ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 511.42

Поступила в редакцию 06.05.2016
Received 06.05.2016

О. Н. Кемеш

Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь

ОБОБЩЕНИЕ ЛЕММЫ ГЕЛЬФОНДА НА ЦИЛИНДРЫ В ПОЛЕ *p*-АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Аннотация. А. О. Гельфонд [1] нашел связь между величиной модулей целочисленных полиномов $P_1(x)$, $P_2(x)$ в трансцендентной точке γ и различными характеристиками $P_1(x)$, $P_2(x)$. Оба полинома имеют степень n и высоты $H_1 = H(P_1)$, $H_2 = H(P_2)$, равные максимуму модулей их коэффициентов. Он доказал, что если $H_1 \le Q$, $H_2 \le Q$, $Q > 1$, и $P_1(x)$ и $P_2(x)$ не имеют общих корней, то можно найти величину $c_1 = c(n)$, при которой справедливо неравенство

$$\max\left(\left|P_1(\gamma)\right|, \left|P_2(\gamma)\right|\right) > c_1 Q^{-2n+1}.$$

Это неравенство было обобщено В. И. Берником [2] на значения $\left|P_1(x)\right|$ и $\left|P_2(x)\right|$ для всех точек x из некоторого интервала I длины $\left|I\right| = Q^{-\eta}$, $\eta > 0$. Используя новое неравенство, он доказал гипотезу Бейкера – Шмидта [3] о размерности Хаусдорфа множества действительных чисел с заданной мерой трансцендентности. В недавних работах В. В. Бересневича, В. И. Берника и Ф. Гетце получены оценки сверху и снизу для количества целочисленных полиномов фиксированной степени и ограниченной высоты с заданными дискриминантами. При этом было использовано обобщение неравенства на случай полиномов с произвольным количеством близких корней.

Дискриминант $D(P)$ целочисленных полиномов – целое число. Задачи о величине $\left|D(P)\right|$ и делимости $D(P)$ на степень простого числа одинаково важны в теории диофантовых приближений. В новой задаче о делимости $D(P)$ на p^s, $s \ge 1$, важное значение имеет величина p-адической нормы $\left|D(P)\right|_p$ и обобщение неравенства вида $\max\left(\left|P_1(\gamma)\right|, \left|P_2(\gamma)\right|\right) > c_1 Q^{-2n+1}$ на поле p-адических чисел.

В настоящей работе доказана теорема, позволяющая находить оценки сверху для количества целочисленных полиномов, дискриминанты которых делятся на бóльшую степень простого числа p. В ней указывается оценка для величины p-адической нормы целочисленных многочленов на цилиндрах в Q_p.

Ключевые слова: мера Хаара, лемма Гельфонда, размерность Хаусдорфа, поле p-адических чисел, p-адический цилиндр, диофантовы приближения

Для цитирования. Кемеш, О. Н. Обобщение леммы Гельфонда на цилиндры в поле p-адических чисел / О. Н. Кемеш // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 1. – С. 24–29.

O. N. Kemesh

Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk, Belarus

GENERALIZATION OF GELFOND'S LEMMA TO *p*-ADIC CYLINDERS

Abstract. A. O. Gelfond [1] found the relationship between the values of integral polynomials modules $P_1(x)$, $P_2(x)$ at the transcendent point γ and different characteristics $P_1(x)$, $P_2(x)$. The both polynomials have the degree n and heights $H_1 = H(P_1)$, $H_2 = H(P_2)$ that are equal to the maximum of modules of their coefficients. He proved that if $H_1 \le Q$, $H_2 \le Q$, $Q > 1$, and $P_1(x)$ and $P_2(x)$ have no common roots, it's possible to find the value $c_1 = c(n)$, wherein the following inequality is true

$$\max\left(\left|P_1(\gamma)\right|, \left|P_2(\gamma)\right|\right) > c_1 Q^{-2n+1}.$$

The inequality was generalized by V. I. Bernik [2] to the values of $\left|P_1(x)\right|$ and $\left|P_2(x)\right|$ for all points x of some interval I of length $\left|I\right| = Q^{-\eta}$, $\eta > 0$. Using a new inequality, he proved Baker – Schmidt's hypothesis [3] about Hausdorff's dimension of the set of real numbers with a given measure of transcendence. In the recent articles by V. V. Beresnevich, V. I. Bernik and F. Götze, the upper and lower evaluations for the quantity of the integral-valued polynomials of fixed degree and limited height with the given discriminants were obtained. By doing so, the generalization of inequality (1) to the case of polynomials with an arbitrary quantity of similar roots was used.

