ISSN 1561-2430 (print)
УДК 536.24

Поступила в редакцию 16.10.2017
Received 16.10.2017

Ю. П. Выблый[1], А. А. Леонович[2]

[1]Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
[2]Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЕ СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Аннотация. В рамках скалярно-тензорной теории гравитации рассмотрено скалярное поле, источником которого является след собственного тензора энергии-импульса и след тензора энергии-импульса материи. Потенциал, входящий в лагранжиан скалярного поля, зависит от трех параметров: константы скалярного взаимодействия, массы скалярного поля и константы, определяющей минимум энергии поля. Рассмотрено представление скалярно-тензорной теории на фоне пространства Минковского с линейной связью метрики и тензорного гравитационного потенциала и получены дополнительные к полевым уравнениям условия, имеющие смысл ограничения тензорного поля по спиновым состояниям.

Для космологической задачи показано, что в соответствии с наблюдениями дополнительные условия приводят к пространственно-плоской Вселенной. Получены численные решения полевых уравнений, на основе которых показано, что космологические параметры модели хорошо описывают современные наблюдательные данные и, таким образом, рассматриваемое скалярное поле может моделировать темную энергию. Проведено исследование областей изменения параметров космологического решения и сопоставление космологического скалярно-тензорного решения с ΛCDM – моделью общей теории относительности. Выполнен анализ возможных сценариев космологической эволюции в зависимости от параметров модели.

Ключевые слова: гравитационное взаимодействие, уравнения Эйнштейна, скалярное поле, космология, космологические параметры, темная энергия

Для цитирования. Выблый, Ю. П. Взаимодействующее скалярное поле в теории гравитации / Ю. П. Выблый, А. А. Леонович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 4. – С. 98–103.

Yu. P. Vyblyi[1], A. A. Leonovich[2]

[1]B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
[2]Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

INTERACTING SCALAR FIELD IN THE THEORY OF GRAVITY

Abstract. In the framework of the scalar-tensor theory of gravitation, a scalar field is considered, whose source is the trace of own energy-momentum tensor and the trace of the energy-momentum tensor of matter. The potential that enters the Lagrangian of a scalar field depends on three parameters: scalar interaction constant, scalar field mass, and constant that determines the minimum of the field energy. The representation of the scalar-tensor theory on the Minkowski background with a linear connection between the metric and the tensor gravitational potential is considered, and the additional conditions for field equations are obtained that restriction a tensor field over its spin states.

For a cosmological problem, it is shown that additional conditions lead to a spatially flat universe according to observations. Numerical solutions of field equations are obtained and on their basis it is shown that the cosmological parameters of the model well describe modern observational data and the scalar field under consideration can then successfully simulate dark energy. The area of variation of parameters of the cosmological solution was studied and a cosmological scalar-tensor solution was compared with the ΛCDM-model of General Relativity. Depending on the model parameters for cosmological evolution, possible scenarios are analyzed.

Keywords: gravitational interaction, Einstein equations, scalar field, cosmology, cosmological parameters, dark energy

For citation. Vyblyi Yu. P., Leonovich A. A. Interacting scalar field in the theory of gravity. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2017, no. 4, pp. 98–103.

1. Гравитационное взаимодействие в пространстве Минковского. После открытия ускоренного расширения Вселенной [1–4] в литературе активно обсуждаются скалярно-тензорные теории гравитации, в которых нелинейное скалярное поле моделирует темную энергию (см., напр., [5–6]). Проблема, имеющаяся в этом подходе, состоит в выборе соответствующего лагранжиана. Так, например, в [7] было показано, что любое скалярное поле, находящееся в режиме медленного скатывания, может имитировать Λ-член в уравнениях Эйнштейна и, следовательно, приводить к удовлетворительному космологическому сценарию.

