УДК 512.567.5

Ю. И. КУЛАЖЕНКО, М. В. СЕЛЬКИН

О ПОЛУАБЕЛЕВОСТИ *n*-АРНЫХ ГРУПП

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

(Поступила в редакцию 06.03.2015)

Изучение объектов аффинной геометрии методами теории n-арных групп и изучение свойств n-арных групп, связанных со свойствами объектов аффинной геометрии, осуществлялось многими авторами [1–5]. Так, тернарные группы, которые изучали Х. Прюфер [6], Дж. Кертайн [7], нашли приложения в проективной [8] и аффинной геометрии [9], а также в других областях знаний. На основе исследований В. Дёрнте [10] и Е. Поста [11] С. А. Русаков в работах [2, 12] обобщил указанные выше результаты на случай n-арной группы ($n \ge 2$).

Отметим, что появление новых методов исследования, таких как функторный и геометрический, позволило получить ряд интересных и содержательных результатов в области мультиколец, полиадических мультиколец и универсальных алгебр [13–16].

Развитие приложений теории n-арных групп в аффинной геометрии и их изучение послужили толчком к введению нового понятия «самосовмещение элементов n-арных групп» [5]. В настоящее время эти исследования развиваются по двум основным направлениям. Первое связано с симметричными точками и построением на n-арной группе специальных фигур аффинной геометрии, обладающих заданными свойствами [5]. Второе базируется на изучении свойств различных последовательностей векторов n-арных групп [17]. Оба эти направления тесно связаны с понятием полуабелевости, которое, как показано в работе [18], тождественно понятиям коммутативности и аффинности в классе всех n-арных групп. Поэтому установление новых критериев полуабелевости n-арных групп представляет значительный интерес.

Пусть G – n-арная группа, $m > 0$ и $k \ge 0$ – целые числа.

1. Если $k > 0$ и $m \le k$, то мы используем символ x_m^k для обозначения последовательности $x_m x_{m+1} \ldots x_k$, где $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_k \in G$.

2. Если $k > 0$, то запись $\overset{k}{x}$ обозначает последовательность $xx\ldots x$ длины k ($x \in G$).

Напомним, что универсальную алгебру $< G, ( ) >$ с n-арной операцией $( ) : G^n \to G$ ($n \ge 2$) называют n-арной группой [19], если выполняются следующие условия:

1) операция $( )$ ассоциативна на G, т. е.

$$((a_1 \ldots a_n) a_{n+1} \ldots a_{2n-1}) = (a_1 \ldots a_i (a_{i+1} \ldots a_{i+n}) a_{i+n+1} \ldots a_{2n-1})$$

для любого $i = 1, \ldots, n$ и для всех $a_1, \ldots, a_{2n-1} \in G$;

2) уравнение

$$(a_1 \ldots a_{i-1} x a_{i+1} \ldots a_n) = b$$

имеет единственное решение в G для любого $i = 1, \ldots, n$ и любых $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b \in G$.

Говорят, что G – полуабелева n-арная группа, если для любой последовательности $x_1^n \in G^n$ справедливо равенство

$$(x_1 x_2^{n-1} x_n) = (x_n x_2^{n-1} x_1).$$

Говорят, что последовательность $e_1^{k(n-1)} \in G$, где $k \geq 1$, называется нейтральной $k(n-1)$-последовательностью G, если $(e_1^{k(n-1)}u) = u = (ue_1^{k(n-1)})$ для любого элемента $u \in G$.

В любой n-арной группе существуют нейтральные последовательности. Это обусловлено, в частности, следствием разрешимости в n-арной группе уравнения $(ae_1^{k(n-1)-1}y) = a$. Нейтральные последовательности n-арной группы определяются неоднозначно.

Последовательность $b_1^j \in G$ называют обратной последовательностью к последовательности $a_1^i \in G$, если последовательности $b_1^j a_1^i$ и $a_1^i b_1^j$ являются нейтральными.

