

МАТЭМАТЫКА

УДК 519.216+517.518.8

Л. А. ЯНОВИЧ¹, И. Н. ГУЛО²

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ФУНКЦИЙ ОТ ПРОЦЕССА БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

¹Институт математики НАН Беларуси

²Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка

(Поступила в редакцию 29.11.2013)

Введение. Пусть $\xi(t, \omega)$ ($t \in T \subset R$) – случайный процесс, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, и L_n – последовательность операторов, заданных на этом же вероятностном пространстве, которые ставят в соответствие случайному процессу $\xi(t, \omega)$ процессы $\xi_n(t, \omega) = (L_n \xi)(t, \omega)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). В задаче аппроксимации случайных процессов основным требованием, предъявляемым к операторам L_n , является условие сходимости в том или ином смысле последовательности $\{\xi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ к процессу $\xi(t, \omega)$.

На множестве случайных процессов $\xi(t, \omega)$ введем норму $\|\xi(t, \omega)\| = \sup_{t \in T} E|\xi(t, \omega)|$, предполагая при этом, что среднее значение $E|\xi(t, \omega)|$ – непрерывная на $T \subset R$ функция, где T – ограниченный замкнутый отрезок действительной оси R . На практике обычно используется сходимость в этой норме при $n \rightarrow \infty$ математических ожиданий $E\{\xi_n(t, \omega)\}$ к математическому ожиданию $E\{\xi(t, \omega)\}$ исходного процесса $\xi(t, \omega)$ или сходимость моментов высших порядков процессов $\xi_n(t, \omega)$ к соответствующим моментам процесса $\xi(t, \omega)$.

В данной статье для такого вида сходимости и случайных процессов, задаваемых как функция от процесса броуновского движения, рассматриваются некоторые способы приближения и иллюстрируется их применение на конкретных примерах.

Приближения, основанные на квадратурных формулах гауссова типа. Рассмотрим класс случайных процессов вида

$$\xi(t) = F(W(t)), \quad (1)$$

где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс, т. е. гауссовский случайный процесс с нулевым средним значением и корреляционной функцией $B(t, s) = \min(t, s)$ ($t, s \in [0, 1]$), а $F(x)$ – некоторая заданная непрерывная на R функция. Через $m_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) обозначим k -й центральный момент $m_k(t) = E\{\xi^k(t)\}$ процесса $\xi(t)$. Для моментов $m_k(t)$ случайного процесса (1) справедливо (см., напр., [1]) равенство

$$m_k(t) = E\{F^k(W(t))\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} F^k(\sqrt{2t}x) dx. \quad (2)$$

От функции $F(x)$ требуется, чтобы интеграл (2) был сходящимся.

Далее будем использовать квадратурную формулу наивысшей алгебраической степени точности [2]

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} F^k(\sqrt{2t}x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{v=1}^n A_v F^k(\sqrt{2t}x_v) + r_n(F^k), \quad (3)$$

где x_v – корни многочлена Эрмита $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$, $A_v = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{[H'_n(x_v)]^2}$, а остаток $r_n(F^k)$

для гладких функций $F(x)$ задается равенством $r_n(F^k) = \frac{n!}{2^n (2n)!} \frac{d^{2n}}{d\eta^{2n}} F^k(\sqrt{2t}\eta)$, η – некоторая точка из R . Квадратурную сумму в формуле (3) обозначим

$$S_{nk}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{v=1}^n A_v F^k(\sqrt{2t}x_v). \quad (4)$$

Коэффициенты A_v могут быть записаны также в виде

$$A_v = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} l_{nv}(x) dx,$$

$$\text{где } l_{nv}(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{v-1})(x-x_{v+1})\dots(x-x_n)}{(x_v-x_1)\dots(x_v-x_{v-1})(x_v-x_{v+1})\dots(x_v-x_n)}.$$

Рассмотрим далее последовательность случайных процессов

$$\xi_{nk}(t) = \sum_{v=1}^n l_{nv} \left(\frac{W(t)}{\sqrt{2t}} \right) F^k(\sqrt{2t}x_v) \quad (n, k = 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Для центральных моментов $m_{nk}(t) = E\{\xi_{nk}(t)\}$ процесса (5), используя формулу (2), получим, что $m_{nk}(t) = S_{nk}(t)$.

