ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.977
Поступила в редакцию 22.11.2017
Received 22.11.2017

И. В. Гайшун[1], В. В. Горячкин[2], В. В. Крахотко[2]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

УПРАВЛЕНИЕ АНСАМБЛЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Аннотация. Данная статья посвящена исследованию задачи управляемости дискретной системы с неопределенностями. Введено понятие ансамбля дискретных двухпараметрических линейных систем – как совокупности систем, коэффициенты которых принадлежат некоторым заданным множествам. Рассмотрена задача: для любого начального состояния из наперед заданного множества найти одно и то же управление (универсальное управление) для всех систем ансамбля, переводящее все решения этих систем в минимальную окрестность нуля за конечное время. В случае интервальной неопределенности нахождение управления сведено к решению задачи нелинейного программирования, сформулированной по коэффициентам систем ансамбля и интервальному множеству начальных состояний. Предложен конструктивный алгоритм построения искомого управления, приведен пример.

Ключевые слова: двухпараметрическая дискретная линейная система, интервальные матрицы и векторы, управляемость, нелинейное программирование

Для цитирования. Гайшун, И. В. Управление ансамблем линейных двухпараметрических дискретных систем / И. В. Гайшун, В. В. Горячкин, В. В. Крахотко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 1. – С. 20–23.

I. V. Gaishun[1], V. V. Goryachkin[2], V. V. Krakhotko[2]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
[2]Belarusian State University, Minsk, Belarus

CONTROL OF THE ENSEMBLE OF LINEAR TWO-PARAMETER DISCRETE SYSTEMS

Abstract. The controllability of discrete systems with uncertainties is considered in this article. The concept of the ensemble of linear two-parameter discrete systems is introduced as a set of systems, whose coefficients belong to some given sets. The following problem is considered: for any initial state from the pre-assigned sets, one and the same control (universal control) is found for all ensemble systems reducing all solutions of these systems to a minimum zero neighborhood for finite time. In the case of interval uncertainty, finding the control is reduced to solving a nonlinear programming problem formulated in terms of the coefficients of the ensemble systems and the interval set of initial states. A constructive algorithm for building a desired control is proposed, an example is given.

Keywords: linear two-parameter discrete system, interval matrices and vectors, controllability, nonlinear programming

For citation. Gaishun I. V., Goryachkin V. V., Krakhotko V. V. Control of the ensemble of linear two-parameter discrete systems. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 20–23 (in Russian).

Ансамбль дискретных двухпараметрических линейных систем – это совокупность систем, коэффициенты которых принадлежат некоторым заданным множествам (как правило, некоторым интервалам).

Рассматривается следующая задача: для любого начального состояния из наперед заданного множества определить такое управление (одно и то же для всех систем ансамбля), что в некоторой точке (τ,σ) сечения $x(\tau,\sigma)$ решений $x(t,s)$ каждой из систем попадут в минимальную окрестность нуля за конечное время.

Предложен алгоритм построения указанного решения, в основу которого положена задача нелинейного программирования, сформированная по параметрам исследуемого ансамбля.

1. Постановка задачи. Вопросы управляемости линейных дискретных многопараметрических систем исследованы в монографии [1]. Однако часто точные значения коэффициентов и начальных состояний таких систем неизвестны, заданы лишь множества, в которых эти параметры могут изменятся. В связи с этим важное значение имеют задачи управления всеми системами, получаемыми при различных вариациях коэффициентов и начальных состояний.

Пусть [*A*], [*D*], [*B*] – некоторые множества в пространстве $n \times n$ и $n \times m$ действительных матриц. Тогда

$$x(t+1,s)=Ax(t,s)+Dx(t,s+1)+Bu(t,s) \tag{1}$$

– ансамбль двухпараметрических систем, когда матрицы *A, D* и *B* принимают (независимо друг от друга) произвольные значения из множеств [*A*], [*D*] и [*B*] соответственно. В системах (1) независимые переменные *t* и *s* изменяются соответственно в множестве $\boldsymbol{Z}_+$ – положительных целых чисел и в множестве $\boldsymbol{Z}$ – целых чисел. Управление $u(t,s)$ принимает значения в некотором множестве *U*.

