально [17, 18, 21, 29, 30]. Зависимость этого эффекта от скоростей сжатия также наблюдалась экспериментально для изотерм сжатия монослоев производных дитионилпирролового ряда [29].

Как видно из рис. 1, времена релаксации при малых скоростях сжатия и $s < 10\,000$ распределены в узком диапазоне в окрестности $\dot{\xi}=1$. Поэтому приблизительно можно считать, что при малых значениях параметра s все фазовые элементы распадаются с одним временем релаксации, а распределение $\dot{\xi}=1$ может быть использовано для описания конфигураций монослоя в приближении одного времени релаксации. Это соответствует образованию зародышей кристаллической фазы только одного критического размера.

Повышение скорости сжатия приводит к существенно нелинейной зависимости $\dot{\xi}(s)$. Как следует из рис. 3, модельное распределение времен релаксации в форме

$$\dot{\xi}=1+\frac{\alpha}{r(s)} \tag{7}$$

можно выбрать как первое приближение при невысоких скоростях сжатия V.

Далее сравним динамику в приближении одного времени релаксации с динамикой в случае модельного распределения времен релаксации (7).

Динамика системы с одним временем релаксации. С учетом явной зависимости $\dot{\xi}(t,r(t))$ выполним анализ системы, перейдя от финслеровой функции к функции Лагранжа $L(t)$ в соответствии с соотношением [23]

$$F^2=\Lambda^2\dot{\xi}^2-L(t(s))\dot{\xi}. \tag{8}$$

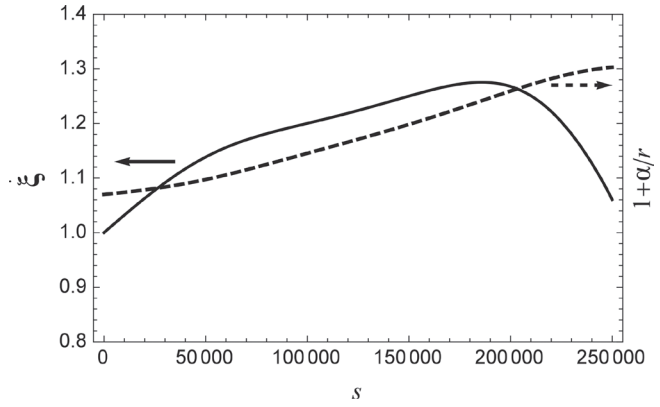


Рис. 3. Эволюция $\dot{\xi}(s)$ (сплошная кривая) и ее аппроксимация (7) (пунктирная кривая); начальные условия: $\dot{\xi}(s=0)=1$, $\dot{r}(s=0)=-5\cdot10^{-6}$ м/с, $\xi(s=0)=0$, $r(s=0)=1$ м; значения параметров: $V=2\cdot10^{-6}$ м/с, $qn_0=0{,}3$ Кл/м^2, $\varepsilon_{H_2O}=81$, $R_0=10$ м, $k=0{,}1$ м$^{-2}$, $ma_c^2n_c=10^{-5}$, $\tilde{p}=\Lambda^2=1$; параметр аппроксимации: $\alpha=0{,}07$

Fig. 3. Evolution of $\dot{\xi}(s)$ (solid line) and its approximation (7) (dash line); initial conditions: $\dot{\xi}(s=0)=1$, $\dot{r}(s=0)=-5\cdot10^{-6}$ m/s, $\xi(s=0)=0$, $r(s=0)=1$ m; monolayer parameters: $V=2\cdot10^{-6}$ m/s, $qn_0=0.3$ C/m^2, $\varepsilon_{H_2O}=81$, $R_0=10$ m, $k=0.1$ m^{-2}, $ma_c^2n_c=10^{-5}$, $\tilde{p}=\Lambda^2=1$; approximation parameter: $\alpha=0.07$

С использованием приближения $\dot{\xi}=1$ в метрической функции (8) следует заменить s на t, при этом слагаемое Λ^2 в (8) можно опустить. Тогда трехмерное финслерово пространство сводится к двумерному пространству (r, φ) с функцией Лагранжа в виде

$$L(t,r,\dot{r},\dot{\varphi})=\frac{M}{2}\dot{r}^2+\frac{Mr^2}{2}\dot{\varphi}^2-\tilde{p}V\left(P_2e^{\frac{2Vt}{r}}-\frac{4}{3}(Vt)^5Ei\left[\frac{2Vt}{r}\right]\right)\cdot\dot{r}^{-1}+$$
$$+\tilde{p}\left(P_1e^{\frac{2Vt}{r}}-\frac{2}{3}(Vt)^5\left(6-\frac{Vt}{r}\right)Ei\left[\frac{2Vt}{r}\right]\right),$$

где M – масса зародыша кристаллической фазы.

