ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 511.42

Поступила в редакцию 03.03.2016
Received 03.03.2016

М. А. Жур

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

НЕУЛУЧШАЕМОСТЬ ТЕОРЕМЫ ДИРИХЛЕ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ

Аннотация. Основное содержание статьи имеет отношение к классам S-чисел в классификации Малера [1]. Существует ряд результатов по нахождению оценки снизу в теории диофантовых уравнений. К некоторым из них можно отнести оценку снизу при приближении рациональных чисел рациональными; оценку снизу при приближении алгебраических чисел, полученную Лиувиллем; более позднее улучшение результата – теорему Туэ – Зигеля – Рота [2]. Однако все они неэффективны в том смысле, что их доказательство не дает способа подсчета этой оценки. В таком случае данные результаты и их доказательства не подходят для оценки величины решений соответствующих диофантовых уравнений, но их можно использовать для оценки числа решений этих уравнений. В статье с применением методов метрической теории диофантовых приближений рассмотрены индивидуальные и глобальные оценки снизу для многочленов [3]. Получена новая глобальная оценка по неулучшаемости теоремы Дирихле с помощью метрического подхода при нахождении оценки снизу на заданном отрезке для многочленов степени не более n и дополнительным условием на модуль производной этого многочлена.

Ключевые слова: теорема Дирихле, диофантовы приближения, проблема Малера, мера Лебега, высота многочлена, принцип Дирихле, многочлен, линейная форма

Для цитирования. Жур, М. А. Неулучшаемость теоремы Дирихле для многочленов / М. А. Жур // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 1. – С. 30–37.

M. A. Zhur

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

UNIMPOVABILITY OF DIRICHLET'S THEOREM FOR POLYNOMIALS

Abstract. The article relates to the classes of S-numbers in Mahler's classification [1]. There are a number of the well-known results on finding lower bounds in the theory of Diophantine equations. Some of them include a lower bound for approximation of rational numbers; a lower bound for approximation of algebraic numbers obtained by Liouville; a later improvement of the result of Liouville known as the Thue – Siegel – Roth theorem [2]. However, the bounds described above are considered ineffective in the sense that their proof does not give a way how to calculate them. In this case, these results and their proofs cannot be used to estimate the magnitude of the solutions of the corresponding Diophantine equations, but can be used to estimate the number of solutions of these equations. In the article, using the methods of metric theory of Diophantine approximations, we have considered individual and global lower bounds for polynomials [3]. A new global bound has been obtained for the unimprovability of Dirichlet's theorem using the metric approach for finding a lower bound in a given interval for polynomials of a degree of no more than n and an additional condition for the modulus of the derivative of this polynomial.

Keywords: Dirichlet's theorem, Diophantine approximation, Mahler's problem, Lebesgue's measure, polynomial height, Dirichlet's principle, polynomial, linear form

For citation. Zhur M. A. Unimpovability of Dirichlet's theorem for polynomials. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 30–37 (in Russian).

Первым результатом теории диофантовых приближений стала теорема Дирихле.

Теорема 1 (Дирихле, 1842) [4, с. 24]. *Если* $\beta \in \mathbb{R}$, *то* $\forall Q \in \mathbb{N}$ *существуют числа* $p, q \in \mathbb{Z}$ *и* $1 \le q < Q$ *такие, что*

$$|\beta q - p| < \frac{1}{Q}.$$

Теперь рассмотрим набор из n произвольных вещественных чисел:

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Рассмотрим линейную форму от действительных чисел с коэффициентами из $\mathbb{Z}$, в совокупности отличными от нуля и ограниченными некоторым числом. Насколько малым может быть модуль этой формы при соответствующем выборе ее коэффициентов? Принцип Дирихле [5] позволяет доказать более общую теорему для линейных форм, которую мы приведем далее с доказательством.