При исследовании свойств случайных процессов вида (1), в том числе и в задаче аппроксимации такого класса процессов, широко используются ортогональные на промежутке $(-\infty, \infty)$ с весом $p(x) = e^{-x^2}$ многочлены Эрмита, достаточно полная теория которых изложена, например, в работе [3]. Заметим, что фундаментальные интерполяционные многочлены $l_{nk}(x)$ могут быть записаны в виде $l_{nk}(x) = \frac{H_n(x)}{(x-x_k)H'_n(x_k)} = \frac{1}{2n} \frac{H_n(x)}{(x-x_k)H_{n-1}(x_k)}$. Многочлены Эрмита $H_n(x)$ записаны в виде $H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$, где $[v]$ – целая часть числа v .

Если функция $F^{2k}(\sqrt{2t}x)$ кусочно-гладкая на любом конечном интервале $(-l, l)$ и интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2} F^{2k}(\sqrt{2t}x) dx$ имеет конечное значение, тогда функция $F^k(\sqrt{2t}x)$ разложима на $(-\infty, \infty)$ в ряд Фурье по многочленам Эрмита $H_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots$), который сходится к $F^k(\sqrt{2t}x)$ в точках $\sqrt{2t}x$, являющихся точками непрерывности этой функции (см. [3, с. 91]).

Таким образом, в силу точности квадратурной формулы (3) для алгебраических многочленов степени $2n-1$ остаточный член $r_n(F^k)$ формулы (3) для широкого класса функций $F^k(x)$ будет стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$ и, соответственно, в качестве приближения случайного процесса (1) может быть использована последовательность случайных процессов (5).

Рассмотрим примеры случайных процессов вида (1) и приведем результаты вычислительного эксперимента для моментов первых и вторых порядков.

П р и м е р 1. Случайный процесс $\xi(t) = \sin(\alpha W(t))$, где α – числовой параметр, является решением стохастического дифференциального уравнения

$$d\xi(t) = \alpha\sqrt{1-\xi^2(t)}dW(t) - \frac{1}{2}\alpha^2\xi(t)dt \quad (6)$$

при начальном условии $\xi(0)=0$. Момент второго порядка $m_2(t)$ этого процесса может быть вычислен по формуле (2):

$$m_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin^2(\alpha\sqrt{2t}x) dx = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-2\alpha^2 t}\right).$$

И, соответственно, $\xi_{n2}(t)$ для процесса $\xi(t) = \sin(\alpha W(t))$ примет вид $\xi_{n2}(t) = \sum_{v=1}^n l_{nv} \left(\frac{W(t)}{\sqrt{2t}} \right) \sin^2(\alpha\sqrt{2t}x_v)$, а $S_{n2}(t)$ будет задаваться формулой $S_{n2}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{v=1}^n A_v \sin^2(\alpha\sqrt{2t}x_v)$. Значение погрешности $r_{n2}(t) = m_2(t) - S_{n2}(t)$ вычисления $m_2(t)$ в точках $t_i = \frac{i}{5} (i=0,1,\dots,5)$ для $\alpha=1$ и $n=10$ приведено в табл. 1.