The discriminant $D(P)$ of integral polynomials is the integer. The problems on the magnitude $|D(P)|$ and the divisibility of $D(P)$ by the prime number level are equally important in the theory of Diophantine approximations. In a new problem on the divisibility of $D(P)$ by p^s, $s \geq 1$, the value of the p-adic norm $|D(P)|_p$ and the generalization of the inequality of type $\max(|P_1(\gamma)|, |P_2(\gamma)|) > c_1 Q^{-2n+1}$ to the the field of p-adic numbers are important.

In this article, we have proved the theorem that allows one to find upper and lower evaluations for the quantity of integral polynomials, whose discriminants can be divided by a higher degree of the prime number p. It shows the evaluation of the p-adic norm of integer polynomials on cylinders in Q_p.

Keywords: Haar's measure, Gelfond's lemma, Hausdorff's dimension, p-adic numbers, p-adic cylinder, Diophantine approximation

For citation. Kemesh O. N. Generalization of Gelfond's lemma for p-adic cylinders. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 24–29 (in Russian).

Введем класс целочисленных полиномов

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0,$$

у которых степень $\deg P = n$, а высота $H(P) = \max|a_j|, 0 \leq j \leq n$, не превосходит некоторого достаточно большого натурального числа Q. Этот класс обозначим через

$$\mathrm{P}_n(Q) = \{P(x) \in Z[x],\ \deg P = n,\ H(P) \leq Q\}.$$

Будем обозначать $c_1 = c_1(n), c_2, \ldots$ величины, зависящие от n и не зависящие от H и Q. Через $\#B$ обозначим количество элементов конечного множества B. Если два числа K и M отличаются в $c(n)$ раз, то будем записывать $K \asymp M$. Нетрудно получить оценки

$$c_1 Q^{n+1} < \#\mathrm{P}_n(Q) < c_2 Q^{n+1}$$

и доказать, что подкласс $\mathrm{P}_n(Q)$, состоящий из неприводимых над полем рациональных чисел полиномов – $T_n(Q)$, имеет мощность $c_3 Q^{n+1}$. В [1] А. О. Гельфонд доказал, что два полинома $P_1(x), P_2(x) \in T_n(Q)$ не могут в трансцендентной точке ξ удовлетворять неравенству

$$\max(|P_1(\xi)|, |P_2(\xi)|) < c_4 Q^{-2n+1}$$

при достаточно малой величине c_4. Его лемма была обобщена в [2] на значения полинома в точках из некоторого интервала I длины $|I| = Q^{-\eta}$, $\eta > 0$. Это обобщение стало важным моментом при нахождении размерности Хаусдорфа множества действительных чисел с заданной мерой трансцендентности [2]. Приведем формулировку этого результата.

Л е м м а 1. *Пусть на интервале I, $|I| = Q^{-\eta}, \eta > 0$, заданы два полинома $P_1(x)$, $P_2(x) \in T_n(Q)$ такие, что*

$$\max_{x \in I}(|P_1(x)|, |P_2(x)|) < Q^{-\tau}, \tau > 0.$$

Тогда, если $\delta > 0$, верно неравенство

$$\tau + 1 + 2\max(\tau + 1 - \eta, 0) < 2n + \delta \quad (1)$$

при $Q > Q_0(\delta)$.

Ясно, что неравенство (1) при уменьшении η может быть усилено, что важно, например, при оценке количества полиномов $P(x) \in \mathrm{P}_n(Q)$ с заданными дискриминантами [4] или дискриминантами, делящимся на бóльшую степень фиксированного простого числа [5]. Для получения оценок сверху и снизу, имеющих одинаковый порядок, предыдущих оценок было недостаточно.