Т е о р е м а 2 (Дирихле) [4, с. 29]. *Если* $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ *– любые числа из* $\mathbb{R}, n \geq 1,$ *то существуют числа* $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ *и натуральное* $Q > 1$ *такие, что*

$$|a_n\beta_n + \dots + a_1\beta_1 + a_0| < Q^{-n}, |a_i| \leq Q, i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Т е о р е м а 3 [6, с. 396]. *Пусть на прямой или на плоскости дана система* $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *измеримых множеств* A_i *с условием*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i < \infty,$$

где μA_i *– мера Лебега множества* A_i*. Тогда мера множества точек, попадающих в бесконечное число множеств* A_i*, равна нулю.*

Из теоремы 2 и теоремы А. В. Грошева (1938 г.) видно, что для почти всех точек $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ должно выполняться неравенство, обратное представленному в формулировке теоремы Дирихле, а именно:

$$|a_n\beta_n + a_{n-1}\beta_{n-1} + \dots + a_1\beta + a_0| \geq C_1 Q^{-n}, C_1 > 0. \tag{2}$$

Таким образом, неравенство (2) – это оценка снизу линейной формы от действительных чисел. Представим действительные числа (1) в виде

$$(\beta, \beta^2, \dots, \beta^n), \beta \in \mathbb{R},$$

тогда линейную форму от этих чисел можно записать в виде значения некоторого многочлена степени, не превышающей n:

$$P(\beta) = a_n\beta^n + \dots + a_1\beta + a_0.$$

По определению линейной формы на многочлен $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ накладываются аналогичные дополнительные условия:

$$\exists a_i \neq 0, i \in \{1, n\},$$

$$P(x) \in \mathcal{P}_n(Q), \mathcal{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \leq n, H(P) \leq Q\}. \tag{3}$$

В условии (3) $Q > 1$ – некоторое известное целое число. Таким образом, оценку (2) можно записать в виде

$$|P(\beta)| \geq C_1 Q^{-n}, C_1 > 0. \tag{4}$$

Рассмотрим набор лемм. Пусть $P(x) \in \mathbb{Z}[x], P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ – не имеющий кратных корней многочлен вида

$$P(x) = a_n x^n + a_{n1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \exists a_i \neq 0, i \in \{0, n\}. \tag{5}$$

О п р е д е л е н и е. Каждому корню α_j полинома (5) поставим в соответствие множество $S(\alpha_j)$ комплексных чисел ω, удовлетворяющих условию

$$|\omega - \alpha_j| = \min_{(i)} |\omega - \alpha_i|, (i = 1, 2, \dots, n),$$

т. е. множество всех комплексных чисел, удаленных от α_j не более, чем от других корней $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$. Очевидно, что $S(\alpha_1)$ – выпуклое множество.

Л е м м а 1. *Если многочлен* $P(x)$ *удовлетворяет условию* $|a_n| > CQ,\ Q = H(P),$ *то*

$$\max_i |\alpha_i| \le \frac{n}{C}, (i = 1, 2, \dots, n)\ (0 < C \le 1).$$

Л е м м а 2. *Пусть* $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, ω – *вещественное или комплексное число такое, что* $\omega \in S(\alpha_1)$. *Тогда*

$$|\omega - \alpha_1| < 2^{n-1} \min\left(\frac{|P(\omega)|}{|P'(\alpha_1)|}, \left(\frac{|P(\omega)|}{|P'(\alpha_1)|} |\alpha_1 - \alpha_2| \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Лемма 1 и 2 доказаны в [7]. Далее докажем теорему.

Т е о р е м а 4. *Пусть* $P_n(x) \in \mathbb{Z}[x],\ I = [a, b],$ *и при этом* $H(P) \le Q$. *Тогда* $\exists\, x \in I$ *такой, что*

$$|P_n(x)| < C_1 Q^{-n}.$$

Данная теорема является частным случаем более общего результата.

Т е о р е м а 5 [8, с. 139]. *Пусть даны N и M – натуральные числа такие, что N > M, и также даны*

$$\gamma_\mu = \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_{\mu\nu} x_\nu, \mu = 1, \dots, M,$$

– *линейные однородные формы от* $x_1, \dots, x_N$ *с действительными коэффициентами* $|\alpha_{\mu\nu}| \le A$. *Тогда существует ненулевая система целых рациональных чисел* $x_1, \dots, x_N$, *модуль значения каждого из которых не превышает какого-то заданного наперед натурального числа X, такая что система неравенств*

$$|\gamma_\mu| < NAX^{1-\frac{N}{M}},$$

разрешима относительно $x_1, \dots, x_N$.