Ясно, что если b_1^j обратная последовательность к a_1^i, то a_1^i – обратная к b_1^j.

Отметим, что обратная последовательность, длина которой больше единицы, определяется неоднозначно.

n-Арная группа может быть определена как алгебра с двумя и большим числом операций [12]. В частности, n-арная группа может быть определена с помощью одной ассоциативной n-арной операции и одной унарной операции.

Алгебру $G = < X, (\,),^{[-2]} >$ типа $< n, 1 >$, где $n \geq 2$, называют n-арной группой [12], если

1) n-арная операция $(\,)$ на множестве X ассоциативна;

2) для любых элементов x и y из X выполняются равенства

$$(x^{[-2]} \overset{n-2}{x} (\overset{n-1}{x} y)) = y = ((y \overset{n-1}{x}) \overset{n-2}{x} x^{[-2]}).$$

Символ $x^{[-2]}$, который входит в приведенное равенство, есть решение уравнения $(y \overset{2(n-1)}{x}) = x$, т. е. $(x^{[-2]} \overset{2(n-1)}{x}) = x$, где $x, y \in G$.

Из последнего равенства следует, что обратной последовательностью к любому $x \in G$ будет $x^{[-2]} \overset{2n-4}{x}$. Действительно, $(x^{[-2]} \overset{2(n-1)}{x}) = (xx^{[-2]} \overset{2n-4}{x} x) = x$. Очевидно, что $xx^{[-2]} \overset{2n-4}{x} = x^{[-2]} \overset{2n-4}{x} x$ – нейтральные последовательности.

В дальнейшем элементы n-арной группы G будем называть точками. Согласно [2], совокупность двух точек a и b из G называют отрезком и обозначают через $[ab]$ или $[ba]$. Последовательность k произвольных точек $< a_1, a_2, ..., a_k >$ называют k-угольником G, где $a_1, a_2, ..., a_k \in G$.

В работе [2] доказано, что для любых точек $a, b, c \in G$ равенства

$$(ab^{[-2]} \overset{2n-4}{b} c) = b, \tag{1}$$

$$(cb^{[-2]} \overset{2n-4}{b} a) = b \tag{2}$$

эквивалентны.

Если выполняется равенство (1) или (2), то b называют серединой отрезка $[ac]$. Если имеет место равенство (1) (равенство (2)), то точку c (точку a) называют точкой, симметричной точке a (точке c) относительно точки b, и обозначают через $S_b(a)$ (через $S_b(c)$), т. е. $c = S_b(a)$ ($a = S_b(c)$).

Из (1) или (2) следует, что

$$S_b(a) = (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\, b), \tag{3}$$

$$S_b(c) = (bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\, b). \tag{4}$$

В работе [2] установлено, что n-арная группа G будет полуабелевой, если для любых $x, y, z \in G$ справедливо равенство

$$(xy^{[-2]}\overset{2n-4}{y}\, z) = (zy^{[-2]}\overset{2n-4}{y}\, x).$$

В дальнейшем для сокращения записи обратную последовательность к любому $x \in G$ будем обозначать через x^{-1}, т. е. $x^{-1} = x^{[-2]}\overset{2n-4}{x}$. Тогда равенства (3) и (4) примут вид соответственно

$$S_b(a) = (ba^{-1}b), \tag{5}$$

$$S_b(c) = (bc^{-1}b) \tag{6}$$

и n-арная группа G будет полуабелевой, если для любых $x, y, z \in G$ справедливо равенство

$$(xy^{-1}z) = (zy^{-1}x). \tag{7}$$

Напомним [5], что точку

$$S_{a_k}(...(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))...)$$

называют обходом элементов последовательности $< a_1, ..., a_k >$ точкой p, где $a_1, ... a_k, p \in G$. Если $S_{a_k}(...(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))...) = p$, то говорят, что p самосовмещается относительно элементов последовательности $< a_1, ..., a_k >$.