Основной результат работы – получение обобщения неравенства (1) на поле p-адических чисел, что может быть использовано для доказательства более точных, чем в [5], оценок.

Доказанная нами теорема отличается от теорем из работ [6, 7] тем, что в левую часть неравенства добавлены слагаемые вида $2\max(\tau+k\eta,0)$, $k=1,2,\ldots$, что потребовало рассмотрения не первых производных многочленов, а производных всех порядков.

Обозначим через μA меру Хаара p-адического цилиндра $A\subset Q_p, |w|_p$ – p-адическую норму $w\in Q_p$.

Множество $A\subset Q_p$ называется p-адическим цилиндром, если оно содержит все точки Q_p вида

$$w=a_l p^{-l}+a_{l-1}p^{-l+1}+\ldots+a_1p^{-1}+a_0+a_1p+\ldots+a_kp^{-k}+b_{k+1}p^{k+1}+\ldots,$$

где $a_j, -l\le j\le k$, – фиксированные целые числа, $0\le a_j\le p-1$, а $b_j, j\ge k+1$, – произвольные целые числа, $0\le b_j\le p-1$.

Пусть Q – достаточно большое натуральное число.

Т е о р е м а. *Пусть* $A\subset Q_p$ *– цилиндр и* $\mu A=Q^{-\eta}$, $\eta>0$, *для всех p-адических чисел* $w\in A$ *и два полинома* $P(w)$, $T(w)$ *без общих корней удовлетворяют неравенствам*

$$\max_{w\in A}\left(|P(w)|_p, |T(w)|_p\right)<Q^{-\tau}, \tau>0, \max\left(H(P),H(T)\right)\le Q.$$

Тогда при любом $\delta>0$ *и* $Q>Q_0(\delta)$

$$\tau+2\sum_{k=1}^{n-1}\max(\tau-k\eta,0)<2n+\delta. \tag{2}$$

Для доказательства теоремы понадобится

Л е м м а 2. *Пусть* γ_1 *– ближайший корень полинома* $P(x)$ *к фиксированному числу* $w\in Q_p$. *Тогда справедливы неравенства*

$$|w-\gamma_1|_p\le|P(w)|_p\left|P^{/}(w)\right|_p^{-1}, \tag{3}$$

$$|w-\gamma_1|_p\le|P(w)|_p\left|P^{/}(\gamma_1)\right|_p^{-1}, \tag{4}$$

$$|w-\gamma_1|_p\le\min_{2\le j\le n}\left(|P(w)|_p\left|P^{/}(\gamma_1)\right|_p^{-1}|\gamma_1-\gamma_2|_p\cdots|\gamma_1-\gamma_j|_p\right)^{\frac{1}{j}}. \tag{5}$$

Лемма 2 доказана в работах [8–10]. Корни $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n$ полинома $P(w)$ упорядочим относительно w следующим образом:

$$|w-\gamma_1|_p\le|w-\gamma_2|_p\le\ldots\le|w-\gamma_n|_p. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Из системы неравенств

$$|P(w)|_p<Q^{-\tau},\ |T(w)|_p<Q^{-\tau},\ w\in A,$$

и леммы 2 заключаем, что среди корней $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n$ полинома $P(w)$ и корней $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ полинома $T(w)$ найдется пара корней $(\gamma_k,\beta_l), 1\le k\le n, 1\le l\le n$, таких, что корень γ_k будет ближайшим ко всем $w_1\in L_1\subset A$, $\mu L_1\ge n^{-1}Q^{-\eta}$, а корень β_l – ко всем $w_2\in L_2\subset A$, $\mu L_2>n^{-1}Q^{-\eta}$. Так как $w_1,w_2\in A$, то $|w_1-w_2|_p\le Q^{-\eta}$. Не умаляя общности, полагаем $k=1$, $s=1$, и относительно корней γ_1, β_1 произведем упорядочивание остальных корней γ_i, β_j:

$$|\gamma_1-\gamma_2|_p\le|\gamma_1-\gamma_3|_p\le\ldots\le|\gamma_1-\gamma_n|_p,$$

$$|\beta_1-\beta_2|_p\le|\beta_1-\beta_3|_p\le\ldots\le|\beta_1-\beta_n|_p.$$

Введем обозначения:

$$\left|\gamma_i-\gamma_j\right|_p=Q^{-\rho_j},\ p_j=\sum_{i=j}^{n-1}\rho_{i+1},\ 2\le j\le n. \tag{7}$$

