ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 514+681.5

Поступила в редакцию 30.05.2017
Received 30.05.2017

В. Г. Найденко

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

РАСПОЗНАВАНИЕ ЧАСТИЧНОЙ ВЫПУКЛОСТИ ОБЪЕДИНЕНИЯ НЕСКОЛЬКИХ МНОГОГРАННЫХ МНОЖЕСТВ

Аннотация. Работа посвящена алгоритмическим аспектам частичной выпуклости, являющейся обобщением классического понятия выпуклости. Понятие частичной выпуклости часто необходимо вводить при изучении многих прикладных проблем, таких как задачи синтеза СБИС, обработки изображений, проектирования баз данных и др., поскольку требование традиционной выпуклости слишком ограничительно. В то же время частичная выпуклость сохраняет многие полезные свойства классической выпуклости, что позволяет находить эффективные алгоритмы для их решения. В настоящей статье исследуется проблема распознавания частичной выпуклости для объединения нескольких многогранных множеств, заданных в виде пересечений полупространств в n-мерном линейном пространстве. Нами установлен необходимый и достаточный признак частичной выпуклости для объединения многогранных множеств. Используя данный признак частичной выпуклости, в случае конечности множества направлений частичной выпуклости нами разработан полиномиальный алгоритм распознавания для объединения нескольких многогранных множеств, заданных пересечениями полупространств, при условии, что число этих множеств фиксировано. Отметим, что ранее для рассматриваемой задачи был известен полиномиальный алгоритм ее решения только для случая объединения двух многогранных множеств.

Ключевые слова: выпуклость, обобщенная выпуклость, частичная выпуклость, задача распознавания выпуклости, вычислительная сложность

Для цитирования. Найденко, В. Г. Распознавание частичной выпуклости объединения нескольких многогранных множеств / В. Г. Найденко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 1. – С. 38–43.

V. G. Naidenko

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

DIRECTIONAL CONVEXITY RECOGNITION OF THE UNION OF SEVERAL POLYHEDRA

Abstract. The article is devoted to the algorithmic aspects of partial convexity, which is a generalization of the classical concept of convexity. Often, it is necessary to introduce the concept of partial convexity when studying many applied problems such as problems of VLSI design, image processing, database design, etc., since the requirement of traditional convexity is too restrictive for such problems. At the same time, the partial convexity preserves many useful properties of classical convexity, which makes it possible to find effective algorithms for solving these problems. A problem for recognizing directional convexity of the union of polyhedral sets in the n-dimensional linear space is investigated. We have established a necessary and sufficient attribute of the partial convexity for the union of polyhedral sets. Using this attribute of partial convexity, in the case of the finiteness of the set of directions of partial convexity, we have developed a polynomial recognition algorithm for the union of several polyhedral sets given by intersections of half-spaces, provided that the number of these sets is fixed. We note that earlier for the problem under consideration, a polynomial algorithm for solving it was known only for the case of the union of two polyhedral sets.

Keywords: convexity, generalized convexity, restricted-orientation convexity, problem to recognize convexity, computational complexity

For citation. Naidenko V. G. Directional convexity recognition of the union of several polyhedra. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 38–43 (in Russian).

Введение. Теория выпуклости представляет собой раздел геометрии, который находит широкое применение в других областях математики, таких как линейная алгебра, статистика, теория чисел, комбинаторика и оптимизация. Прикладное значение классической теории выпуклости заключается в том, что она нередко позволяет разработать эффективные методы решения многих проблем. Однако требование выпуклости часто является слишком жестким. В практических задачах множества часто могут не удовлетворять условию выпуклости. Исследование прикладных проблем, таких как задачи синтеза СБИС, обработки изображений, проектирования баз данных и др., приводит к необходимости введения нетрадиционных понятий выпуклости, например выпуклости по заданным направлениям, или частичной выпуклости [1, 2]. В статье [3] приводится решение проблемы распознавания частичной выпуклости объединения двух многогранных множеств и поставлен вопрос: как распознать частичную выпуклость объединения трех и более многогранных множеств. В настоящей статье дано положительное решение этого вопроса.