Четырехугольник $< a, b, c, d >$ называют параллелограммом G, если $(ab^{-1}c) = d$.

Упорядоченную пару $< a, b >$ точек $a, b \in G$ называют направленным отрезком n-арной группы G и обозначают $\overline{ab}$.

Говорят, что направленные отрезки $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ равны и пишут $\overline{ab} = \overline{cd}$, если четырехугольник $< a, b, c, d >$ – параллелограмм G.

Пусть $\overline{V}$ – множество всех направленных отрезков n-арной группы G. В работе [2] установлено, что бинарное отношение $=$ на множестве $\overline{V}$ является отношением эквивалентности и разбивает множество $\overline{V}$ на непересекающиеся классы. Класс, порожденный направленным отрезком $\overline{ab}$, имеет вид

$$K(\overline{uv}) = \{\overline{uv} \mid \overline{uv} \in \overline{V}, \overline{uv} = \overline{ab}\}.$$

Под вектором $\overrightarrow{ab}$ n-арной группы G понимают класс $K(\overline{ab})$, т. е. $\overrightarrow{ab} = K(\overline{ab})$.

Теорема 1. *Пусть* $b_1, ..., b_k$ *– произвольные точки* n*-арной группы* G ($k \in \mathbf{N}$, $k \geq 3$, k *– нечетное), а* $a_1, ..., a_k \in G$ *такие, что*

$$b_2 = S_{a_1}(b_1), b_3 = S_{a_2}(b_2), ..., b_k = S_{a_{k-1}}(b_{k-1}), b_1 = S_{a_k}(b_k). \tag{8}$$

n*-Арная группа* G *будет полуабелевой тогда и только тогда, когда произвольная точка* $p \in G$ *самосовмещается относительно элементов последовательности*

$$< a_1, ..., a_k, b_1 >, \tag{9}$$

т. е. когда справедливо равенство

$$S_{b_1}(S_{a_k}(...(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))...)) = p. \tag{10}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G – полуабелева n-арная группа. Докажем справедливость равенства (10).

На основании определения симметричных точек запишем:

$$S_{a_1}(p) = (a_1 p^{-1} a_1). \tag{11}$$

С учетом (11), а также равенства 3.27 из [2] и нейтральности последовательностей $x^{-1}x$, xx^{-1} для любого $x \in G$, имеем:

$$S_{a_2}(S_{a_1}(p)) = (a_2 (a_1 p^{-1} a_1)^{-1} a_2) = (a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2).$$

Аналогично

$$S_{a_3}(S_{a_2}(S_{a_1}(p))) = (a_3 (a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2)^{-1} a_3) = (a_3 a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2 a_3).$$

Продолжая таким образом, мы можем записать, что для любого нечетного k ($k \in N$ и $k \geq 3$) справедливо

$$S_{a_k}(...(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))...) = (a_k a_{k-1}^{-1} ... a_2^{-1} a_1 p^{-1} a_1 a_2^{-1} ... a_{k-1}^{-1} a_k). \tag{12}$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_{b_1}(S_{a_k}(...(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))...)) &= (b_1 (a_k a_{k-1}^{-1} ... a_2^{-1} a_1 p^{-1} a_1 a_2^{-1} ... a_{k-1}^{-1} a_k)^{-1} b_1) = \\ &= (b_1 a_k^{-1} a_{k-1} ... a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2 ... a_{k-1} a_k^{-1} b_1). \end{aligned} \tag{13}$$

Из равенств (8) следует, что b_1 самосовмещается относительно элементов последовательности $< a_1, ..., a_k >$, т. е. если вместо $b_k, b_{k-1}, ..., b_2$ подставить соответствующие выражения, то получим

$$b_1 = S_{a_k}(...(S_{a_2}(S_{a_1}(b_1)))...). \tag{14}$$

Преобразуем правую часть равенства (14) с учетом того, что k – нечетное натуральное число. Тогда по аналогии с (12) имеем:

$$S_{a_k}(...(S_{a_2}(S_{a_1}(b_1)))...) = (a_k a_{k-1}^{-1} ... a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} ... a_{k-1}^{-1} a_k).$$