Такие же обозначения введем и для корней β_j полинома $T(w)$. Будем предполагать, что полиномы $P(w)$ и $T(w)$ выбраны из некоторого подмножества $M_n(Q)\subset \mathrm{P}_n(Q)$ такого, что величины ρ_j и p_i в (7) для различных полиномов $P(w)$ и $T(w)$ отличаются друг от друга не более чем на некоторую очень малую, но фиксированную величину $\varepsilon_1>0$. В итоге левая часть неравенства может измениться на $c_5\varepsilon_1<\frac{\delta}{2}$ при подходящем выборе ε_1. Это стандартное рассуждение в метрической теории диофантовых приближений.

Из последнего неравенства (5) в лемме 2 условие $\left|P(w)\right|_p<Q^{-\tau}$ с учетом новых обозначений (7) можно записать так:

$$\left|w_1-\gamma_1\right|_p\le\min_{1\le j\le n-1}Q^{-\frac{\tau-\rho_j}{j}}. \tag{8}$$

Аналогичное неравенство получим для

$$\left|w_2-\beta_1\right|_p\le\min_{1\le i\le n-1}Q^{-\frac{\tau-p_i}{i}}. \tag{9}$$

Пусть минимальное значение в правой части неравенства (8) достигается при $j=j_0$, а в (9) при $i=i_0$. Так как w_1 и w_2 можно выбрать так, что

$$\left|w_1-\gamma_1\right|_p\ge\frac{1}{4n}Q^{-\eta},\ \left|w_2-\beta_1\right|_p\ge\frac{1}{4n}Q^{-\eta},$$

что легко доказать от противного.

Пусть, например, $\left|w_1-\gamma_1\right|_p<\frac{1}{4n}Q^{-\eta}$. Точки w_1, w_2 выберем из цилиндра I_1, $\mu I_1>\frac{1}{n}Q^{-\eta}$ так, что $\left|w_2-w_1\right|\ge\frac{1}{2n}Q^{-\eta}$. Тогда, если $\left|w_1-\gamma_1\right|_p<\frac{1}{4n}Q^{-\eta}$, $\left|w_2-\gamma_1\right|_p<\frac{1}{4n}Q^{-\eta}$, то

$$\frac{1}{2n}Q^{-\eta}\le\left|w_1-w_2\right|_p=\left|w_1-\gamma_1+\gamma_1-w_2\right|_p<\max_{i=1,2}\left|w_1-\gamma_1\right|_p\le\frac{1}{4n}Q^{-\eta},$$

что противоречиво. Поэтому справедливы неравенства

$$Q^{-\eta}<c_5Q^{-\frac{\tau-p_j}{j}}.$$

Откуда, используя неравенство $p_j\ge0$, имеем

$$p_j>\max\left(\tau-j\eta,0\right),\ 1\le j\le n-1. \tag{10}$$

Так как минимум в правых частях неравенств (8), (9) достигается при $j_0=j$, то для всех точек цилиндра A

$$\begin{aligned}\left|w_1-\gamma_1\right|_p&\le\max\left(Q^{-\frac{\tau-\rho_{j_0}}{j_0}},Q^{-\eta}\right),\\ \left|w_2-\beta_1\right|_p&\le\max\left(Q^{-\frac{\tau-p_{j_0}}{j_0}},Q^{-\eta}\right).\end{aligned} \tag{11}$$