В данной работе скалярно-тензорная теория рассматривается в рамках представления энштейновской теории гравитации, использующего пространство Минковского. В этом подходе гравитационное взаимодействие описывается симметричным тензорным полем $h^{\mu\nu}$ в пространстве Минковского и постулируется, что источником линейного поля является метрический тензор энергии-импульса всей рассматриваемой физической системы, включая само гравитационное поле. Этот постулат приводит к уравнениям Эйнштейна для эффективной метрики $g^{\mu\nu}$, определяемой условием $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}=\sqrt{-\gamma}(\gamma^{\mu\nu}+kh^{\mu\nu})$, где $\gamma^{\mu\nu}$ – метрика пространства Минковского в выбранной системе координат, k – константа гравитационного взаимодействия [8, 9]. Отметим, что любое риманово пространство, согласно математическому определению многообразия, отображается на совокупность локальных карт, каждая из которых является в данном контексте областью пространства Минковского. Определяя топологию пространства с помощью метрики $g^{\mu\nu}$, приходим к биметрическому формализму общей теории относительности, а с помощью метрики $\gamma^{\mu\nu}$ – к релятивистской теории гравитации [10]. Хотя локальные уравнения в этих случаях одни и те же, решения будут, вообще говоря, различны, если их рассматривать на многообразии в целом.

Поскольку в силу тождеств Бианки система уравнений Эйнштейна является недоопределенной, к ней необходимо добавить еще четыре уравнения, которые можно выбрать в виде $D_\mu h^{\mu\nu}=0$, где D_μ – ковариантная производная в пространстве Минковского. Эти уравнения обеспечивают ньютоновский предел общей теории относительности и имеют смысл ограничения поля $h^{\mu\nu}$ по спиновым состояниям. Указанная выше связь метрики и потенциала приводит к общековариантным условиям гармоничности для метрики $D_\mu\sqrt{-g}g^{\mu\nu}=0$. Существенно, что эти уравнения содержат не саму метрику Минковского, а построенные из нее символы Кристоффеля, откуда следует, вообще говоря, неоднозначность в задании системы координат. Для устранения этой неоднозначности в [10] вводится в рассмотрение масса гравитона, при этом соответствующий член в уравнениях поля явно сдержит метрику Минковского.

Для того чтобы иметь возможность рассматривать самосогласованную теорию безмассового тензорного поля, будем использовать линейную связь метрики и потенциала в виде $g_{\mu\nu}=\gamma_{\mu\nu}+kh_{\mu\nu}$, приводящую к условиям

$$\gamma^{\mu\nu}D_\mu g_{\nu\alpha}=0. \tag{1}$$

Заменяя метрику Минковского на метрику $g_{\mu\nu}$ с линейной связью в лагранжиане линейного тензорного поля, мы по-прежнему придем к уравнениям Эйнштейна. Источником будет теперь не метрический тензор энергии-импульса, а тензорное продолжение псевдотензора энергии-импульса Вейнберга [9, гл. 7], что не изменит физических характеристик системы, так как на решениях полевых уравнений эти тензора совпадают.

2. Самодействующее скалярное поле. По аналогии с тензорным полем постулируем, что уравнение скалярного поля φ, взаимодействующего минимальным образом с гравитационным, можно представить в виде

$$\left(\square-m^2\right)\varphi=q\left(T^M+T^\varphi\right), \tag{2}$$

где $\square=-g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$, m – масса скалярного поля, $T=T_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ – след соответствующего тензора энергии импульса, q – константа скалярного взаимодействия. Лагранжиан, приводящий к уравнению (2), имеет вид [11]

$$L=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{f}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu}g^{\mu\nu}-m^2\varphi^2+Cf^2\right)\sqrt{-g}+L_M(fg_{\mu\nu},Q_M), \tag{3}$$

где $f=(1+2q\varphi)$, C – константа, Q_M – поля материи. Отметим, что без учета взаимодействия скалярного поля с материей соответствующий лагранжиан для случая $C = 0$ был найден ранее в [12]. Постулат об источнике скалярного поля приводит к тому, что материя движется в пространстве с эффективной метрикой $f_{\mu\nu}=(1+2k\varphi)g_{\mu\nu}$, и, таким образом, взаимодействие со скалярным полем не меняет метрического характера теории. Из (3) следует явный вид уравнения скалярного поля

$$\left(\Box - m^2\right)\varphi = q\left(-\frac{\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi}{f}+2m^2\varphi^2-2Cf^2+T\grave{\imath}\right). \tag{4}$$

Потенциал скалярного поля

$$V=\frac{1}{2}m^2\varphi^2-\frac{C}{2}(1+2q\varphi)^2 \tag{5}$$

при условии $C<m^2/4k^2$ имеет минимум в точке φ_0, являющейся постоянным решением свободного нелинейного уравнения скалярного поля

$$\varphi_0=\frac{2kC}{m^2-4qC},\quad V(\varphi_0)=-\frac{m^2C}{2(m^2-4qC)}. \tag{6}$$