Ясно, что при любом начальном условии (состоянии)

$$x(0,s)=\alpha(s) \tag{2}$$

из множества $[\alpha(s)]$ и при любых фиксированных матрицах *A, D, B* и управлении $u(t,s)$ существует [2] единственное решение

$$x(t,s)=\sum_{j=0}^{t} G(t,j)\alpha(s+j)+\sum_{i=0}^{t-1}\sum_{j=0}^{t-i-1} G(t-i-1,j)Bu(i,s+j),$$

где матрицы $G(i,j)$ находятся из рекуррентных соотношений

$$\begin{gathered}G(i+1,j)=AG(i,j)+DG(i,j-1),\\ G(0,0)=E,\ G(i,j)=0 \text{ при } j<0 \text{ или } i<j.\end{gathered} \tag{3}$$

В данной работе исследуются следующие задачи: определить такое управление $u(t,s)$, $t=0,1,\dots,n-1$, $s=\sigma,\sigma+1,\dots,\sigma+t-1$, что решение $x(t,s)$ с любым начальным условием (2) всякой системы (1) удовлетворяет равенству $x(n,\sigma)=0$.

Очевидно, что так поставленная задача имеет решение лишь в исключительных случаях. Поэтому модернизируем ее следующим образом: построить такое управление $u(t,s)$, $t=0,1,\dots,n-1$, $s=\sigma,\sigma+1,\dots,\sigma+t-1$, что каждое решение $x(t,s)$ подчиняется неравенству

$$\left|x(n,\sigma)\right|\le\varepsilon, \tag{4}$$

где $\left|x(n,\sigma)\right|$ – вектор, составленный из модулей компонент вектора $x(n,\sigma)$, $\varepsilon=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$, причем величина $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n$ является минимальной (неравенство (4) понимается покомпонентно). Таким образом, управление $u(t,s)$ должно приводить все траектории $x(n,\sigma)$ в минимальную окрестность нуля за время $t=n$. Управления, обладающие такими свойствами (следуя [3]), будем называть универсальными.

2. Сведение к задаче нелинейного программирования. Обозначим через [*L*] и [*M*] совокупность матриц:

$$\begin{aligned}&L=\big(G(n,0),G(n,1),\dots,G(n,n)\big),\\ &M=\big(G(n-1,0)B,\dots,G(n-1,n-1)B,G(n-2,0)B,\dots,G(0,0)B\big),\end{aligned}$$

когда *A, D, B* пробегают независимо друг от друга множества [*A*], [*D*], [*B*] соответственно. Пусть, кроме того,

$$[f]=\left\{f=-L\alpha, L\in[L], \alpha=\big(\alpha(\sigma),\alpha(\sigma+1),\dots,\alpha(\sigma+n)\big)\in[\alpha]=([\alpha(\sigma)],[\alpha(\sigma+1)],\dots,[\alpha(\sigma+n)])\right\}.$$

Тогда семейство $\left\{x(n,\sigma)\right\}$ сечений [2] $x(t,s)$ всех решений систем (1)–(2) в точке (n,σ) описывается соотношением

$$x(n,\sigma) = Mu - f,$$
$$u = \big(u(0,\sigma), u(0,\sigma+1), \dots, u(0,\sigma+n-1), u(1,\sigma), \dots, u(n-1,\sigma)\big),$$

где элементы $M \in [M]$, $f \in [f]$ вычислены на одной и той же реализации

$$\big(A, D, B, \alpha(s)\big) \in \big([A],[D],[B],[\alpha(s)]\big).$$

Значит, попадание семейства $x(n,\sigma)$ в ε-окрестность нуля эквивалентна неравенству

$$-\varepsilon \le Mu - f \le \varepsilon, \tag{5}$$

понимаемому покомпонентно.