В дальнейшем важным является соотношение величин $Q^{-\rho_j}, 2\le j\le n$ и правых частей в неравенствах (11). Ясно, что существует $2\le s\le n-1$, для которого верно неравенство

$$Q^{-\rho_s} \le Q^{-\frac{\tau - p_{j_0}}{j_0}} \le Q^{-\rho_{s+1}},\ 2 \le s \le n-1. \tag{12}$$

Рассмотрим результант полиномов $P(w)$ и $T(w)$, не имеющих общих корней. В [6] доказано, что $|R(P,T)| \le c_6 Q^{2n}$, поэтому по формуле произведения $|a||a_p| \ge 1$ для $a \in \mathrm{Z}$ имеем

$$Q^{-2n} \le \left|R(P,T)\right|_p. \tag{13}$$

Оценим $|R(P,T)|_p$ сверху. Из определения результанта

$$|R(P,T)|_p = \left| a_n^n(P) a_n^n(T) \prod_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} |\gamma_i - \beta_j| \right|_p \le \prod_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} |\gamma_i - \beta_j|_p.$$

Оценки $|\gamma_i - \beta_j|_p$ зависят от связи i и j величиной s в формуле (12). Имеем

$$|\gamma_1 - \beta_1|_p = |\gamma_1 - w + w - \beta_1|_p \le \max\left(|w-\gamma_1|_p, |w - \beta_1|_p\right) \le Q^{-\frac{\tau - \rho_{j_0}}{j_0}}.$$

Если $\max(i,j) \le s$, то

$$|\gamma_i - \beta_j|_p = |\gamma_i - \gamma_1 + \gamma_1 - \beta_1 + \beta_1 - \beta_j|_p \le Q^{-\frac{\tau - \rho_{j_0}}{j_0}}. \tag{14}$$

Из (14) получаем

$$\prod_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} |\gamma_i - \beta_j|_p \le Q^{-s^2 \frac{\tau - p_{j_0}}{j_0}}. \tag{15}$$

Если $i < j$ и $j \ge s + 1$, то

$$|\gamma_i - \beta_j|_p \le |\gamma_i - \gamma_1 + \gamma_1 - \beta_1 + \beta_1 - \beta_j|_p \le Q^{-\rho_j}. \tag{16}$$

Неравенство (16) получим при $i > j$, $i > s + 1$. Если $i = j$, $i \ge s + 1$, то

$$|\gamma_i - \beta_i|_p \le |\gamma_i - \gamma_1 + \gamma_1 - \beta_1 + \beta_1 - \beta_i|_p \le Q^{-p_j}. \tag{17}$$

Из (15)–(17) следует

$$\prod_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} |\gamma_i - \beta_j|_p \le Q^{-s^2 \frac{\tau - p_{j_0}}{j_0} - (2s+1)p_s - 2(p_{s+1} + \ldots + p_{n-1})} = Q^{-b}. \tag{18}$$

Оценим значение показателя степени b в (18) при $j_0 = s$. Используя (12), (16), (17) и (18), имеем

$$b \ge s(\tau - p_s) + (2s+1)p_s + \sum_{k=s+1}^{n-1} p_k. \tag{19}$$

Покажем, что правая часть в неравенстве (19) больше $2n$. Для этого достаточно убедиться, что

$$s(\tau - p_s) + (2s+1)p_s > \tau + 2\sum_{k=1}^{s} \max(\tau - k\eta, 0). \tag{20}$$

При $\tau - k\eta \ge 0$ суммы в левой и правой частях (20) можно записать в виде

$$s\tau + (s+1)p_s > 2(s+1)(\tau - s(s+1)\eta),$$

или

$$\left(s+1\right)p_s \geq \left(s+1\right)\tau - s\left(s+1\right)\eta,$$

$$p_s \geq \tau - s\eta. \tag{21}$$

Так как последнее неравенство в (21) справедливо по (10), верно и неравенство (20). Теорема доказана.

Благодарности. Автор выражает благодарность профессору В. И.试Бернику за постановку задачи и участие в обсуждении результатов статьи.

Acknowledgements. I would like to express my gratitude to Professor V. I. Bernik for problem statement and participation in the discussion of the results of the article.