При $C < 0$ потенциал в точке минимума энергии положителен и может быть отождествлен с Λ-членом в уравнениях Эйнштейна. При $0<C<m^2/4q^2$ потенциал $V(\varphi_0)<0$. В этом случае член $\left|V(\varphi_0)\right|$ может быть интерпретирован как квадрат массы гравитона μ^2, поскольку в линейном приближении уравнения Эйнштейна могут быть представлены в виде

$$\left(\Box+V(\varphi_0)\right)h_{\mu\nu}=V(\varphi_0)\gamma_{\mu\nu}. \tag{7}$$

Здесь, в отличие от свободного массивного уравнения Фирца – Паули в пространстве Минковского, член $V(\varphi_0)\gamma_{\mu\nu}$ представляет собой тензор энергии-импульса скалярного поля, находящегося в состоянии с минимумом энергии. Таким образом, взаимодействие со скалярным полем позволяет ввести массу гравитона без явного нарушения калибровочной инвариантности эйнштейновского лагранжиана.

3. Космологическое решение. Рассмотрим космологические уравнения для однородной и изотропной Вселенной, в которой как тензорное, так и скалярное поле зависит только от времени. Интервал Фридмана – Леметра – Робертсона – Уолкера должен теперь быть записан для метрики $f_{\mu\nu}$ следующим образом:

$$ds^2=f_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu=f_{00}dt^2-a^2\left(\frac{dr^2}{1-\kappa r^2}+r^2d\Omega^2\right). \tag{8}$$

Уравнения (1) примут вид

$$\gamma^{\mu\nu}D_\mu f_{\nu\alpha}=\frac{f_{,\mu}}{f}f_{\mu\alpha}. \tag{9}$$

Подставляя метрику (8) в уравнения (9), найдем, что $f_{00}=f$ и $\kappa = 0$. Таким образом, из уравнений (11) вытекает, что Вселенная является плоской на всех этапах своей эволюции. Важно отметить, что условие $\kappa = 0$ не является координатным эффектом, поскольку пространственно-плоскую метрику Фридмана – Леметра – Робертсона – Уолкера нельзя получить из метрики общего вида (8) преобразованием координат. Переходя далее в (8) к собственному (наблюдаемому) времени, получаем обычное выражение для пространственно-плоской метрики Фридмана – Леметра – Робертсона – Уолкера.

В современную эпоху в состав Вселенной входит барионная и темная материя и излучение, к которому отнесем фотоны и нейтрино. Пренебрегая вкладом излучения, запишем космологическую систему уравнений, состоящую из уравнения Фридмана, закона сохранения энергии и уравнения скалярного поля (точка над величиной означает дифференцирование по времени):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2=\frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{\dot{\varphi}^2}{f}+\frac{1}{2}\frac{m^2\varphi^2}{f}-Cf+f\varepsilon\right), \tag{10}$$

$$\dot{\varphi}\ddot{\varphi}-3\frac{q}{f}\dot{\varphi}+m^2\varphi\dot{\varphi}-4qCf\dot{\varphi}+3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi}^2+qf\dot{\varphi}\varepsilon+f^2\left(\dot{\varepsilon}+3\frac{\dot{a}}{a}\varepsilon\right)=0, \tag{11}$$

$$\ddot{\varphi}+3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi}+q\frac{\dot{\varphi}^2}{f}+m^2\varphi f^2-2Cqf^2+qf\varepsilon=0, \tag{12}$$

где ε – плотность барионной и темной материи. Система уравнений (10)–(12) должна решаться при заданных начальных условиях

$$a(0)=1, H(0)=H_0, \varphi(0)=\varphi_{(0)}, \dot{\varphi}(0)=\dot{\varphi}_{(0)}, \tag{13}$$

здесь $t = 0$ означает настоящий момент времени. Начальные условия для скалярного поля можно определить, если использовать значения параметров темной энергии

$$\Omega_{DE}=\frac{\varepsilon^{\varphi}}{\varepsilon^{c}}=0,74,\quad \omega_{DE}=\frac{p^{\varphi}}{\varepsilon^{\varphi}}=-0,97 \tag{14}$$