В работах [23, 25] показано, что потенциал электрокапиллярных сил можно упростить без существенного изменения особенностей его поведения. Поэтому далее будем использовать упрощенный лагранжиан

$$L(t,r,\dot{r},\dot{\varphi})=\frac{M}{2}\dot{r}^2+\frac{Mr^2}{2}\dot{\varphi}^2-\tilde{p}r^5Ve^{\frac{2Vt}{r}}\cdot\dot{r}^{-1}+U_{1a}(t,r), \tag{9}$$

где

$$U_{1a}(t,r)=\tilde{p}\left(P_3e^{\frac{2Vt}{r}}-\frac{4}{45}(Vt)^5\left(-1+1{,}14\frac{Vt}{r}\right)Ei\left[\frac{2Vt}{r}\right]\right). \tag{10}$$

Лагражиану (9) соответствуют уравнения движения:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+2G^i\left(t,x^k,y^k\right)=0,\qquad\left\{y^k,\dot{t}=1\right\}=\left\{\frac{dx^k}{dt},\frac{dt}{ds}=1\right\}; \tag{11}$$

метрический тензор g_{ij} имеет следующий вид [31]:

$$g_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2L}{\partial y^i\partial y^j}=\begin{pmatrix}\dfrac{M-2\tilde{p}r^5Ve^{\frac{2Vt}{r}}\cdot\dot{r}^{-3}}{2} & 0\\ 0 & \dfrac{Mr^2}{2}\end{pmatrix},$$

где $x^i = \{r, \varphi\}$ и $y^i = \dfrac{dx^k}{dt} = \dot{x}^k = \{\dot{r}, \dot{\varphi}\}$. Функции G^i определяются выражением [31]

$$G^i \overset{\text{def}}{=} \frac{g^{is}}{4}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^s} y^j - \frac{\partial L}{\partial x^s} + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial y^s}\right], \tag{12}$$

явный вид компонент вектора G^i следующий:

$$G^1 = \frac{\tilde{p} r^3 Ve^{\frac{2Vt}{r}}\left(5r\dot{r}^{-1} - 2Vt\dot{r}^{-1} + Vr\dot{r}^{-2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial U_{1a}}{\partial r} - \frac{Mr}{2}\dot{\varphi}^2}{M - 2\tilde{p} r^5 Ve^{\frac{2Vt}{r}} \cdot \dot{r}^{-3}}, \qquad G^2 = \frac{\dot{r}}{r}\dot{\varphi}. \tag{13}$$

Тогда уравнение для φ из (11) представимо так:

$$2\dot{\varphi}\dot{r} / r + \ddot{\varphi} = 0. \tag{14а}$$

Отсюда следует выражение для φ:

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\dot{\varphi}(0)}{r(t)^2}. \tag{14б}$$

С учетом (14б) и выражения для G^1 (13) радиальное уравнение принимает вид

$$\ddot{r} + \frac{2}{M - 2\tilde{p} r^5 Ve^{\frac{2Vt}{r}} \cdot \dot{r}^{-3}}\left(\tilde{p} r^3 Ve^{\frac{2Vt}{r}}\left(5r\dot{r}^{-1} - 2Vt\dot{r}^{-1} + Vr\dot{r}^{-2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial U_{1a}}{\partial r} - \frac{M}{2}\frac{\dot{\varphi}(0)^2}{r^3}\right) = 0. \tag{15}$$

При $V = 0$ система уравнений (11)–(12) существенно упрощается:

$$-\dot{\varphi}(0)^2 / r^3 + 20\tilde{p} r^4 / 3C + \ddot{r} = 0, \quad \dot{\varphi}(t) - \dot{\varphi}(0) / r^2 = 0. \tag{16}$$

Ее решение – это периодическая квазиэллиптическая траектория (рис. 4, *a*). Соответственно частицы монослоя в гидратном комплексе движутся вокруг базисной точки по вытянутым и повернутым относительно друг друга орбитам, переходя с течением времени с одной орбиты на другую. Поскольку при $V = 0$ потенциальная энергия U_{1a} не зависит от времени явно, частицы остаются в гидратном комплексе.

Монослой, сжимаемый с достаточно большой скоростью, может рассматриваться как устойчивая динамическая система с предельным циклом (рис. 4, *b*) [32]. При достаточно больших скоростях V геодезические характеризуются наличием точек перегиба. Такие конфигурации описывают выход частиц из гидратного комплекса. Отмеченная особенность означает, что скорость сжатия монослоя V является так называемым управляющим параметром рассматриваемой динамической системы [32].

Динамика системы с модельным распределением времен релаксации. Распределение времен релаксации в приближении (7) для малых α можно учесть посредством следующих замен:

$$t \approx t(s), \quad \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{r}\dot{\xi}^{-1} \approx \dot{r}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right), \quad \dot{\varphi}_\xi = \dot{\varphi}_t \dot{\xi}^{-1} \approx \dot{\varphi}_t\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right).$$

Из соотношения (7) и теоремы о среднем следует, что

$$t = s + \alpha\int_0^s \frac{ds}{r(s)} = s + \alpha\frac{s}{r(s_{cp})} \approx s, \quad \alpha \ll 1,$$

поэтому можно считать, что различие между эволюционными параметрами t и s сводится к некоторому малому сдвигу (при численных расчетах этим сдвигом будем пренебрегать).