Список использованных источников

1. Гельфонд, А. О. Трансцендентные и алгебраические числа / А. О. Гельфонд. – 2-е изд. – М.: URSS, 2006. – 224 с.

2. Bernik, V. Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations / V. Bernik // Acta Arithmetica. – 1983. – Vol. 42, № 3. – P. 219–253.

3. Baker, A. Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker, W. M. Schmidt // Proc. London Math. Soc. – 1970 – Vol. s3-21, № 1. – P. 1–11.

4. Bernik, V. A new connection between metnic theory of Diophantine approximations and distribution of algebraic numbers / V. Bernik, F. Götze // Contemp. Math. – 2015. – P. 33–45.

5. Bernik, V. On the divisibility of the discriminant of an integral polynomia by prime powers/ V. Bernik, F. Götze, O. Kukso // Lith. Math. J. – 2008. – Vol. 48, № 4. – P. 380–396.

6. Берник, В. И. Приближение нуля целочисленными полиномами в пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}_p$ / В. И. Берник, Н. Калоша // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2004. – № 1. – P. 121–123.

7. Bernik, V. Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p-adic fields / V. Bernik, N. Budarina, H. Dickinson // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. – 2010. – Vol. 149, № 2. – P. 193–216.

8. Спринджук, В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – М.: Наука и техника, 1967. – 184 с.

9. Берник, В. И. О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов / В. И. Берник // Acta Arithmetica. – 1989. – Vol. 53, № 1. – P. 17–28.

10. Bernik, V. Metric Diophantine Approximation on Manifolds / V. Bernik, M. Dodson. – Cambridge University Press, 1999. – 172 p.

References

1. Gelfond A. O. *Transcendental and algebraic numbers*. 2nd ed. Moscow, URSS, 2006. 224 p. (in Russian).

2. Bernik V. Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations. *Acta Arithmetica*, 1983, vol. 42, no. 3, pp. 219–253.

3. Baker A., Schmidt W. M. Diophantine approximation and Hausdorff dimension. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1970, vol. s3-21, no. 1, pp. 1–11. Doi: 10.1112/plms/s3-21.1.1

4. Bernik V., Götze F. A new connection between metnic theory of Diophantine approximations and distribution of algebraic numbers. *Contemporary Mathematics*, 2015, pp. 33–45. Doi: 10.1090/conm/631/12594

5. Bernik V., Götze F., Kukso O. On the divisibility of the discriminant of an integral polynomia by prime powers. *Lithuanian Mathematical Journal*, 2008, vol. 48, no. 4, pp. 380–396. Doi: 10.1007/s10986-008-9025-5

6. Bernik, V. I., Kalosha N. Zero approximation by integer polynomials in the space $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}_p$ *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2004, no. 1, pp. 121–123 (in Russian).

7. Bernik V., Budarina N., Dickinson H. Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p-adic fields. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 2010, vol. 149, no. 2, pp. 193–216. Doi: 10.1017/s0305004110000162

8. Sprindzhuk V. G. *Mahler's problem in metric number theory*. Moscow, Nauka i tekhnika Publ., 1967. 184 p. (in Russian).

9. Bernik V. I. About the exact order of approximation of zero by values of integral polynomials. *Acta Arithmetica*, 1989, vol. 53 no. 1, pp. 17–28 (in Russian). Doi: 10.4064/aa-53-1-17-28

10. Bernik V., Dodson M. Metric *Diophantine approximation on manifolds*. Cambridge University Press, 1999. 172 p. Doi: 0.1017/cbo9780511565991

Информация об авторе

Кемеш Оксана Николаевна – старший преподаватель кафедры высшей математики факультета предпринимательства и управления, Белорусский государственный аграрный технический университет (пр. Независимости, 99, 220023, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: oksana.kemesh@ tut.by

Information about the author

Okcana N. Kemesh – Senior Lecturer of the Department of Higher Mathematics of the Faculty of Entrepreneurship and Management, Belarusian State Agrarian Technical University (99, Nezavisimosti Ave., 220023, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: oksana.kemesh@ tut.by