и выражения для плотностей энергии и давления скалярного поля

$$\varepsilon^{\varphi}=\frac{1}{2f}\left(\dot{\varphi}^2+m^2\varphi^2-Cf^2\right),\quad p^{\varphi}=\frac{1}{2f}\left(\dot{\varphi}^2+m^2\varphi^2+Cf^2\right). \tag{15}$$

Рассмотрим ограничения на параметры, приводящие к режиму медленного скатывания, который определяется условием

$$H\dot{\varphi}\sim\frac{\partial V}{\partial\varphi}. \tag{16}$$

Для квадратичного потенциала (5) соответствующее условие (18) приводит к соотношению $\frac{V}{\varphi^2} << H^2$ [13], что с учетом выражения для эффективного Λ-члена (6), значений φ_0 и H_0, а также условия $\ddot{\varphi}=0$ в уравнении скалярного поля позволяет получить соотношение между двумя независимыми параметрами.

Ниже приведены результаты численного решения системы (10)–(12) для случая безмассового скалярного поля и без учета взаимодействия с барионной материей для значения параметра $q = 1$ [14]. Момент равных вкладов плотностей энергии скалярного поля и материи отвечает значению безразмерного времени $T = 0{,}67$ и красному смещению $z = 0{,}431$. Аналогичные величины в ΛCDM-модели – $T = 0{,}68$ и $z = 0{,}417$. Для параметра замедления модель дает значение $q = -0{,}574$ и ΛCDM-модель – $q = -0{,}61$ при $\Omega_M = 0{,}26$ и $\Omega_\Lambda = 0{,}74$. Значение времени, которое соответствует переходу от замедления расширения к ускорению ($q = 0$), соответствует $z = 0{,}767$ для рассматриваемой модели и $z = 0{,}785$ для ΛCDM-модели.

На рис. 1 приведены зависимости параметра Хаббла от времени и красного смещения. Сплошные линии соответствуют рассматриваемой модели, пунктирные – ΛCDM-модели. Величины параметра Хаббла в обеих моделях совпадают в современную эпоху, однако в дальнейшем начинают различаться.

На рис. 2 приведены зависимости фотометрического расстояния от красного смещения для двух моделей для малых (левый график) и больших (правый график) значений красного смещения.

Выводы. Проведенное рассмотрение показывает, что космологический сценарий скалярно-тензорной теории гравитации с взаимодействующим скалярным полем позволяет определять