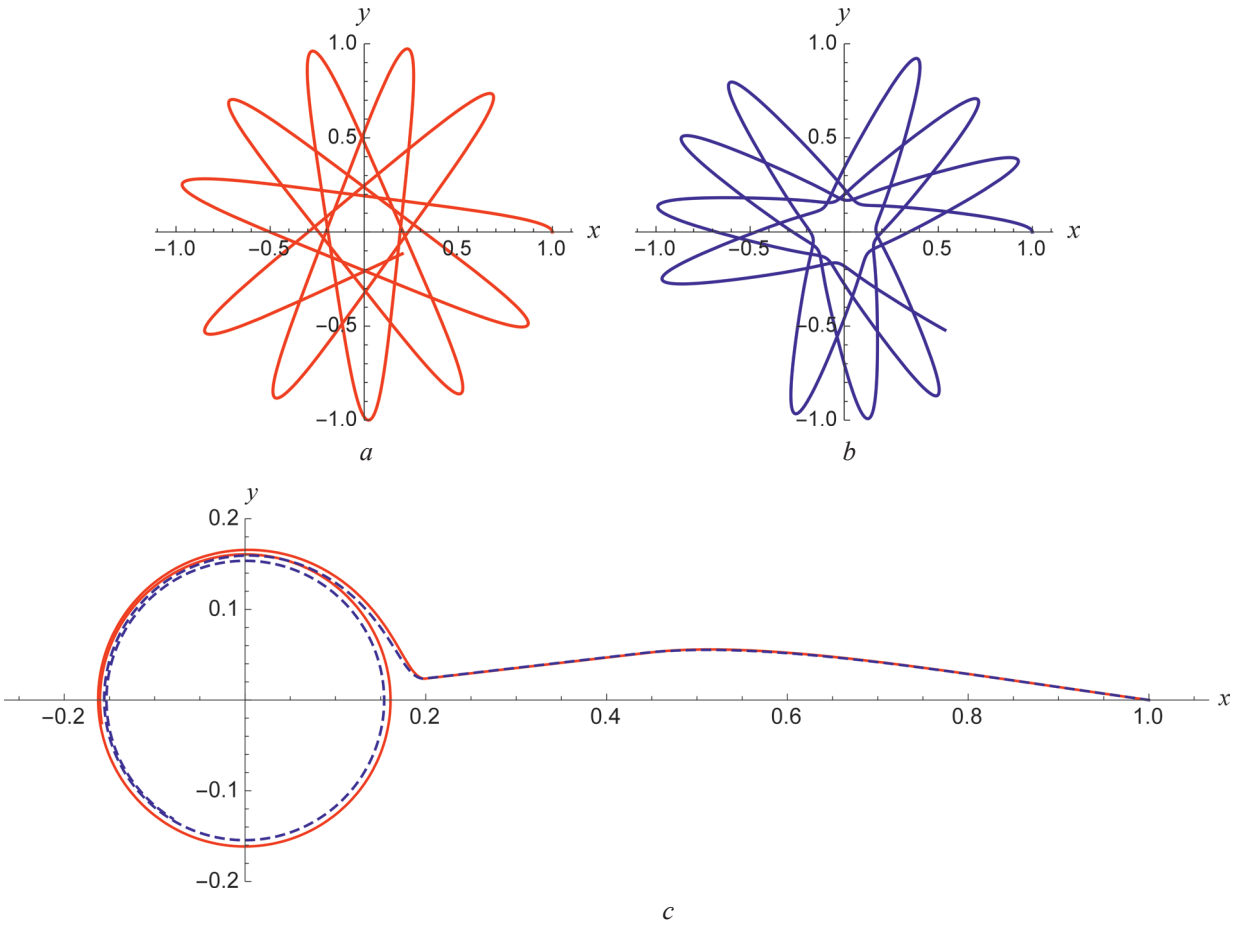


Рис. 4. Геодезические для системы с одним временем релаксации (красные кривые) и для модельного распределения времен релаксации (синие кривые); начальные условия: $\dot{r}(t=0) = -5\cdot10^{-6}$ м/с, $r(t=0) = 1$ м; значения параметров: $M = 10^{-5}$, $\tilde{p} = 1$ (*a* – *c*); $V = 0$, $\alpha = 0$ (*a*); $V = 0$, $\alpha = 0{,}07$ (*b*); $V = 17\cdot10^{-5}$ м/с, $\alpha = 0$ (красная кривая) и $\alpha = 0{,}1$ (синяя кривая) (*c*)

Fig. 4. Geodesics of the system with fixed relaxation time (red curves) and of the system with model distribution of relaxation times (blue curves); initial conditions: $\dot{r}(t=0) = -5\cdot10^{-6}$ m/s, $r(t=0) = 1$ m; monolayer parameters and approximation parameter; $M = 10^{-5}$, $\tilde{p} = 1$ (*a* – *c*); $V = 0$, $\alpha = 0$ (*a*); $V = 0$, $\alpha = 0.07$ (*b*); $V = 17\cdot10^{-5}$ m/s, $\alpha = 0$ (red curve) and $\alpha = 0.1$ (blue curve) (*c*)

Тогда лагранжиан, учитывающий распределение времен релаксации зародышей фаз, имеет вид

$$L(t,r,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{M}{2}\dot{r}^2(1-2\alpha/r) + \frac{Mr^2}{2}\dot{\varphi}^2(1-2\alpha/r) - \tilde{p}r^5\,|V|\,e^{\frac{2|V|t}{r}}\dot{r}^{-1}(1+\alpha/r) + U_{1a}(t,r), \qquad (17)$$

где α – малый параметр; при $\alpha = 0$ возвращаемся к приближению одного времени релаксации.