Таблица 1

t_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$m_2(t_i)$	0,000000	0,164840	0,275336	0,349403	0,399052	0,432332
$S_{n2}(t_i)$	0,000000	0,164785	0,275243	0,349285	0,398917	0,432184
$r_{n2}(t_i)$	0,000000	0,000055	0,000093	0,000117	0,000135	0,000148

Пример 2. Проведены аналогичные вычисления для процесса $\xi(t) = \cos(\alpha W(t))$, который является решением стохастического дифференциального уравнения (6) с начальным условием $\xi(0)=1$ и коэффициентом $-\alpha$. Для данного процесса математическое ожидание $m_1(t)$ и второй центральный момент $m_2(t)$ имеют, соответственно, вид $m_1(t) = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 t}$ и $m_2(t) = \frac{1}{2} \left(1 + e^{-2\alpha^2 t}\right)$, а $\xi_{n2}(t) = \sum_{v=1}^n l_{nv} \left(\frac{W(t)}{\sqrt{2t}} \right) \cos^2(\alpha\sqrt{2t}x_v)$ и $S_{n2}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{v=1}^n A_v \cos^2(\alpha\sqrt{2t}x_v)$. Численные значения $r_{n2}(t) = m_2(t) - S_{n2}(t)$ в тех же точках, что и в примере 1 при $\alpha=1$ и $n=10$, приведены в табл. 2.

Таблица 2

t_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$m_2(t_i)$	1,00000	0,83516	0,72466	0,65060	0,60095	0,56767
$S_{n2}(t_i)$	0,99966	0,83488	0,72442	0,65038	0,60075	0,56748
$r_{n2}(t_i)$	0,00034	0,00028	0,00024	0,00022	0,00020	0,00019

Пример 3. Случайный процесс

$$\xi(t) = e^{\sigma W(t) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \quad (7)$$

является решением линейного стохастического уравнения

$$d\xi(t) = r\xi(t)dt + \sigma\xi(t)dW(t) \quad (8)$$

при начальном условии $\xi(0)=1$, где r и σ – некоторые числа. Здесь математическое ожидание k -момента решения $\xi(t)$ задается формулой

$$m_k(t) = E\{\xi^k(t)\} = e^{k\left(r + \frac{1}{2}(k-1)\sigma^2\right)t}.$$

Приближенное значение $S_{nk}(t)$ k -го момента процесса (7) примет вид

$$S_{nk}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{k\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \sum_{v=1}^n A_v e^{k\sigma\sqrt{2t}x_v}.$$

Из проведенных вычислений следует, что для этого примера погрешности $r_{nk}(t) = m_k(t) - S_{nk}(t)$ при $n = 9, n = 10, r = 1, \sigma = \frac{1}{2}$ и $k = 1, 2$ в точках $t_i = \frac{i}{5} (i = 0, 1, \dots, 5)$ значительно меньше, чем в предыдущих примерах. В этих точках $|r_{nk}(t_i)| \leq 10^{-7}$ для $k = 1, 2$.

Многочлены Бернштейна и Бернштейна – Канторовича в задаче аппроксимации случайных процессов. Приближение (4) процесса вида (1) получено на основе интерполяционной квадратурной формулы Гаусса – Эрмита (3). Аппроксимации иной структуры для этого класса процессов могут быть построены с использованием и других известных методов приближения непрерывных функций.

Рассмотрим случайные операторы, которые являются некоторым аналогом детерминированных линейных положительных операторов. Пусть на множестве случайных процессов $\xi(t)$ задана последовательность линейных операторов $\{L_n(\xi; t)\}_{n=0}^{\infty}$, принимающих соответственно значения $\xi_n(t)$, где $\xi_n(t)$ – случайные процессы, определенные на том же вероятностном пространстве, что и $\xi(t)$. Положим $E\{L_n(\xi; t)\} = E\{\xi_n(t)\} = f_n(t)$, и пусть функции $f_n(t)$ принадлежат пространству $C(T)$, а последовательность $\{f_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ сходится равномерно на T к непрерывной функции $f(t) = E\{\xi(t)\}$. Если $f_n(t) = \tilde{L}_n(f; t)$, где $\tilde{L}_n$ – линейный положительный на $C(T)$ оператор, порожденный исходным оператором $L_1(\xi; t)$, то случайный оператор $L_n(\xi; t)$ будем называть *линейным положительным оператором* на множестве процессов $\xi(t)$. Приведем некоторые сведения, относящиеся к задаче аппроксимации линейными положительными операторами.