Минимальная ε-окрестность может быть найдена как решение задачи

$$\begin{gathered} e'\varepsilon \to \min,\ \ e = (1,1,\dots,1), \\ -\varepsilon \le Mu - f \le \varepsilon,\ \ \varepsilon \ge 0, \\ u \in U. \end{gathered} \tag{6}$$

Далее считаем, что $[A]$, $[D]$, $[B]$ – интервальные матрицы, $[\alpha]$ – интервальный вектор-столбец.

Обозначим $A_0, \Delta A, \|[A]\|; D_0, \Delta D, \|[D]\|; B_0, \Delta B, \|[B]\|; \alpha_0, \Delta\alpha, \|[\alpha]\|$ центр, радиус и модуль соответствующего интервального объекта [4].

Пусть $G_0(i,j), G_{|0|}(i,j), G_{\|[\bullet]\|}(i,j)$ – матрицы, полученные из (3) при $A = A_0$, $D = D_0$; $A = |A_0|$, $D = |D_0|$; $A = \|[A]\|$, $D = \|[D]\|$. Множества $[M]$, $[L]$, $[f]$ также считаем интервальными объектами с центрами и радиусами M_0, L_0, f_0 и ΔM, ΔL, Δf. Воспользовавшись результатами работы [2], легко установить, что

$$\begin{gathered} M_0 = \big(G_0(n-1,0)B_0, \dots, G_0(n-1,n-1)B_0, G_0(n-2,0)B_0, \dots, G_0(0,0)B_0\big), \\ L_0 = \big(G_0(n,0), \dots, G_0(n,1), \dots, G_0(n,n)\big), \\ \Delta M = \big(C(n-1,0), \dots, C(n-1,n-1), C(n-2,0), \dots, C(0,0)\big), \\ \Delta L = \big(V(n,0), \dots, V(n,1), \dots, V_0(n,n)\big), \\ \Delta f = \Delta L \|[\alpha]\| + |L_0| \Delta\alpha, \end{gathered}$$

где $V[i,j] = G_{\|[\bullet]\|}(i,j) - G_{|0|}(i,j)$, $C(i,j) = V(i,j)\|[B]\| + |G_0(i,j)|\Delta B$.

Поэтому из результатов работ [3, 4] следует, что задача (6) эквивалентна следующей задаче нелинейного программирования:

$$\begin{gathered} e'\varepsilon \to \min, \\ M_0 u + \Delta M |u| \le f_0 - \Delta f + \varepsilon, \\ M_0 u - \Delta M |u| \ge f_0 + \Delta f - \varepsilon, \\ \varepsilon \ge 0,\ \ u \in U. \end{gathered} \tag{7}$$

З а м е ч а н и е. Если U – многогранник, то согласно [3] задача (7) эквивалентна задаче линейного программирования

$$\begin{gathered} e'\varepsilon \to \min, \\ M_0 u + \Delta M |w| - \varepsilon \le f_0 - \Delta f, \\ -M_0 u + \Delta M |w| - \varepsilon \le -f_0 - \Delta f, \\ -w \le u \le w,\ \ \varepsilon \ge 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Эта задача (8), очевидно, всегда разрешима, при этом, если ε^*, u^*, w^* – ее решение, то $\varepsilon = \varepsilon^*$ определяет минимальную окрестность, куда попадут все векторы $x(n,\sigma)$, а $u(t,s) = u^*(t,s)$ – универсальное управление [3].

Таким образом, если U – многогранник, то управление, решающее поставленную задачу, находится из решения задачи линейного программирования (8). Когда множество U произвольно, следует использовать задачу нелинейного программирования (7).