Компоненты вектора G^i задаются формулами

$$G^1 = \frac{-\partial U_{1a}/\partial r - M\dot{\varphi}^2(r-\alpha) + M\alpha\dot{r}^2r^{-2} + 2\tilde{p}r^3V\,e^{\frac{2tV}{r}}\left((\alpha+r)\left(V - \frac{2Vt\dot{r}}{r} + 4\dot{r}\right)\dot{r}^{-2} + r\dot{r}^{-1}\right)}{2M(1-2\alpha/r) - 4\tilde{p}r^4V(\alpha+r)e^{\frac{2tV}{r}}\dot{r}^{-3}}, \qquad (18)$$

$$G^2 = \frac{\dot{r}\dot{\varphi}(r-\alpha)}{r(r-2\alpha)} \approx \frac{\dot{r}\dot{\varphi}}{r}\left(1+\frac{\alpha}{r}\right). \qquad (19)$$

С учетом (19) уравнение для угловой переменной φ из (11) представляем так:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{\varphi}\dot{r}}{r} - \frac{2\alpha\dot{\varphi}\dot{r}}{r^2}. \qquad (20)$$

Сопоставим уравнение (20) с аналогичным уравнением (14б) в случае одного времени релаксации. В (20) присутствует зависящая от параметра α эффективная сила $F_\varphi = -2\alpha\dot{\varphi}\dot{r}/r^2$, которая будет давать дополнительное угловое ускорение при $\dot{r} < 0$ и торможение при $\dot{r} > 0$. Интегрирование уравнения (20) приводит к выражению для $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\dot{\varphi}(0)}{r(t)^2} e^{2\alpha/r(t)}. \tag{21}$$

Проведем аналогичный анализ для радиального уравнения (18). Обозначим через $G^1_{(1)}$ радиальную компоненту вектора G^i для случая одного времени релаксации (13) и выделим вклад, обусловленный наличием в системе распределения релаксационных времен: $\Delta G^1 = G^1 - G^1_{(1)}$. Перепишем G^1 из (18) в виде

$$G^1 \approx \left(G^1_{(1)} + \alpha \frac{2\tilde{p}r^3 V e^{\frac{2tV}{r}} \left(V\dot{r}^{-2} - \frac{2Vt\dot{r}^{-1}}{r} + 4\dot{r}^{-1} \right) + M\left(\varphi^2 + \frac{\dot{r}^2}{r^2} \right)}{2\left(M - 2\tilde{p}r^5 V e^{\frac{2tV}{r}} \dot{r}^{-3} \right)} \right) \left(1 + 2\alpha \frac{\left(M + \tilde{p}r^5 V e^{\frac{2tV}{r}} \dot{r}^{-3} \right)}{r\left(M - 2\tilde{p}r^5 V e^{\frac{2tV}{r}} \dot{r}^{-3} \right)} \right) \approx$$

$$\approx G^1_{(1)} + \alpha \left(2G^1_{(1)} \frac{\left(M + \tilde{p}r^5 V e^{\frac{2tV}{r}} \dot{r}^{-3} \right)}{r\left(M - 2\tilde{p}r^5 V e^{\frac{2tV}{r}} \dot{r}^{-3} \right)} + \frac{2\tilde{p}r^3 V e^{\frac{2tV}{r}} \left(V\dot{r}^{-2} - \frac{2Vt\dot{r}^{-1}}{r} + 4\dot{r}^{-1} \right) + M\left(\varphi^2 + \frac{\dot{r}^2}{r^2} \right)}{2\left(M - 2\tilde{p}r^5 V e^{\frac{2tV}{r}} \dot{r}^{-3} \right)} \right) \approx$$

$$\approx G^1_{(1)} + \alpha \left(-\frac{G^1_{(1)}}{r} + \frac{2\tilde{p}r^3 V e^{\frac{2tV}{r}} \left(V\dot{r}^{-2} - \frac{2Vt\dot{r}^{-1}}{r} + 4\dot{r}^{-1} \right) + M\left(\varphi^2 + \frac{\dot{r}^2}{r^2} \right)}{2\left(M - 2\tilde{p}r^5 V e^{\frac{2tV}{r}} \dot{r}^{-3} \right)} \right).$$

Учитывая $G^1_{(1)}$ из (13), находим приращение ΔG^1:

$$\Delta G^1 = \frac{\alpha}{2r^2} \frac{2M\left(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 \right) + \partial U_{1a}/\partial r}{M - 2\tilde{p}r^5 V e^{\frac{2tV}{r}} \dot{r}^{-3}}. \tag{22}$$