Видно, что если в условия теоремы 5 взять $N = n + 1,\ M = 1,\ A = C_1,\ X = Q,$ то мы получим утверждение теоремы 4. Пусть $\gamma_0 = \sqrt[n+1]{2}$ и $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ с коэффициентами a_i, удовлетворяющими условию

$$|a_i| \le Q,\ Q \in \mathbb{Z}_+.$$

Рассмотрим случай при $n = 2$. Пусть имеет место неравенство

$$|P_2(\gamma_0)| \le C_1 Q^{-2}.$$

Необходимо получить оценку для константы C_1. Для этого рассмотрим неравенство

$$|\prod_{j=0}^{2} P_2(\gamma_j)| \ge 1, \gamma_j = e^{\frac{2\pi i}{3}}. \tag{6}$$

Так как $\forall j\ P_2(\gamma_j) \ne 0,$ то неравенство (6) можно переписать в виде

$$|P_2(\gamma_0)| \ge \frac{1}{|\prod_{j=1}^{2} P_2(\gamma_j)|}.$$

Очевидно, что задача по оценке константы C_1 сводится к оценке произведения $|\prod_{j=1}^{2} P_2(\gamma_j)|$.

Многочлен $P_2(x)$ имеет вид

$$P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

тогда каждое из значений $P_2(\gamma_j)$ можно оценить сверху следующим способом:

$$|P_2(\gamma_j)| \le Q\,|\gamma_j^2 + \gamma_j + 1| \le \left(2^{\frac{1}{3}} - 1\right)^{-1} Q.$$

Учитывая эту оценку, можно переписать (6) в виде

$$|P_2(\gamma_0)| \ge \left(2^{\frac{1}{3}} - 1\right)^{2} Q^{-2}.$$

В общем виде при $n = 1$ константа $C_1 = \left(2^{\frac{1}{n+1}} - 1\right)^{n} Q^{-n}$ быстро стремится к нулю при росте значения n. Рассмотрим иной подход при нахождении оценки C_1.

Рассмотрим множество $I = [0,1)$. Обозначим, через $\mathcal{L}_2(I)$ все точки $x \in I$, такие что

$$|P_n(x)| < C_2Q^{-n},\ H(P) \le Q.$$

С такой постановкой можно свести задачу по нахождению лучшей оценки снизу к нахождению оценки меры множества $\mathcal{L}_2(I)$, которую можно выразить как

$$\mu\mathcal{L}_2(I) = C_3C_4 f(n) < |I| = 1,$$

где для функции $f(n)$ от n существует $f^{-1}(n)$. Отсюда можно получить новую оценку C_4. Рассмотрим иной способ получения константы в оценке снизу. Новая идея поиска глобальной оценки снизу заключается в нахождении оценки меры множества всех точек отрезка, для которого выполняется неравенство, обратное (4).

Рассмотрим отрезок $I_0 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Для точек этого отрезка будем рассматривать многочлены $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, удовлетворяющие условию (5) и не имеющие кратных корней, такие, что для них выполняются условия

$$|P(x)| < C_1Q^{-n},\ H(P) \le Q,\ x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \tag{7}$$

Далее в доказательстве в неравенстве будем вместо C_1 использовать некоторую неизвестную константу δ_0, которую мы и будем искать. Таким образом, неравенство (4) запишется в виде

$$|P(x)| < \delta_0Q^{-n}. \tag{8}$$

Для многочленов $P(x)$ введем дополнительное условие:

$$|P'(x)| > Q^{\frac{5}{8}}. \tag{9}$$

Далее рассмотрим множество тех $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, для которых существует хотя бы один многочлен $P(x)$, для которого верны неравенства (8) и (9):

$$\mathcal{L}_n(\delta_0) = \{x \in I_0 : \exists P(x) \in \mathcal{P}_n(Q), |P(x)| < \delta_0 Q^{-n}\}.$$

Ясно, что множество таких точек является подмножеством отрезка I_0, следовательно

$$\mu\mathcal{L}_n(\delta_0) \le \mu I_0 = 1,$$

где μ – это мера Лебега. Нам необходимо получить более точную оценку сверху меры множества $\mathcal{L}_n(\delta_0)$.

Т е о р е м а 6. *Пусть* $\sigma_{\alpha_1}(P) = \{\sigma_k\}_{k\in K}$ *– покрытие множества* $\mathcal{L}_n(\sigma_0)$, *такое что*

$$\mu\sigma_i < C_2 |P(\alpha_1)|^{-1},$$

причем для α_1 *выполняется условие* (9). *При выборе* C_2 *таким, что* $\sum\limits_{k\in K} \mu\sigma_k < \mu I_0$, *то* $\exists x \in I_0$, *для которых выполняется* (8), *причем* δ_0 *можно выразить через* C_2.