Следовательно,

$$b_1 = (a_k a_{k-1}^{-1} ... a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} ... a_{k-1}^{-1} a_k). \tag{15}$$

Подставим (15) в (13). С учетом нейтральности последовательностей и полуабелевости G получим

$$\begin{aligned} & S_{b_1}(S_{a_k}(...(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))...)) = \\ &= ((a_k a_{k-1}^{-1} ... a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} ... a_{k-1}^{-1} a_k) a_k^{-1} a_{k-1} ... a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2 ... a_{k-1} a_k^{-1} b_1) = \\ &= (a_k a_{k-1}^{-1} ... a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} p a_1^{-1} a_2 ... a_{k-1} a_k^{-1} b_1) = \\ &= (a_k a_{k-1}^{-1} ... a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} (p a_1^{-1} a_2 ... a_{k-1} a_k^{-1} b_1)) = \\ &= (a_k a_{k-1}^{-1} ... a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} (b_1 a_1^{-1} a_2 ... a_{k-1} a_k^{-1} p)) = \\ &= (a_k a_{k-1}^{-1} ... a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} b_1 a_1^{-1} a_2 ... a_{k-1} a_k^{-1} p) = p. \end{aligned} \tag{16}$$

Таким образом, справедливость равенства (10) установлена.

Достаточность. Докажем, что если равенство (10) выполняется, то G полуабелева.

Поскольку свойство полуабелевости n-арной группы G при доказательстве необходимости использовалось нами только в равенстве (16), то без повторения рассуждений будем считать все предыдущие равенства верными.

Из равенства (10) и (13) имеем:

$$(b_1 a_k^{-1} a_{k-1} \ldots a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2 \ldots a_{k-1} a_k^{-1} b_1) = p. \tag{17}$$

Подставим в равенство (17) вместо b_1 выражение из (15). Имеем:

$$((a_k a_{k-1}^{-1} \ldots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \ldots a_{k-1}^{-1} a_k) a_k^{-1} a_{k-1} \ldots a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2 \ldots a_{k-1} a_k^{-1}, \\ (a_k a_{k-1}^{-1} \ldots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \ldots a_{k-1}^{-1} a_k)) = p. \tag{18}$$

Перепишем (18) с учетом нейтральности последовательностей xx^{-1} и $x^{-1}x$ для любого $x \in G$. Имеем:

$$(a_k a_{k-1}^{-1} \ldots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} p b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \ldots a_{k-1}^{-1} a_k) = p.$$

Откуда

$$(a_k a_{k-1}^{-1} \ldots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} p) = (p a_k^{-1} a_{k-1} \ldots a_2 a_1^{-1} b_1). \tag{19}$$

Равенство (15) можно переписать в виде

$$(b_1 a_k^{-1} a_{k-1} \ldots a_2 a_1^{-1} b_1) = (a_k a_{k-1}^{-1} \ldots a_2^{-1} a_1). \tag{20}$$

Преобразуем левую часть (19) с учетом (20). Имеем:

$$((b_1 a_k^{-1} a_{k-1} \ldots a_2 a_1^{-1} b_1) b_1^{-1} p) = (p a_k^{-1} a_{k-1} \ldots a_2 a_1^{-1} b_1),$$

откуда

$$(b_1 a_k^{-1} a_{k-1} \ldots a_2 a_1^{-1} p) = (p a_k^{-1} a_{k-1} \ldots a_2 a_1^{-1} b_1). \tag{21}$$