С учетом $\dot{\varphi}$ (21) находим выражение для дополнительной центробежной силы

$$F_r = -\frac{\alpha}{r^4} \frac{2M\left(\dot{\varphi}(0)^2 e^{2\alpha/r} + r^2\dot{r}^2 \right) + r^2\, \partial U_{1a}/\partial r}{M - 2\tilde{p}r^5 V e^{\frac{2tV}{r}} \dot{r}^{-3}}. \tag{23}$$

В предельном случае $V = 0$ имеем

$$\partial U_{1a}/\partial r = 20/3\, \tilde{p}r^4, \quad F_r = -2\alpha \left(\frac{\dot{\varphi}(0)^2 e^{2\alpha/r}}{r^4} + \frac{\dot{r}^2}{r^2} + \frac{10}{3}\frac{\tilde{p}r^2}{M} \right) < 0. \tag{24}$$

Сила в (24) приводит к эффективному дополнительному отталкиванию. В соответствии с этим, сравнивая рис. 4, *a* при $\dot{\xi} = 1$ и рис. 4, *b* при $\dot{\xi} = 1 + \alpha/r(s)$, отмечаем, что во втором случае траектории сильнее искривляются вблизи центра, причем их кривизна отрицательная (имеем эффективную отталкивающую силу).

Теперь рассмотрим случай ненулевой скорости сжатия. Примем во внимание, что $\dot{r} < 0$ и знаменатель в (23) положительный. Следовательно, знак дополнительной силы F_r будет определяться величиной $\partial U_{1a}/\partial r$. На предельном цикле при $\dot{r} = 0$ (см. рис. 4, *c*) имеем

$$F_r = \alpha \frac{M\dot{\varphi}(0)^2 e^{2\alpha/r} + r^2 \partial U_{1a}/\partial r}{\tilde{p} r^9 V e^{\frac{2tV}{r}}}. \quad (25)$$

Численный расчет траекторий показывает, что при больших скоростях радиус предельного цикла (см. рис. 4, *c*) для случая $\dot{\xi} = 1 + \alpha/r(s)$ уменьшается по сравнению с ситуацией одного времени релаксации, т. е. в системе наблюдается дополнительное эффективное притяжение.

Заключение. В работе получены уравнения Эйлера – Лагранжа в конфигурационном финслеровом пространстве монослоя и проведен численный анализ динамики фазового перехода. Показана гетерогенность динамики системы, что соответствует метастабильному состоянию монослоя при наличии зародышей фаз с различными временами релаксации. Распределение времен релаксации зародышей фаз характеризуется наличием максимума, при увеличении скорости сжатия монослоя высота этого максимума возрастает, причем он появляется при меньших значениях эволюционного параметра. Рост максимума в распределении времен релаксации при повышении скорости сжатия ассоциируется с появлением выраженного плато на изотерме.

В рамках лагранжевого формализма исследована динамика двумерного фазового перехода при малых скоростях сжатия и проведено сравнение поведения системы в двух приближениях: в приближении одного времени релаксации и в приближении модельного распределения времен релаксации. Показано, что существование зародышей фаз с различными временами релаксации приводит к появлению эффективной центробежной силы, величина которой зависит от градиента электрокапиллярных сил.

Список использованных источников

1. Moehwald, H. From Langmuir monolayers to multilayer films / H. Moehwald, G. Brezesinski // Langmuir. – 2016. – Vol. 32, № 41. – P. 10445−10458.

2. Acharya, S. Soft Langmuir – Blodgett technique for hard nanomaterials / S. Acharya, J. P. Hill, K. Ariga // Adv. Mater. – 2009. – Vol. 21, № 29. – P. 2959–2981.

3. Блинов, Л. М. Лэнгмюровские пленки / Л. М. Блинов // Успехи физ. наук. – 1988. – Т. 155, № 3. – С. 443–480.

4. Structures and phase transitions in Langmuir monolayers / D. Andelman [et al.] // Micelles, Membranes, Microemulsions, and Monolayers / eds.: W. M. Gelbart, A. Ben-Shaul, D. Roux. – New York: Springer, 1994. – P. 559–602.

5. Anderson, P. W. Physics: The opening to complexity / P. W. Anderson // Proc. Natl. Acad. Sci. – 1995. – Vol. 92, № 15. – P. 6653–6654.

6. Mezard, M. Spin Glass Theory and Beyond / M. Mezard, G. Parisi, M. A. Virasoro. – Singapore: World Scientific Lecture Notes in Physics, 1986. – 476 p.

7. Ostilli, M. Statistical mechanics of random geometric graphs: Geometry-induced first-order phase transition / M. Ostilli, G. Bianconi // Phys. Rev. E. – 2015. – Vol. 91, № 4. – P. 042136.