В теории приближения функций получила широкую известность теорема П. П. Коровкина о сходимости в пространстве непрерывных функций линейных положительных операторов [4], суть которой состоит в том, что из равномерной сходимости на отрезке $[a, b]$ последовательность линейных положительных операторов $L_n(f; x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) для трех функций $f(x) = x^i$ ($i = 0, 1, 2$), следует их сходимость на этом множестве к любой непрерывной функции $f(x)$.

Имеется и тригонометрический аналог данной теоремы. Эти результаты получили дальнейшее широкое развитие. Они перенесены на операторы, определенные на **банаховых пространствах**, на алгебры, топологические группы и на множество случайных функций и процессов [5–8]. Проиллюстрируем применение случайных линейных положительных операторов, порождаемых многочленами Бернштейна и Бернштейна – Канторовича.

Рассмотрим последовательность случайных процессов $\xi_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) вида

$$\xi_n(t) = \sum_{k=0}^n \sum_{v=0}^{n-k} c_{kv} W^{2k+2v}(t) f\left(\frac{k}{n}\right), \quad (9)$$

где $c_{kv} = (-1)^v \frac{n!}{k!v!(n-k-v)!(2k+2v-1)!!}$, $f(t)$ – непрерывная на $[0, 1]$ функция. Нетрудно убедиться, что $E\{\xi_n(t)\}$ совпадает с многочленом Бернштейна n -й степени $B_n(f; t) = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ для функции $f(t)$, $t \in [0, 1]$.

Аналогичное соотношение $E\{\xi_n(t)\} = B_n(f;t)$ имеет место и для процесса

$$\xi_n(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(1-t)^{n-k}}{(2k-1)!!} W^{2k}(t) f\left(\frac{k}{n}\right). \quad (10)$$

Для случайного процесса вида

$$\tilde{\xi}_n(t) = (n+1) \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(1-t)^{n-k}}{(2k-1)!!} W^{2k}(t) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(s) ds \quad (11)$$

справедливо соотношение $E\{\tilde{\xi}_n(t)\} = K_n(f;t)$, где $K_n(f;t) = (n+1) \sum_{k=0}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(s) ds$

есть многочлен Бернштейна – Канторовича n -й степени для функции $f(t)$. Многочлены $B_n(f;t)$ и $K_n(f;t)$ являются линейными положительными операторами на пространстве $C[0,1]$.

Так как последовательности многочленов Бернштейна $B_n(f;t)$ и Бернштейна – Канторовича $K_n(f;t)$ сходятся равномерно на отрезке $[0,1]$ для любой непрерывной на этом отрезке функции $f(t)$, то математические ожидания процессов (9)–(11) будут аппроксимировать математическое ожидание исходного процесса $\xi(t)$ с математическим ожиданием $f(t)$ с любой степенью точности.

Пример 4. Пусть $\xi(t) = e^{W(t)}$. Тогда $m_1(t) = E\{e^{W(t)}\} = e^{\frac{t}{2}}$, и на основании формул (9)–(11) получим следующие приближения:

$$\begin{aligned} e^{W(t)} &\approx \sum_{k=0}^n \sum_{v=0}^{n-k} c_{kv} e^{\frac{k}{2n}} W^{2k+2v}(t), \quad e^{W(t)} \approx \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(1-t)^{n-k}}{(2k-1)!!} e^{\frac{k}{2n}} W^{2k}(t), \\ e^{W(t)} &\approx 2(n+1) \left(e^{\frac{1}{2(n+1)}} - 1 \right) \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(1-t)^{n-k}}{(2k-1)!!} e^{\frac{k}{2(n+1)}} W^{2k}(t) \quad (n=0,1,2,\dots). \end{aligned} \quad (12)$$

Численные значения погрешности $r_n(t) = m_1(t) - B_n(m_1;t)$ и $\tilde{r}_n(t) = m_1(t) - K_n(m_1;t)$ приближения математического ожидания $m_1(t) = e^{\frac{t}{2}}$ процесса $\xi(t) = e^{W(t)}$, математическими ожиданиями приближенных процессов (12) в равноотстоящих точках $t_i = \frac{i}{5} (i=0,1,\dots,5)$ отрезка $[0,1]$ при $n=10$ приведены в табл. 3.