1. Определения. Дадим необходимые определения. Пусть в n-мерном линейном пространстве R^n задано множество единичных векторов (направлений) $O \subseteq S^{n-1}$, где S^{n-1} – единичная сфера. Прямая, параллельная какому-нибудь вектору из O, называется O-прямой. Напомним, что множество $X \subseteq R^n$ называется частично выпуклым (O-выпуклым), если пересечение X с произвольной O-прямой связно или пусто. Отметим, что частичная выпуклость является обобщением понятия классической выпуклости, так как все классически выпуклые множества являются O-выпуклыми. Кроме того, если $O = S^{n-1}$, то O-выпуклость совпадает с классической выпуклостью.

2. Постановка проблемы. Рассмотрим следующую проблему распознавания O-выпуклости множеств. Пусть заданы $k \geq 3$ многогранных (возможно неограниченных) множеств $P_1, \ldots, P_k$. Предположим, что эти множества заданы с помощью H-представления: $P_i = \{x \in R^n \mid A^{(i)}x \leq a^{(i)}\}$ для $i = \overline{1,k}$. Здесь $A^{(i)}$ и $a^{(i)}$ обозначают матрицу и вектор, соответствующие многогранному множеству P_i. Знак $\leq$ обозначает покомпонентное сравнение «меньше или равно» для векторов. Возникает вопрос, когда объединение $\cup_{i=1}^{k} P_i$ является частично выпуклым множеством?

Как отмечается в работе [4], мотивация в решении указанной выше проблемы возникает в области теории оптимального управления. В статье [5] предлагается методика многопараметрического квадратичного программирования, чтобы найти в явном виде решения проблемы оптимального управления. Эти решения оказываются кусочно-линейными на полиэдральном (многогранном) разбиении пространства сенсорных измерений. Для того чтобы уменьшить вычислительную сложность решений и соответственно спроектировать более дешевое управляющее оборудование, необходимо использовать алгоритмы распознавания выпуклости для объединения многогранных областей.

В случае классической выпуклости проблема распознавания выпуклости объединения двух многогранных множеств рассмотрена в [4], где приведены эффективные алгоритмы для ее решения при различных способах задания многогранных множеств. Однако в случае частичной выпуклости такие эффективные алгоритмы были неизвестны.

3. Основные результаты. Покажем, что данная задача распознавания частичной выпуклости для объединения нескольких многогранных множеств, заданных в виде пересечений полупространств, полиномиально разрешима в n-мерном пространстве R^n в случае, когда множество направлений частичной выпуклости O конечно и количество многогранных множеств фиксировано. Сначала докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 1. *Объединение многогранных множеств $\cup_{i=1}^{k} P_i$ не будет частично выпуклым тогда и только тогда, когда в $\cup_{i=1}^{k} P_i$ найдутся такие точки x и y на какой-нибудь O-прямой, что точка $\dfrac{x+y}{2}$ не принадлежит $\cup_{i=1}^{k} P_i$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что если в $\cup_{i=1}^{k} P_i$ найдутся некоторые точки x, y на какой-нибудь O-прямой и точка $\dfrac{x+y}{2}$ не принадлежит $\cup_{i=1}^{k} P_i$, то $\cup_{i=1}^{k} P_i$ не будет частично выпуклым, так как пересечение этой O-прямой с $\cup_{i=1}^{k} P_i$ несвязно. Теперь покажем, что если объединение $\cup_{i=1}^{k} P_i$ не будет частично выпуклым, то в $\cup_{i=1}^{k} P_i$ найдутся некоторые точки x, y на какой-нибудь O-прямой и точка $\dfrac{x+y}{2}$ не принадлежит $\cup_{i=1}^{k} P_i$. Когда множество $\cup_{i=1}^{k} P_i$ не является частично выпуклым, тогда найдутся такие точки $x, y \in \cup_{i=1}^{k} P_i$ на некоторой O-прямой, что отрезок