Если в равенстве (21) обозначить

$$x_1 = b_1, x_n = p, x_2^{n-1} = a_k^{-1} a_{k-1} \ldots a_2 a_1^{-1},$$

то получим равенство

$$(x_1 x_2^{n-1} x_n) = (x_n x_2^{n-1} x_1).$$

На основании приведенных рассуждений и определения полуабелевой n-арной группы заключаем, что G – полуабелева группа. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $p, b_1, \ldots, b_k$ *– произвольные точки* n*-арной группы* G ($k \in \mathbf{N}$, $k \geq 3$, k *– нечетное*), *а точки* $a_1, \ldots, a_k \in G$ *такие, что*

$$b_2 = S_{a_1}(b_1), b_3 = S_{a_2}(b_2), \ldots, b_k = S_{a_{k-1}}(b_{k-1}), b_1 = S_{a_k}(b_k), \tag{22}$$

n*-арная группа* G *будет полуабелевой тогда и только тогда, когда справедливо равенство*

$$\overrightarrow{pS_{a_1}(p)} + \overrightarrow{S_{a_1}(p) S_{a_2}(S_{a_1}(p))} + \ldots + \\ + \overrightarrow{S_{a_k}(\ldots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\ldots) S_{b_1}(S_{a_k} \ldots (S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\ldots)} = \vec{0}. \tag{23}$$

Доказательство. *Необходимость*. Пусть G – полуабелева n-арная группа. Установим справедливость равенства (23).

На основании определения 5 из [2] правую часть равенства (23) можно переписать в виде

$$\overrightarrow{pS_{a_1}(p)}+\overrightarrow{S_{a_1}(p)S_{a_2}(S_{a_1}(p))}+\ldots+$$
$$+\overrightarrow{S_{a_k}(\ldots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\ldots)S_{b_1}(S_{a_k}\ldots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\ldots)}=$$
$$=\overrightarrow{pS_{b_1}(S_{a_k}(\ldots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\ldots))}. \tag{24}$$

Рассмотрим выражение $S_{b_1}(S_{a_k}(\ldots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\ldots)$ с учетом определения симметричных точек. Имеем:

$$S_{a_1}(p)=(a_1p^{-1}a_1),$$
$$S_{a_2}(S_{a_1}(p))=S_{a_2}(a_1p^{-1}a_1)=(a_2(a_1p^{-1}a_1)^{-1}a_2)=(a_2a_1^{-1}pa_1^{-1}a_2),$$
$$S_{a_3}(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))=S_{a_3}(a_2a_1^{-1}pa_1^{-1}a_2)=(a_3(a_2a_1^{-1}pa_1^{-1}a_2)^{-1}a_3)=(a_3a_2^{-1}a_1p^{-1}a_1a_2^{-1}a_3).$$

Продолжая таким образом и учитывая, что k – нечетное, имеем:

$$S_{a_k}(\ldots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\ldots)=(a_ka_{k_1}^{-1}\ldots a_2^{-1}a_1p^{-1}a_1a_2^{-1}\ldots a_{k-1}^{-1}a_k).$$

Тогда

$$S_{b_1}(S_{a_k}(\ldots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\ldots))=S_{b_1}(a_ka_{k_1}^{-1}\ldots a_2^{-1}a_1p^{-1}a_1a_2^{-1}\ldots a_{k-1}^{-1}a_k)=$$
$$=(b_1(a_ka_{k_1}^{-1}\ldots a_2^{-1}a_1p^{-1}a_1a_2^{-1}\ldots a_{k-1}^{-1}a_k)^{-1}b_1)=$$
$$=(b_1a_k^{-1}a_{k-1}\ldots a_2a_1^{-1}pa_1^{-1}a_2\ldots a_{k-1}a_k^{-1}b_1). \tag{25}$$