Сформулируем и докажем лемму.

Л е м м а 3. *Для множества* $\mathcal{L}_n(\delta_0)$ *справедливо неравенство*

$$\mu\mathcal{L}_n(\delta_0) < C_3\delta_0,$$

где C_3 *– некоторая константа, зависящая только от n.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть многочлен $P(x)$ удовлетворяет условиям (7), α_1 – его корень.

Рассмотрим подмножества отрезка I_0:

$$\sigma_{\alpha_1}(P) = \{x \in I_0, |x - \alpha_1| < \delta_0 Q^{-n} |P'(\alpha_1)|^{-1}\}.$$

Система множеств $\sigma_{\alpha_1}(P)$ образует покрытие множества $\mathcal{L}_n(\delta_0)$. Согласно лемме 2 и условию (8) для меры множества

$$\mu\sigma_{\alpha_1}(P) \le 2^{n-1} |P(x)| \, |P(\alpha_1)|^{-1} < 2^{n-1}\delta_0 Q^{-n} \, |P'(\alpha_1)|^{-1}. \tag{10}$$

Кроме множеств σ_{α_1}, введем множества вида

$$\sigma_{\alpha_1,1} = \{x \in I_0, |x - \alpha_1| < C_4 \, |P'(\alpha_1)|^{-1}\}, \tag{11}$$

где $C_4 > 0$ зависит только от n. Рассмотрим все возможные векторы $b = (a_n, a_{n-1}, \, \dots \, , a_1)$. Каждому такому вектору можно поставить в соответствие множество многочленов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, коэффициенты $a_n, \, \dots \, , a_2, a_1$ зафиксированы и совпадают с координатами вектора b, а свободный коэффициент a_0 принимает различные значения:

$$\mathcal{P}(b) = \left\{P(x) \in \mathcal{P}_n(Q) : P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, |a_0| \le Q\right\},$$
$$b = (a_n, a_{n-1}, \, \dots \, , a_1).$$

Пусть для любых двух множеств $\sigma_{\alpha_1,1}(P_1)$, $\sigma_{\alpha_1,1}(P_2)$ выполняется условие

$$\sigma_{\alpha_1,1}(P_1) \cap \sigma_{\alpha_1,1}(P_2) = \varnothing, \forall P_1(x), P_2(x) \in \mathcal{P}(b). \tag{12}$$

Так как множества $\sigma_{\alpha_1,1}$ попарно дизъюнктны, то

$$\sum_{P(x)\in\mathcal{P}(b)} \mu\sigma_{\alpha_1,1}(P) < |I_0| = 1.$$

Используя определение множества $\sigma_{\alpha_1,1}$ и оценки (10) меры множества σ_{α_1}, можно оценить отношение мер этих множеств:

$$\frac{\mu\sigma_{\alpha_1}}{\mu\sigma_{\alpha_1,1}} \le 2^{n-1}\delta_0 Q^{-n} C_4^{-1}. \tag{13}$$

Выражая из неравенства (13) $\mu\sigma_{\alpha_1}$, получим

$$\mu\sigma_{\alpha_1} \le 2^{n-1}\delta_0 Q^{-n} C_4^{-1}\mu\sigma_{\alpha_1,1}.$$

Мы получили оценку $\mu\sigma_{\alpha_1}$, зависящую от C_4:

$$\sum_{P(x)\in\mathcal{P}(b)} \mu\sigma_{\alpha_1} \le 2^{n-1}\delta_0 Q^{-n} C_4^{-1}.$$

Так как система множеств $\sigma_{\alpha_1}(P)$, $P\in\mathcal{P}(b)$, $b\in\{0,Q\}^n$ образует покрытие $\mathcal{L}_n(\delta_0)$, то

$$\mu\mathcal{L}_n(\delta_0) \le \sum_b 2^{n-1}\delta_0 Q^{-n} C_4^{-1} \le (2Q+1)^n 2^{n-1}\delta_0 Q^{-n} C_4^{-1}, \tag{14}$$

где число $(2Q+1)^n$ можно заменить.

$$(2Q+1)^n \approx 2^n Q^n e^{\frac{n}{2Q}} < 2^{n+1} Q^n,\ \ Q > Q_0$$

с учетом того, что $2Q < n$. Возвращаясь к (14), получим

$$\mu\mathcal{L}_n(\delta_0) \le 2^{n+1} Q^n 2^{n-1}\delta_0 Q^{-n} C_4^{-1} = 2^{2n} C_4^{-1}\delta_0 < 1. \tag{15}$$

Отсюда получаем

$$\delta_0 < 2^{-2n} C_4,$$

где C_4 зависит только от n. Таким образом, утверждение теоремы доказано.