$[x,y]=\{z\in R^n \mid z=\alpha x+(1-\alpha)y, 0\le\alpha\le 1\}$ не лежит целиком в $\cup_{i=1}^k P_i$. Значит, существует такая точка x' в $[x,y]$, что $x'\notin\cup_{i=1}^k P_i$. Рассмотрим пересечение отрезка $[x,x']$ с множеством $\cup_{i=1}^k P_i$. Возьмем такую точку $\tilde{x}\in[x,x']\cap\cup_{i=1}^k P_i$, что полуоткрытый интервал $(\tilde{x},x']$ имеет пустое пересечение с $\cup_{i=1}^k P_i$. Точка $\tilde{x}$ всегда найдется, поскольку $\cup_{i=1}^k P_i$ замкнуто. Аналогично рассмотрим пересечение отрезка $[x',y]$ с множеством $\cup_{i=1}^k P_i$. Возьмем такую точку $\tilde{y}\in[x',y]\cap\cup_{i=1}^k P_i$, что полуоткрытый интервал $[x',\tilde{y})$ имеет пустое пересечение с $\cup_{i=1}^k P_i$. Рассмотрим теперь отрезок $[\tilde{x},\tilde{y}]$. Заметим, что открытый интервал $(\tilde{x},\tilde{y})$ имеет пустое пересечение с $\cup_{i=1}^k P_i$, так как $(\tilde{x},\tilde{y})=(\tilde{x},x']\cup[x',\tilde{y})$. Следовательно, серединная точка $x'=\dfrac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}$ отрезка $[\tilde{x},\tilde{y}]$ не принадлежит множеству $\cup_{i=1}^k P_i$. В то же время концевые точки $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ принадлежат границе множества $\cup_{i=1}^k P_i$. Таким образом, если $\cup_{i=1}^k P_i$ не будет частично выпуклым, то на некоторой O-прямой существуют такие точки $\tilde{x},\tilde{y}\in\cup_{i=1}^k P_i$, что точка $\dfrac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}$ не принадлежит $\cup_{i=1}^k P_i$. Теорема доказана.

Заметим, что если некоторая точка $y\in R^n$ не принадлежит $\cup_{i=1}^k P_i$, то она принадлежит одному из многогранных множеств $T_{i_1\ldots i_k}=\left\{x\in R^n \mid A_{i_1}^{(1)}x>a_{i_1}^{(1)},\ldots,A_{i_k}^{(k)}x>a_{i_k}^{(k)}\right\}$ $\left(i_1=\overline{1,m_1},\ \ldots\ ,i_k=\overline{1,m_k}\right)$, где $A_{i_j}^{(j)}$ – i_j-я строка матрицы $A^{(j)}$, $a_{i_j}^{(j)}$ – i_j-я компонента вектора $a^{(j)}$ и m_j – число строк матрицы $A^{(j)}$ соответственно, $j=\overline{1,k}$. Для определенности положим, что $O=\{o_1,\ \ldots\ ,o_l\}$, где для каждого индекса $t=\overline{1,l}$ вектор o_t можно покомпонентно записать как $o_t=(o_{t1},\ \ldots\ ,o_{tn})$. O-прямую будем называть o_t-прямой, если эта прямая параллельна вектору o_t. Заметим, что некоторый отрезок $[x,y]\subset R^n$ будет лежать на o_t-прямой, только если $x-y=\lambda o_t$, где λ – некоторое вещественное число. Пусть вектор o_t имеет p_t нулевых компонент $o_{tj_1},\ \ldots\ ,o_{tj_p}$ и q_t ненулевых компонент $o_{tl_1},\ \ldots\ ,o_{tl_q}$, где $p_t+q_t=n$. Отметим, что нулевые компоненты вектора o_t могут отсутствовать. Чтобы выполнялось равенство $x-y=\lambda o_t$, необходимо и достаточно выполнение следующей системы равенств:

$$\begin{aligned} &x_{j_s}-y_{j_s}=0 && (s=\overline{1,p_t}),\\ &\frac{x_{l_r}-y_{l_r}}{o_{tl_r}}=\frac{x_{l_{r+1}}-y_{l_{r+1}}}{o_{tl_{r+1}}} && (r=\overline{1,q_t-1}). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x_{j_s}, x_{l_r} и y_{l_r}, y_{j_s} обозначают компоненты векторов x и y соответственно.