Если в правые части равенств (22), начиная с последнего, подставить соответствующие выражения вместо $b_k,b_{k-1},\ldots,b_2$, то получим равенство

$$b_1=S_{a_k}(S_{a_{k-1}}(\ldots(S_{a_2}(S_{a_1}(b_1))\ldots)). \tag{26}$$

Рассмотрим правую часть равенства (26) с учетом определения симметричных точек. Имеем:

$$S_{a_1}(b_1)=(a_1b_1^{-1}a_1),$$
$$S_{a_2}(S_{a_1}(b_1))=S_{a_2}(a_1b_1^{-1}a_1)=(a_2(a_1b_1^{-1}a_1)^{-1}a_2)=(a_2a_1^{-1}b_1a_1^{-1}a_2),$$
$$S_{a_3}(S_{a_2}(S_{a_1}(b_1)))=S_{a_3}(a_2a_1^{-1}b_1a_1^{-1}a_2)=(a_3(a_2a_1^{-1}b_1a_1^{-1}a_2)^{-1}a_3)=(a_3a_2^{-1}a_1b_1^{-1}a_1a_2^{-1}a_3).$$

Продолжая таким образом и учитывая, что k – нечетное число, получим

$$S_{a_k}(S_{a_{k-1}}(\ldots(S_{a_2}(S_{a_1}(b_1)))\ldots))=(a_ka_{k-1}^{-1}\ldots a_2^{-1}a_1b_1^{-1}a_1a_2^{-1}\ldots a_{k-1}^{-1}a_k).$$

Следовательно,

$$b_1=(a_ka_{k-1}^{-1}\ldots a_2^{-1}a_1b_1^{-1}a_1a_2^{-1}\ldots a_{k-1}^{-1}a_k). \tag{27}$$

Подставим в (25) вместо b_1 выражение из (27). Получим

$$S_{b_1}(S_{a_k}(\ldots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\ldots))=$$
$$=((a_ka_{k-1}^{-1}\ldots a_2^{-1}a_1b_1^{-1}a_1a_2^{-1}\ldots a_{k-1}^{-1}a_k)a_k^{-1}a_{k-1}\ldots a_2a_1^{-1}pa_1^{-1}a_2\ldots a_{k-1}a_k^{-1}b_1). \tag{28}$$

Выполним преобразования в (28) с учетом нейтральности последовательностей и свойства полуабелевости n-арной группы G. Имеем:

$$\begin{gathered} S_{b_1}(S_{a_k}(...(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))...)) = \\ = (a_k a_{k-1}^{-1} ... a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} ... a_{k-1}^{-1} a_k a_k^{-1} a_{k-1} ... a_2 a_1^{-1} (b_1 a_1^{-1} a_2 ... a_{k-1} a_k^{-1} p)) = \\ = (a_k a_{k-1}^{-1} ... a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} b_1 a_1^{-1} a_2 ... a_{k-1} a_k^{-1} p) = p. \end{gathered} \tag{29}$$

С учетом (29) равенство (24) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} \overrightarrow{pS_{a_1}(p)} + \overrightarrow{S_{a_1}(p)S_{a_2}(S_{a_1}(p))} + ... + \\ + \overrightarrow{S_{a_k}(...(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))...)S_{b_1}(S_{a_k}...(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))...)} = \overrightarrow{pp} = \vec{0}. \end{gathered}$$

Тем самым необходимость доказана.

Достаточность. Пусть равенство (23) выполняется. Докажем, что G – полуабелева.

Поскольку свойство полуабелевости группы G в первой части теоремы мы использовали только в равенстве (29), то все предыдущие рассуждения будем считать справедливыми.

Из равенства (24) и условия теоремы следует, что

$$\overrightarrow{pS_{b_1}(S_{a_k}(...(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))...))} = \vec{0}.$$

Поскольку, согласно определению 6 из [2] $\overrightarrow{pp} = \vec{0}$, то

$$\overrightarrow{pS_{b_1}(S_{a_k}(...(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))...))} = \overrightarrow{pp}.$$

Из определения 2 и 4 из [2] следует, что

$$S_{b_1}(S_{a_k}(...(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))...)) = p. \tag{30}$$

Рассмотрим равенство (30) с учетом равенства (25). Имеем:

$$(b_1 a_k^{-1} a_{k-1} ... a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2 ... a_{k-1} a_k^{-1} b_1) = p. \tag{31}$$