В неравенстве (15) положим $C_4 < \frac{1}{4}$. Нам нужно показать, что при этом ограничении выполняется утверждение теоремы 3. Для этого достаточно показать, что выполняется условие (12).

Рассмотрим $P'(x)$:

$$|P'(x)| = |na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1| \le nQ|x^{n-1} + \ldots + 1| \le 2nQ.$$

В то же время выполняется условие (9). Таким образом, получаем

$$Q^{\frac{5}{8}} < |P'(x)| \le 2nQ.$$

Аналогично можно получить оценку сверху для k-й производной многочлена $P(x)$ для $k\in\{2,n\}$:

$$|P^{(k)}(x)| \le \frac{2n!Q}{(n-k)!}.$$

Рассмотрим множество $\sigma_{\alpha_1}(P_1), P_1(x)\in\mathcal{P}(b)$. Для точек $x\in\sigma_{\alpha_1}$ запишем разложение $P_1(x)$ в ряд Тейлора с центром в точке α_1 – корне этого многочлена:

$$|P_1(x)| \le |P_1(\alpha_1)| + |P_1(\alpha_1)||x-\alpha_1| + \frac{1}{2!}|P_1(\alpha_1)||x-\alpha_1|^2 + \ldots$$
$$+\frac{1}{n!}|P_1^{(n)}(x)||x-\alpha_1|^n.$$

Так как $P_1(\alpha_1)=0,$ а согласно определению множества σ_{α_1} (11) $|x-\alpha_1|<C_4|P_1'(x)|^{-1}$. Тогда

$$|P_1(x)|\le 0+\sum_{k=1}^{n}\frac{2n!Q}{k!(n-k)!}|x-\alpha_1|^k\le C_4|P'(\alpha_1)||P'(\alpha_1)|^{-1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{2n!Q}{k!(n-k)!}C_4^kQ^{-\frac{5k}{8}}\le$$

$$\le C_4+C_4\sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}Q^{-\frac{5k}{8}+1}\le C_4+C_4=2C_4. \quad (16)$$

В неравенстве (16) во втором слагаемом $Q>Q_0$ – большое натуральное число в отрицательной степени, поэтому значение суммы не превосходит единицы.

Предположим, что условие (12) выполняется в случае $C_4\ge\frac{1}{4}$. Значит, если $\exists P_1(x),P_2(x)\in\mathcal{P}(b)$, такие что $\sigma_{\alpha_1,1}(P_1)\cap\sigma_{\alpha_1,1}(P_2)\ne\varnothing$, то найдется такая точка $x_0\in\sigma_{\alpha_1,1}(P_1)\cap\sigma_{\alpha_1,1}(P_2)$, и тогда расстояние между значениями многочленов $P_1(x_0),\ P_2(x_0)$

$$|P_1(x_0)-P_2(x_0)|\le|a_{0,1}-a_{0,2}|\le 4C_4.$$

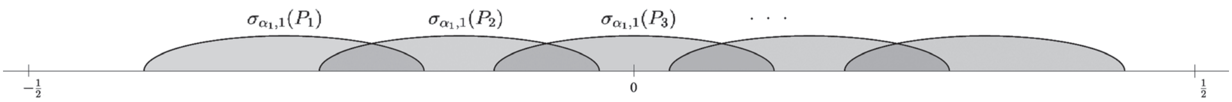
Очевидно, что (12) выполняется, когда

$$|P_1(x_0)-P_2(x_0)|\le 4C_4<1.$$

В этом случае многочлены $P_1(x)$ и $P_2(x)$ совпадают. В результате мы получаем противоречие с предположением, что $C_4\ge\frac{1}{4}$, поэтому условие (12) выполняется при $C_4<\frac{1}{4}$. Тогда

$$\delta_0<2^{-2n-2}<2^{-n-2}.$$

Результат леммы 3 показывает, что при постепенном уменьшении константы C_4 мера каждого из множеств $\sigma_{\alpha_1,1}$ также уменьшается.