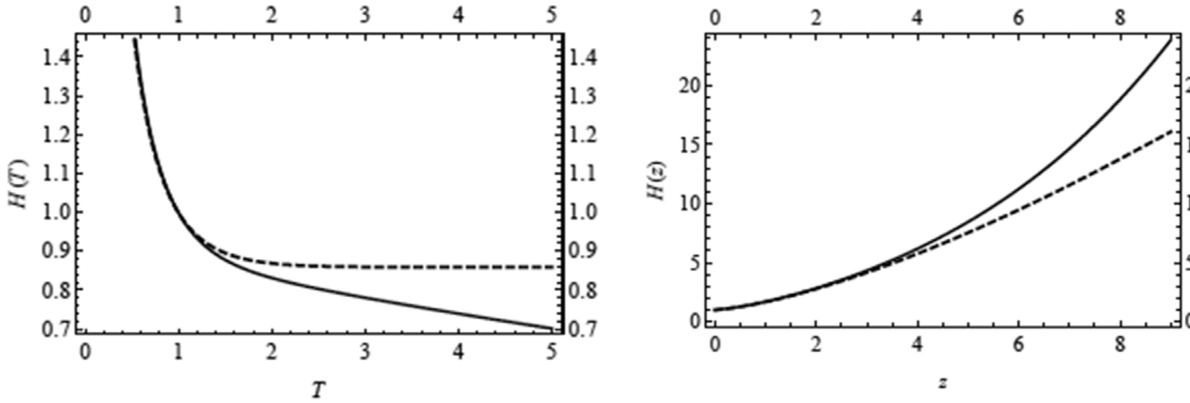

Рис. 1

Fig. 1

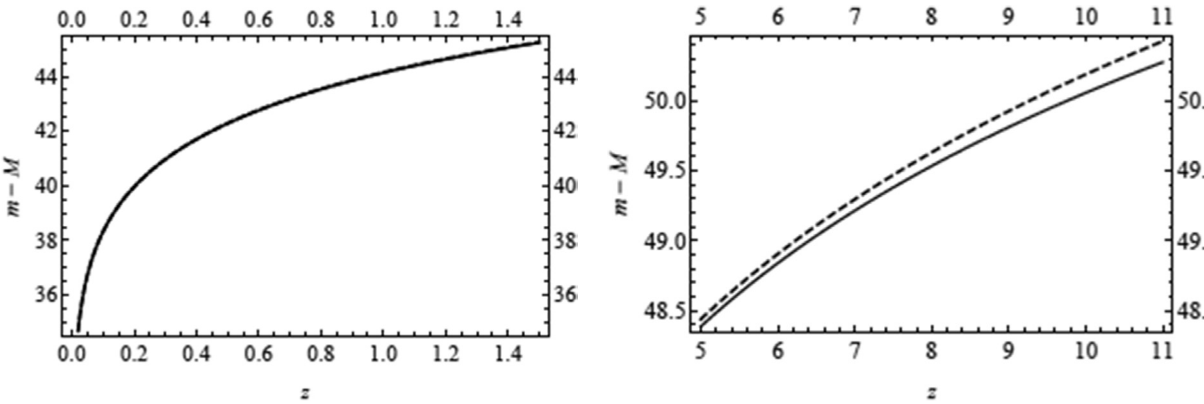

Рис. 2

Fig. 2

космологические параметры в хорошем согласии со стандартной ΛCDM-моделью. На основе полученных численных решений системы космологических уравнений проведено вычисление параметра Хаббла $H \equiv \dot{a} / a$ и построена диаграмма Хаббла, показывающая зависимость фотометрического расстояния до объекта от величины его красного смещения. Из результатов численных расчетов следует, что различие в значениях параметра Хаббла и фотометрического расстояния для двух моделей начинается со значения $z = 5$. В случае массивного скалярного поля анализ зависимости космологической эволюции от параметров теории в будущем приводит к возможности существования трех режимов: бесконечно-ускоренного расширения, расширения с последующим замедлением и режима осцилляций, при котором стадия расширения сменяется стадией сжатия.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф16-044).

Авторы выражают благодарность И. Г. Дудко за проведение вычислений.

Acknowledgements. This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (Project No. F16-044).

The authors would like to thank I. G. Dudko for doing the calculations.

Список использованных источников

1. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Comstant / A. G. Riess [et al.] // Astron. J. – 1998. – Vol. 116, № 3. – P. 1009–1012.

2. Measurement of Ω and Λ from 42 High-redshift Supernovae / S. Perlmutter [et al.] // Astroph. J. – 1999. – Vol. 517, № 2. – P. 565–586.

3. Matos, T. Spherical scalar field halo in galaxies / T. Matos, F. S. Guzman, D. Nunez // Phys. Rev. D. – 2000. – Vol. 62. – P. 061301.

4. Perlmutter, S. Supernovaand Gamma Ray Bursts / S. Perlmutter, B. P. Schmidt; ed. K. Weiler. – Springer, 2003.

5. Matos, T. Dynavical Approach to the Cosmological Constant / T. Matos, F. S. Guzman // Class. Quant. Grav. – 2001. – Vol. 18, № 23. – P. 5055–5064.

6. Peebles, P. J. The cosmological constant and dark energy / P. J. Peebles, B. Ratra // Rev. Mod. Phys. – 2003. – Vol. 75, № 2. – P. 559–606.

7. Scherrer, R. J. Thawing quintessence with a nearly flat potential / R. J. Scherrer, A. A. Sen // Phys. Rev. D. – 2008. – Vol. 77. № 8. – P. 083515.

8. Deser, S. Self-interaction and gauge invariance / S. Deser // Gen. Rel. Grav. – 1970. – Vol. 1, № 1. – P. 9–15.

9. Weinberg, S. Gravitation and Cosmology / S. Weinberg. – New-York; London; Sydney; Toronto: J. Wiley and Sons Inc., 1972. – 657 p.

10. Логунов, А. А. Релятивистская теория гравитации / А. А. Логунов. – М.: Наука, 2011. – 351 с.

11. Выблый, Ю. П. Скалярное поле с источником в виде следа тензора энергии-импульса как модель темной энергии / Ю. П. Выблый, А. Н. Тарасенко // Ковариантные методы в теоретической физике: сб. науч. тр. – Минск, 2011. – Вып. 7. – С. 36–44.