Суммируя вышесказанное, можно утверждать, что множество $\cup_{i=1}^k P_i$ не будет частично выпуклым тогда и только тогда, когда найдутся такие $T_{i_1\ldots i_k}$ и o_t, что для некоторых двух различных многогранных множеств P_g и P_h из $\{P_1,\ \ldots\ ,P_k\}$ существуют точки $x\in P_g$ и $y\in P_h$, для которых выполняется система равенств (1) и точка $\dfrac{x+y}{2}$ принадлежит $T_{i_1\ldots i_k}$ в силу теоремы 1. Это наблюдение подсказывает следующий метод решения указанной выше проблемы распознавания O-выпуклости.

Сопоставим каждому набору индексов $i_1\ldots i_k,t,g,h,$ где выполняются условия $i_1=\overline{1,m_1},\ \ldots\ ,i_k=\overline{1,m_k},\ t=\overline{1,l},\ g=\overline{1,k-1},\ h=\overline{2,k},\ g>h$, следующую систему линейных неравенств относительно векторов-переменных $x\in R^n,\ y\in R^n$:

$$
\begin{aligned}
&A^{(g)}x \le a^{(g)}, \\
&A^{(h)}y \le a^{(h)}, \\
&x_{j_s} - y_{j_s} = 0 \qquad\qquad (s = \overline{1, p_t}), \\
&\frac{x_{l_r} - y_{l_r}}{o_{tl_r}} = \frac{x_{l_{r+1}} - y_{l_{r+1}}}{o_{tl_{r+1}}} \quad (r = \overline{1, q_t - 1}), \\
&A_{i_1}^{(1)} \frac{x+y}{2} > a_{i_1}^{(1)}, \\
&\dots \\
&A_{j_k}^{(k)} \frac{x+y}{2} > a_{j_k}^{(k)}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Индексы $i_1 \dots i_k, t, g, h$ конкретизируют систему линейных неравенств (2). Заметим, если для какого-нибудь набора индексов $i_1 \dots i_k, t, g, h$ система (2) имеет некоторое решение $x, y \in R^n$, то его можно интерпретировать следующим образом. Для некоторых точек $x \in P_g$ и $y \in P_h$ (см. неравенства $A^{(g)}x \le a^{(g)}$, $A^{(h)}y \le a^{(h)}$), лежащих на одной (o_t-прямой) из O-прямых (см. равенства $x_{j_s} - y_{j_s} = 0$ $(s = \overline{1, p_t})$, $\frac{x_{l_r} - y_{l_r}}{o_{tl_r}} = \frac{x_{l_{r+1}} - y_{l_{r+1}}}{o_{tl_{r+1}}}$ $(r = \overline{1, q_t - 1})$), точка $\frac{x+y}{2}$ принадлежит множеству $T_{i_1 \dots i_k}$. В таком случае множество $\cup_{i=1}^{k} P_i$ не является O-выпуклым. Соответственно, если для любого набора индексов $i_1 \dots i_k, t, g, h$ система (2) не имеет решения, то это будет означать O-выпуклость множества $\cup_{i=1}^{k} P_i$.