8. Avrami, M. Kinetics of phase change. I General Theory / M. Avrami // J. Chem. Phys. – 1939. – Vol. 7. – P. 1103–1112.

9. Avrami, M. Kinetics of phase change. II Transformation-Time Relations for Random Distribution of Nuclei / M. Avrami // J. Chem. Phys. – 1940. – Vol. 8. – P. 212–224.

10. Avrami, M. Granulation, Phase Change, and Microstructure Kinetics of Phase Change. III / M. Avrami // J. Chem. Phys. – 1941. – Vol. 9. – P. 177–184.

11. Johnson, W. Reaction kinetics in processes of nucleation and growth / W. Johnson, R. F. Mehl // Trans. AIME. – 1939. – Vol. 135. – P. 416–442.

12. Колмогоров, А. Н. К статистической теории кристаллизации металлов / А. Н. Колмогоров // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1937. – Vol. 3. – P. 355–359.

13. Shur, V. Ya. Dynamics of domain structure in uniaxial ferroelectrics / V. Ya. Shur, A. L. Gruverman, E. L. Rumyantsev // Ferroelectrics. – 1990. – Vol. 111, № 1. – P. 123–131.

14. Shur, V. Ya. Fast polarization reversal process: evolution of ferroelectric domain structure in thin films // Ferroelectric Thin Films: Synthesis and Basic Propeties / eds.: C. A. Paz de Araujo, J. F. Scott, G. W. Taylor. − Gordon & Breach Sci. Publ., 1996. − Vol. 10, Ch. 6 − P. 153−192. – (Ferroelectricity and Related Phenomena Ser.).

15. Gutierrez-Campos, A. Domain growth, pattern formation, and morphology transitions in Langmuir monolayers. A new growth instability / A. Gutierrez-Campos, G. Diaz-Leines, R. Castillo // J. Phys. Chem. B. – 2010. – Vol. 114. – P. 5034–5046.

16. pH-Dependent appearance of chiral structure in a Langmuir monolayer / A. Datta [et al.] // *J.* Phys. Chem. B. – 2000. – Vol. 104, № 24. – P. 5797–5802.

17. Vollhardt, D. Kinetics of two-dimensional phase transition of Langmuir monolayers / D. Vollhardt, V. B. Fainerman // J. Phys. Chem. B. – 2002. – Vol. 106, № 2. – P. 345–351.

18. Грушевский, В. В. Термодинамика фазовых состояний в монослоях Лэнгмюра – Блоджетт / В. В. Грушевский, Г. В. Крылова // Низкоразмерные системы-2: Физико-химия элементов и систем с низкоразмерным структурированием (получение, диагностика, применение новых материалов и структур): сб. науч. работ. – Гродно: ГрГУ, 2005. – Вып. 4. – С. 30–36.

19. Nandi, N. Anomalous temperature dependence of domain shape in Langmuir monolayers: Role of dipolar interaction / N. Nandi, D. Vollhardt // J. Phys. Chem. B. – 2004. – Vol. 108, № 49. – P. 18793–18795.

20. Lopez, J. M. Influence of coexisting phases on the surface dilatational viscosity of Langmuir monolayers / J. M. Lopez, M. J. Vogel, A. H. Hirsa // Phys. Rev. E. – 2004. – Vol. 70, № 5. – P. 056308.

21. Domain-growth kinetic origin of nonhorizontal phase coexistence plateaux in Langmuir monolayers: Compression rigidity of a raft-like lipid distribution / L. R. Arriaga [et al.] // J. Phys. Chem. B. – 2010. – Vol. 114, № 13. – P. 4509–4520.

22. Ruckenstein, E. Surface equation of state for insoluble surfactant monolayers at the air/water interface / E. Ruckenstein, B. Li // J. Phys. Chem. B. – 1998. – Vol. 102, № 6. – P. 981–989.

23. Multiple-relaxation-time Finsler-Lagrange dynamics in a compressed Langmuir monolayer / V. Balan [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2016. – Vol. 19, № 3. – P. 223–253.

24. Kaganer, V. M. Structure and phase transitions in Langmuir monolayers / V. M. Kaganer, H. Möhwald, P. Dutta // Rev. Mod. Phys. – 1999. – Vol. 71, № 3. – P. 779–819.

25. Грушевская, Г. В. Эффекты финслеровой геометрии в физике поверхностных явлений: случай монослойных систем / Г. В. Грушевская, Н. Г. Крылова // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2011. – Т. 8. – С. 128–146.

26. Balan, V. Finsler geometry approach to thermodynamics of first order phase transitions in monolayers / V. Balan, H. Grushevskaya, N. Krylova // Differential Geometry – Dynamical Systems. – 2015. – Vol. 17. – P. 24–31.

27. Bao, D. An Introduction to Riemann-Finsler Geometry / D. Bao, S.-S. Chern, Z. Shen. – Berlin: Springer, 2000. – 435 p.

28. Lagrange and Finsler Geometry: Application to Physics and Biology / eds.: P. L. Antonelli, R. Miron. – Springer, 1996.

29. Modeling of the behavior and statistical analysis of compressibility in the process of Langmuir monolayer structurization / H. V. Grushevskaya [et al.] // J. Phys.: Conf. Series. – 2015. – Vol. 643. – P. 012015.