Таблица 3

t_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$r_n(t_i)$	0,00000	-0,00223	-0,00368	-0,00404	-0,00296	0,0000
$\tilde{r}_n(t_i)$	-0,02308	-0,01714	-0,00873	-0,00268	0,01767	0,03691

Из вышеизложенного следует, что для случайных процессов

$$\begin{aligned} \xi_{nm}(t) &= \sum_{k=0}^n \sum_{v=0}^{n-k} c_{kv} W^{2k+2v}(t) S_{mk}\left(\frac{t_k}{n}\right), \quad \xi_{nm}(t) = \sum_{k=0}^n \eta_{nk}(t) S_{mk}\left(\frac{t_k}{n}\right), \\ \tilde{\xi}_{nm}(t) &= (n+1) \sum_{k=0}^n \eta_{nk}(t) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} S_{mk}(s) ds, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\eta_{nk}(t) = C_n^k \frac{(1-t)^{n-k}}{(2k-1)!!} W^{2k}(t)$, $S_{mk}(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^m A_i F^k(\sqrt{2s}x_i)$, x_i – как и раньше, корни многочлена Эрмита степени m , справедливо соотношение

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} E\{\xi_{nm}(t)\} = \lim_{n,m \rightarrow \infty} E\{\tilde{\xi}_{nm}(t)\} = E\{\xi^k(t)\} \quad (k=1,2,\dots).$$

П р и м е р 5. Моменты второго порядка $m_2(t)$ случайных процессов, рассмотренных в примерах 1 и 2, могут быть вычислены приближенно с помощью многочленов Бернштейна $B_n(f;t)$, в которых $f(t)$ заменена на функции $S_{n2}(t)$, соответствующие этим процессам.

Численные значения погрешности $r_n(t) = m_2(t) - B_n(S_{62}, t)$, где $B_n(S_{62}, t) = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k} S_{62}\left(\frac{k}{n}\right)$, в точках $t_i = \frac{i}{10}$ ($i=0,2,4,\dots,10$) для $\alpha=1$ и $n=10$ и случайного процесса $\xi(t) = \sin(\alpha W(t))$ приведены в табл. 4, а для случайного процесса $\xi(t) = \cos(\alpha W(t))$ – в табл. 5.

Таблица 4

t_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$r_n(t_i)$	0,00000	0,01046	0,01085	0,00735	0,00294	-0,00012

Таблица 5

t_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$r_n(t_i)$	0,000000	0,0000002	0,000009	0,000082	0,000380	0,001200

Приближенные формулы для процесса вида (1) могут быть построены и на основе других линейных положительных операторов, определенных на пространстве $C(T)$.

Работа выполнена в рамках проекта Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (Ф12–016).

Литература

1. Янович Л. А. Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам. Минск, 1976.
2. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М., 1967.
3. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.; Л., 1963.
4. Коровкин П. П. Линейные операторы и теория приближений. М., 1959. (Korovkin P. P. Linear operators and approximation theory. Delhi: Hindustan Publ. Corp., 1960.)
5. Nakonechnyi A. G. // Math. Statist. and Probability. 1985. Vol. 16. P. 23–26.
6. Weba M. // Mathematische Zeitschrift. 1976. Vol. 192. P. 73–80.
7. Altomare F., Campiti M. Korovkin-type Approximation Theory and its Applications. Berlin; New York, 1994.
8. Зарицкая З. В. // Доповіді АН УРСР. Сер. А. 1967. № 1. С. 14–17.

L. A. YANOVICH, I. N. GULO

APPROXIMATE CALCULATION OF THE FUNCTIONS OF THE BROWNIAN MOTION PROCESS

Summary

In the article, the sequence of processes constructed for the random process, which is defined as a function of the Brownian motion process, are considered. The central moments of the sequences converge to the corresponding moments of the initial process. The accuracy of approximations is illustrated by examples.