Подставим в (31) вместо b_1 выражение из (27). Имеем:

$$((a_k a_{k-1}^{-1} ... a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} ... a_{k-1}^{-1} a_k) a_k^{-1} a_{k-1} ... a_2^{-1} a_1 p a_1^{-1} a_2 ... a_{k-1} a_k^{-1} b_1) = p. \tag{32}$$

С учетом нейтральных последовательностей равенство (32) перепишем в виде

$$(a_k a_{k-1}^{-1} ... a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} p a_1^{-1} a_2 ... a_{k-1} a_k^{-1} b_1) = p. \tag{33}$$

Положим в равенстве (33), что $p = (x_1^n)$, а $b_1 = x_1$ и $a_1 = a_2 = ... = a_k = x_n$.

С учетом того, что k – нечетное число и нейтральности последовательностей, получим

$$(x_n x_1^{-1} x_1^n x_n^{-1} x_1) = (x_1^n).$$

Откуда

$$(x_n x_2^n x_1) = (x_1^n). \tag{34}$$

На основании равенства (34) и определения полуабелевой n-арной группы заключаем, что G – полуабелева. Что и требовалось доказать.

Литература

1. *Vakarelov D.* // God. Sofij. Univ., Mat. Fak. 1966/67. Vol. 61. P. 71–105.
2. *Русаков С. А.* Некоторые приложения теории *n*-арных групп. Минск, 1998.
3. *Dudek W. A.* // Algebras, Groups and Geometries. 1999. Vol. 16. P. 329–354.
4. *Dudek W. A., Stojakovic N. A.* // Czechoslovak Math. J. 2001. Vol. 51 (126). P. 275–283.
5. *Kulazhenko Yu. I.* // Quasigroups and Related Systems. 2011. Vol. 19, no. 2. P. 265–278.
6. *Prüfer H.* // Math. Z. 1924. Bd. 20. S. 165–187.
7. *Certain J.* // Bull. Amer. Math. soc. 1943. Vol. 49. P 869–877.
8. *Baer R.* Linear algebra and projective geometry. New York, 1952.
9. *Brănzel D.* // An. Sti. Iniv. Iasi, sect. I a Mat. 1977. Vol. 23. P. 33–38.
10. *Dörnte W.* // Math. Z. 1928. Vol. 19. P. 1–19.
11. *Post E. L.* // Amer. Math. Soc. 1940. Vol. 48, N. 2. P. 208–350.
12. *Русаков С. А.* Алгебраические *n*-арные системы: Силовская теория *n*-арных групп. Минск, 1992.
13. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М., 1989.
14. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск, 1997.
15. *Го Веньбинь, Шам К. П.* // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 43, № 6. С. 1283–1291.
16. *Аль-Дабабсех А. Ф.* // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та імя П. М. Машэрава. 1999. № 3 (13). С. 44–49.
17. *Kulazhenko Yu. I.* // Algebra and Discrete Math. 2010. Vol. 9, no 2. P. 98–107.
18. *Гальмак А. М., Кулаженко Ю. И.* // Алгебра и теория чисел: Современные проблемы и приложения: тез. докл. X Междунар. конф., Волгоград, 10–16 сент., 2012. г. Волгоград, 2012. С. 20–23.
19. *Курош А. Г.* Общая алгебра: лекции 1969/70 учеб. года. М., 1974.

Yu. I. KULAZHENKO, M. V. SELKIN

ABOUT SEMIABELIAN OF *n*-ARY GROUPS

Summary

The paper presents a new criterion of semiabelian of an *n*-ary group on the basis of the fact of self-returning of an arbitrary point with respect to the elements of the succession, composed of the midpoints of the sides of an arbitrary *k*-angle with an odd *k* ($k \geq 3$) and one of the vertices of the *k*-angle in term symmetrical point and vector *n*-ary groups.