30. Vollhardt, D. Progress in characterization of Langmuir monolayers by consideration of compressibility / D. Vollhardt, V. B. Fainerman // Advances in Colloid and Interface Science. – 2006. – Vol. 127. – P. 83–97.

31. Balan, V. Jet singele-time Lagrange geometry and its application / V. Balan, M. Neagu. – Wiley, 2011. – 194 p.

32. Анищенко, В. С. Сложные колебания в простых системах / В. С. Анищенко. – М.: Наука, 1990. – 312 с.

References

1. Moehwald H., Brezesinski G. From Langmuir monolayers to multilayer films. *Langmuir*, 2016, vol. 32, no. 41, pp. 10445−10458. Doi: 10.1021/acs.langmuir.6b02518

2. Acharya S., Hill J. P., Ariga K. Soft Langmuir – Blodgett technique for hard nanomaterials. *Advanced Materials*, 2009, vol. 21, no. 29, pp. 2959–2981. Doi: 10.1002/adma.200802648

3. Blinov L. M. Langmuir films. *Uspekhi Fizicheskih Nauk*, 1988, vol. 155, no. 7, pp. 443–480 (in Russian). Doi: 10.3367/ufnr.0155.198807c.0443

4. Andelman D., Brochard F., Knobler C., Rondelez F. Structures and phase transitions in Langmuir monolayers. Gelbart W. M., Ben-Shaul A., Roux D. (eds.). *Micelles, Membranes, Microemulsions, and Monolayers*. New York, Springer, 1994, pp. 559–602. Doi: 10.1007/978-1-4613-8389-5_12

5. Anderson P. W. Physics: The opening to complexity. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1995, vol. 92, no. 15, pp. 6653−6654. Doi: 10.1073/pnas.92.15.6653

6. Mezard M., Parisi G., Virasoro M. A. *Spin Glass Theory and Beyond*. Singapore, World Scientific Lecture Notes in Physics, 1986. 476 p. Doi: 10.1142/0271

7. Ostilli, M., Bianconi G. Statistical mechanics of random geometric graphs: Geometry-induced first-order phase transition. *Physical Review E*, 2015, vol. 91, no. 4, pp. 042136. Doi: 10.1103/physreve.91.042136

8. Avrami M. Kinetics of phase change. I General Theory. *Journal of Chemical Physics*, 1939, vol. 7, pp. 1103–1112. Doi: 10.1063/1.1750380

9. Avrami M. Kinetics of phase change. II Transformation-Time Relations for Random Distribution of Nuclei. *Journal of Chemical Physics,* 1940, vol. 8, pp. 212–224. Doi: 10.1063/1.1750631

10. Avrami M. Granulation, Phase Change, and Microstructure Kinetics of Phase Change. III. *Journal of Chemical Physics,* 1941, vol. 9, pp. 177–184. Doi: 10.1063/1.1750872

11. Johnson W., Mehl R. F. Reaction kinetics in processes of nucleation and growth. *Trans. AIME*, 1939, vol. 135, pp. 416–442.

12. Kolmogorov A. N. To statistical theory of metal crystallization. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya* [Izvestiya: Mathematics], 1937, vol. 1, no. 3, pp. 355–359 (in Russian).

13. Shur V. Ya., Gruverman A. L., Rumyantsev E. L. Dynamics of domain structure in uniaxial ferroelectrics. *Ferroelectrics*, 1990, vol. 111, no. 1, pp. 123–131. Doi: 10.1080/00150199008224389

14. Shur V. Ya. Fast polarization reversal process: evolution of ferroelectric domain structure in thin films. Paz de Araujo C. A., Scott J. F., Taylor G. W. (eds.). *Ferroelectric Thin Films: Synthesis and Basic Propeties. Ferroelectricity and Related Phenomena Ser.* Vol. 10, Ch. 6. Gordon & Breach Sci. Publ., 1996, pp. 153−192.

15. Gutierrez-Campos A., Diaz-Leines G., Castillo R. Domain growth, pattern formation, and morphology transitions in Langmuir monolayers. A new growth instability. *The Journal of Physical Chemistry B*, 2010, vol. 114, no. 15, pp. 5034–5046. Doi: 10.1021/jp910344h

16. Datta A., Kmetko J., Yu C.-J., A. G. Richter C.-J., Chung K.-S., Bai J.-M., Dutta P. pH-Dependent appearance of chiral structure in a Langmuir monolayer. *The Journal of Physical Chemistry B*, 2000, vol. 104, no. 24, pp. 5797–5802. Doi: 10.1021/jp0006375

17. Vollhardt D., Fainerman V. B. Kinetics of Two-Dimensional Phase Transition of Langmuir Monolayers. *The Journal of Physical Chemistry B*, 2002, vol. 106, no. 2, pp. 345–351. Doi: 10.1021/jp012798u

18. Grushevskii V. V., Krylova H. V. The thermodynamics of phase states in Langmuir-Blodgett monolayers. *Nizkorazmernye sistemy-2: Fiziko-khimiya elementov i sistem s nizkorazmernym strukturirovaniem (poluchenie, diagnostika, primenenie novykh materialov i struktur): sb. nauch. rabot* [Low-dimensional systems-2. Physical chemistry of elements and systems with low-dimensional structuring (acquisition, diagnostics, application of new materials and structures): a collection of scientific papers]. Grodno, Grodno State University, Is. 4, 2005, pp. 30–36 (in Russian).