П р и м е р. Пусть

$$[A]=\begin{pmatrix}[-1,75;-0,25] & [0,88;2,13]\\ [0,00;\ 0,00] & [2,25;3,75]\end{pmatrix},\ [D]=\begin{pmatrix}[0,00;0,00] & [0,75;1,25]\\ [-1,50;-0,50] & [-3,75;-2,25]\end{pmatrix},$$

$$[B]=\begin{pmatrix}[-3,50;-2,50]\\ [2,75;3,25]\end{pmatrix},\ [\alpha(\sigma)]=\begin{pmatrix}[0,50;1,50]\\ [-1,25;-0,75]\end{pmatrix},\ [\alpha(\sigma+1)]=\begin{pmatrix}[0,38;0,63]\\ [1,75;2,25]\end{pmatrix},$$

$$[\alpha(\sigma+2)]=\begin{pmatrix}[0,50;1,90]\\ [-4,75;-3,25]\end{pmatrix}.$$

В этом случае матрицы M_0, ΔM и векторы f_0, Δf равны

$$M_0=\begin{pmatrix}7,50 & 3,00 & 3,00\\ 9,00 & -6,00 & 3,00\end{pmatrix},\ \Delta M=\begin{pmatrix}5,53 & 1,06 & 0,50\\ 3,19 & 5,44 & 0,25\end{pmatrix},$$

$$f_0=\begin{pmatrix}-3,05\\ 77,40\end{pmatrix},\ \Delta f=\begin{pmatrix}40,22\\ 84,23\end{pmatrix}.$$

Решая задачу (8), находим универсальное управление $u=\big(u(0,\sigma),u(0,\sigma+1),u(1,\sigma)\big)=$ $=(4,50606;0;12,2818)$, при этом $e'\varepsilon$ = 172,954 и $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=(71,2794;101,675)$ определяет окрестность нуля, куда попадут все векторы $x(2,\sigma)$.

Если u = 0, то $e'\varepsilon$ = 204,9 $\big(\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=(43,27;161,63)\big)$, т. е. с помощью ненулевого универсального управления по сумме невязок добились более приемлемого результата.

Список использованных источников

1. Гайшун, И. В. Многопараметрические системы управления / И. В. Гайшун. – Минск: Навука і тэхніка, 1996. – 200 с.

2. Гайшун, И. В. Оценка решений двухпараметрической дискретной системы с интервальными коэффициентами / И. В. Гайшун, В. В. Горячкин, В. В. Крахотко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2014. – № 3. – С. 5–8.

3. Ащепков, Л. Т. Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления / Л. Т. Ащепков, Д. А. Давыдов. – М.: Наука, 2006. – 151 с.

4. Алефельд, Г. Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М.: Мир, 1987. – 360 с.

References

1. Gaichun I. V. *Multivariable control system*. Minsk, Navuka i technika Publ, 1996. 200 p. (in Russian).

2. Gaichun I. V., Goryachkin V. V., Krakhotko V. V. Estimate solutions to two-parameter discrete systems with interval coefficients. *Vestsi Natsional'nai akademii nauk Belarusi. Ser. fiziko-matematicheskikh nauk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series,* 2014, no. 3, pp. 5–8 (in Russian).

3. Aschepkov L. T. Davydov D. A. *Universal solutions of interval problems of optimization and control.* Moscow, Nauka Publ, 2006. 151 p. (in Russian).

4. Alefeld G., Herzberger J. *Introduction to interval computations.* Academic Press, 1983. 360 p.

Информация об авторах

Гайшун Иван Васильевич – доктор физико-математических наук**,** директор, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: gaishun @im.bas-net.by

Горячкин Владимир Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент факультета прикладной математики и информатики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: gorvv@bsu.by

Крахотко Валерий Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент факультета прикладной математики и информатики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: krakhotko@bsu.by

Information about the authors

Ivan V. Gaishun – D. Sc. (Physics and Mathematics)**,** Director, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gaishun@im.bas-net.by

Vladimir V. Goryachkin – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of the Applied Mathematics and Informatics Faculty of the Belarusian State University (4, Nezaliezhnasti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gorvv@bsu.by

Valery V. Krakhotko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of the Applied Mathematics and Informatics Faculty of the Belarusian State University (4, Nezaliezhnasti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: krakhotko@bsu.by