Множества $\sigma_{\alpha_1,1}$, имеющие общие точки при $C_4\ge\frac{1}{4}$

Sets of $\sigma_{\alpha_1,1}$ with the common points at $C_4\ge\frac{1}{4}$

Рисунок иллюстрирует перекрытие множеств $\sigma_{\alpha_1,1}$ при $C_4\ge\frac{1}{4}$. Нами было показано, что при $C_4<\frac{1}{4}$ сумма мер $\sum\limits_{P(x)\in\mathcal{P}(b)}\mu\sigma_{\alpha_1,1}(p)$ меньше меры интервала I_0. Это означает, что существуют точки $x\in I_0$, которые не попадают в множество $\mathcal{L}_n(\delta_0)$, а следовательно, для них имеет место неравенство, обратное (8), при $C_4<\frac{1}{4}$:

$$|P(x)|\ge 2^{-n-2}Q^{-n}.$$

Из доказанного выше следует, что теорема Дирихле является принципиально неулучшаемой. Мы нашли такое минимальное $\delta_0>0$, что для некоторых $x\in I_0$ выполняется неравенство (8).

Список использованных источников

1. Mahler, K. Über das Maß der Menge aller S-Zahlen / K. Mahler // Math. Ann. – 1932. – Vol. 106, № 1. – P. 131–139.

2. Касселс, Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений: пер. с англ. / Дж. В. С. Касселс; под. ред и с доп. А. О. Гельфонда. – М.: Иностр. лит., 1961. – 213 с.

3. Берник, В. И. Метрическая теорема о совместном приближении нуля значениями целочисленных многочленов / В. И. Берник // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1980. – Т. 44, вып. 1. – С. 24–25.

4. Шидловский, А. Б. Трансцендентные числа / А. Б. Шидловский. – М.: Наука, 1987. – 447 с.

5. Гельфонд, А. О. Трансцендентные и алгебраические числа / А. О. Гельфонд. – Изд. 3-е. – М.: URSS: Ленанд, 2015. – 224 с.

6. Спринджук, В. Г. Доказательство гипотезы Малера о мере множества *S*-чисел / В. Г. Спринджук // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1965. – Т. 29, вып. 2. – С. 379–436.

7. Спринджук, В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск: Наука и техника, 1967. – 181 с.

8. Schneider, Th. Einführung in die Transzendenten Zahlen / Th. Schneider. – Springer-Verlag, 1957. – 139 s.

References

1. Mahler K. Über das Maß der Menge aller S-Zahlen. *Mathematische Annalen*, 1932, vol. 106, no. 1, pp. 131–139. Doi: 10.1007/bf01455882

2. Cassels, J. W. S. *An Introduction to Diophantine Approximation*. Cambridge University Press, 1958. 213 p.

3. Bernik, V. I. A metric theorem on the simultaneous approximation of a zero by the values of integral polynomials. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1980, vol. 6, no. 1, pp. 21–40. Doi: 10.1070/im1981v016n01abeh001292

4. Shidlovskii A. B. *Transcendental Numbers*. Moscow, Nauka Publ., 1987. 447 p. (in Russian).

5. Gel'fond A. O. *Transcendental and Algebraic Numbers*. 3 rd. ed. Moscow, URSS, Lenand Publ., 2015. 224 p. (in Russian).

6. Sprindzhuk V. G. Proof of Mahler's conjecture on the measure of the set of *S*-numbers. *American Mathematical Society Translations: Series 2*, 1966, pp. 215–272. Doi: 10.1090/trans2/051/09

7. Sprindzhuk V. G. *Mahler's Problem in the Metric Number Theory*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1967. 181 p. (in Russian).

8. Schneider Th. *Einführung in die Transzendenten Zahlen*. Springer-Verlag, 1957. 139 s. Doi: 10.1007/978-3-642-94694-3

Информация об авторе

Жур Максим Анатольевич – аспирант, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: maksimzhur@gmail.com

Information about the author

Maksim A. Zhur – Postgraduate Student, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: maksimzhur@gmail.com