19. Nandi N., Vollhardt D. Anomalous temperature dependence of domain shape in Langmuir monolayers: Role of dipolar interaction. *The Journal of Physical Chemistry B*, 2004, vol. 108, no. 49, pp. 18793–18795. Doi: 10.1021/jp0461697

20. Lopez J. M., Vogel M. J., Hirsa A. H. Influence of coexisting phases on the surface dilatational viscosity of Langmuir monolayers. *Physical Review E*, 2004, vol. 70, no. 5, p. 056308. Doi: 10.1103/physreve.70.056308

21. Arriaga L. R., Lopez-Montero I., Ignes-Mullol J., Monroy F. Domain-growth kinetic origin of nonhorizontal phase coexistence plateaux in Langmuir monolayers: Compression rigidity of a raft-like lipid distribution. *The Journal of Physical Chemistry B*, 2010, vol. 114, no. 13, pp. 4509–4520. Doi: 10.1021/jp9118953

22. Ruckenstein E., Li B. Surface equation of state for insoluble surfactant monolayers at the air/water interface. *The Journal of Physical Chemistry B*, 1998, vol. 102, no. 6, pp. 981–989. Doi: 10.1021/jp972748i

23. Balan, V., Grushevskaya H. V., Krylova N. G., Neagu M. Multiple-relaxation-time Finsler-Lagrange dynamics in a compressed Langmuir monolayer. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2016, vol. 19, no. 3, pp. 223–253.

24. Kaganer V. M., Möhwald H., Dutta P. Structure and phase transitions in Langmuir monolayers. *Reviews of Modern Physics*, 1999, vol. 71, no. 3, pp. 779–819.

25. Grushevskaya G. V., Krylova N. G. Finsler geometry effects in physics of surface phenomenon: the case of monolayer system. *Giperkompleksnye chisla v geometrii i fizike = Hypercomplex numbers in geometry and physics*, 2011, vol. 8, pp. 128–146 (in Russian).

26. Balan V., Grushevskaya H., Krylova N. Finsler geometry approach to thermodynamics of first order phase transitions in monolayers. *Differential Geometry – Dynamical Systems*, 2015, vol. 17, pp. 24–31.

27. Bao D., Chern S., Shen Z. *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*. Berlin, Springer, 2000. 435 p. Doi: 10.1007/978-1-4612-1268-3

28. Antonelli P. L., Miron R. (eds.). *Lagrange and Finsler geometry: Application to Physics and Biology*. Springer, 1996. Doi: 10.1007/978-94-015-8650-4

29. Grushevskaya H. V., Krylov G. G., Krylova N. G., Lipnevich I. V. Modeling of the behavior and statistical analysis of compressibility in the process of Langmuir monolayer structurization. *Journal of Physics: Conference Series*, 2015, vol. 643, p. 012015. Doi: 10.1088/1742-6596/643/1/012015

30. Vollhardt D., Fainerman V. B. Progress in characterization of Langmuir monolayers by consideration of compressibility. *Advances in Colloid and Interface Science*, 2006, vol. 127, pp. 83–97. Doi: 10.1016/j.cis.2006.11.006

31. Balan V., Neagu M. *Jet singele-time Lagrange geometry and its application*. Wiley, 2011. 194 p. Doi: 10.1002/9781118143759

32. Anishchenko V. S. *Complex oscillations in simple systems*. Moskow, Nauka Publ., 1990. 312 p. (in Russian).

Информация об авторах

Крылова Нина Георгиевна – научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории диэлектрической спектроскопии гетерогенных систем, физический факультет, Белорусский государственный университет (ул. Бобруйская, 5, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: krylovang@bsu.by

Грушевская Галина Владиславовна – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории диэлектрической спектроскопии гетерогенных систем, физический факультет, Белорусский государственный университет (ул. Бобруйская, 5, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: grushevskaja@bsu.by

Редьков Виктор Михайлович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник центра теоретической физики Института физики им. Б. И. Степанова, Национальная академия наук Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail; redkov@dragon.bas-net.by

Information about the authors

Nina G. Krylova – Researcher of the Laboratory of Dielectric Spectroscopy of Heterogeneous Systems, Physics Faculty, Belarusian State University (5, Bobruiskaya Str., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: krylovang@bsu.by

Halina V. Grushevskaya – Leading Researcher of the Laboratory of Dielectric Spectroscopy of Heterogeneous Systems, Physics Faculty, Belarusian State University (5, Bobruiskaya Str., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: grushevskaja@bsu.by

Viktor M. Red'kov – D. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher of the Center of Theoretical Physics, B. I. Stepanov Institute of Physics, National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: redkov@dragon.bas-net.by