12. Freund, P. Scalar field coupled to the trace of the energy-momentum tensor / P. Freund, Y. Nambu // Phys. Rev. – 1968. – Vol. 174, № 5. – P. 1741–1743.

13. Горбунов Д. С., Рубаков В. А. Введение в теорию ранней Вселенной / Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков. – М.: Красанд, 2016. – 568 с.

14. Dudko, I. G. Scalar field with the source in the form of the stress-energy tensor trace as a dark-energy model / I. G. Dudko, Yu. P. Vyblyi // Gravitation and Cosmology. – 2016. – Vol. 22, № 4. – P. 368–373.

References

1. Riess A. G., Filippenko A. V., Challis P., Clocchiatti A, Diercks A., Garnavich P. M., Gilliland R. L., Hogan C. J., Jha S., Kirshner R. P. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Comstant. *Astronomy Journal*, 1998, vol. 116, no. 3, pp. 1009–1012. Doi: 10.1086/300499

2. Perlmutter S., Aldering G., Goldhaber G., Knop R. A., Nugent P., Castro P. G., Deustua S., Fabbro S., Goobar A., Groom D. E., Hook I. M. Measurement of Ω and Λ from 42 High-redshift Supernovae. *Astronomy Journal*, 1999, vol. 517, no. 2, pp. 565–586.

3. Matos, T., Guzman F. S., Nunez D. Spherical scalar field halo in galaxies. *Physical Review D,* 2000, vol. 62, pp. 061301. Doi: 10.1103/PhysRevD.62.061301

4. Perlmutter S., Schmidt B. P. *Supernovaand Gamma Ray Bursts*. Ed. K. Weiler, Springer, 2003.

5. Matos T., Guzman F. S. Dynavical Approach to the Cosmological Constant. *Classical and Quantum Gravity,* 2001, vol. 18, no. 23. pp. 5055–5064. Doi: 10.1088/0264-9381/18/23/303

6. Peebles P. J., Ratra B. The cosmological constant and dark energy. *Reviews of Modern Physics,* 2003, vol. 75, no. 2, pp. 559–606. Doi: 10.1103/revmodphys.75.559

7. Scherrer R. J., Sen A. A. Thawing quintessence with a nearly flat potential. *Physical Review D*, 2008, vol. 77, no. 8, p. 083515.

8. Deser S. Self-interaction and gauge invariance. *General Relativity and Gravitation*, 1970, vol. 1, no. 1, pp. 9–15. Doi: 10.1007/bf00759198

9. Weinberg S. *Gravitation and Cosmology*. New-York, London, Sydney, Toronto, J. Wiley and Sons Inc., 1972. 657 p.

10. Logunov A. A. *Relativistic Theory of Gravitation*. Moscow, Nauka Publ., 2011. 351 p. (in Russian).

11. Vyblyi Yu. P., Tarasenko A. N. Scalar field with the source being the trace of the stress-energy tensor as a model of the dark energy. *Kovariantnye metody v teoreticheskoi fizike: sb. nauch. tr.* [Covariant methods in theoretical physics: Collection of Scientific Works]. Minsk, 2011, no. 7, pp. 36–44 (in Russian).

12. Freund P., Nambu Y. Scalar field coupled to the trace of the energy-momentum tensor. *Physical Review,* 1968, vol. 174, no. 5, pp. 1741–1743. Doi: 10.1103/physrev.174.1741

13. Gorbunov D. S., Rubakov V. A. *Interaction to Theory of Early Universe*, Moscow, Krasand Publ., 2008. 568 p. (in Russian).

14. Dudko I. G., Vyblyi Yu. P. Scalar field with the source in the form of the stress-energy tensor trace as a dark-energy model. *Gravitation and Cosmology*, 2016, vol. 22, no. 4, pp. 368–373. Doi: 10.1134/s020228931604006x

Информация об авторах

Выблый Юрий Петрович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории теоретической физики Института физики им. Б. И. Степанова, Национальная академия наук Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vyblyi@gmail.com

Леонович Анатолий Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: kaffiz@bsuir.by

Information about the authors

Yuri P. Vyblyi – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher of the Theoretical Physics Laboratory, B. I. Stepanov Institute of Physics, National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vyblyi@gmail.com

Anatoli A. Leonovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of the Department of Physics, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kaffiz@bsuir.by