Заметим, что систему (2) можно эффективно решить с помощью следующей задачи линейного программирования относительно переменных $\varepsilon \in R$, $x \in R^n$, $y \in R^n$:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon \to \max, \\
&A^{(g)}x \le a^{(g)}, \\
&A^{(h)}y \le a^{(h)}, \\
&x_{j_s} - y_{j_s} = 0 \qquad\qquad (s = \overline{1, p_t}), \\
&\frac{x_{l_r} - y_{l_r}}{o_{tl_r}} = \frac{x_{l_{r+1}} - y_{l_{r+1}}}{o_{tl_{r+1}}} \quad (r = \overline{1, q_t - 1}), \\
&A_{i_1}^{(1)} \frac{x+y}{2} > a_{i_1}^{(1)} + \varepsilon, \\
&\dots \\
&A_{j_k}^{(k)} \frac{x+y}{2} > a_{j_k}^{(k)} + \varepsilon.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Отметим, что система (2) имеет решение тогда и только тогда, когда задача линейного программирования (3) либо неограниченна, т. е. значение целевой функции ε бесконечно растет, либо имеет решение, причем должно выполняться следующее условие:

$$\varepsilon > 0. \tag{4}$$

Теперь представим процедуру распознавания частичной выпуклости объединения нескольких многогранных множеств $\cup_{i=1}^{k} P_i$. Чтобы показать или опровергнуть O-выпуклость данного объединения многогранных множеств $\cup_{i=1}^{k} P_i$, нам для каждого набора индексов $i_1 \dots i_k, t, g, h$, где $i_1 = \overline{1, m_1}$, ... , $i_k = \overline{1, m_k}$, $t = \overline{1, l}$, $g = \overline{1, k-1}$, $h = \overline{2, k}$, $g > h$, необходимо решить задачу линейного программирования (3), а также проверить выполнение условия (4). Если хотя бы для одного из наборов индексов $i_1 \ldots i_k, t, g, h$ задача (3) либо неограниченна, либо имеет решение и условие (4) выполняется, то это означает, что $\cup_{i=1}^{k} P_i$ не O-выпукло. В противном случае, $\cup_{i=1}^{k} P_i$ оказывается O-выпуклым множеством.

Оценим вычислительную сложность приведенной выше процедуры распознавания O-выпуклости. Для распознавания O-выпуклости множества $\cup_{i=1}^{k} P_i$ мы должны решить самое большее $m_1 \ldots m_k l C_k^2$ задач линейного программирования типа (3). Следовательно, вычислительную сложность распознавания O-выпуклости можно оценить как $\mathrm{O}(m_1 \ldots m_k l k^2 LP)$, где LP – время, требуемое для решения задачи линейного программирования типа (3) и проверки условия (4). Так как задача типа (3) имеет $2n + 1$ вещественных переменных и $m_g + m_h + n + k - 1$ ограничений и может быть полиномиально разрешена, например с помощью метода эллипсоидов, то вся процедура распознавания частичной выпуклости объединения нескольких многогранных множеств также занимает полиномиальное время, если k фиксировано. То есть при распознавании O-выпуклости объединения трех многогранных множеств число решаемых систем линейных уравнений будет выражаться полиномом четвертой степени, четырех множеств – полиномом пятой степени и т. д. Если же вместе с k также фиксировано число направлений частичной выпуклости, то число решаемых систем линейных уравнений будет выражаться полиномом третьей степени, четырех множеств – полином четвертой степени и т. д. Если k не фиксировано, то данная процедура распознавания занимает экспоненциальное время по k.

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 2. *В случае конечного множества направлений O частичной выпуклости, проблема распознавания O-выпуклости объединения нескольких многогранных множеств, заданных в виде пересечений замкнутых полупространств в n-мерном линейном пространстве, относится к классу P полиномиально разрешимых задач, если количество многогранных множеств фиксировано.*

Рассмотрим ситуацию, когда многогранные множества задаются не пересечениями полупространств, а в виде V-представления: каждое многогранное множество представляется в форме суммы Минковского выпуклой оболочки конечного множества точек и выпуклой оболочки конечного множества лучей (см. [4]). Заметим, что при таком задании многогранных множеств для классической выпуклости имеется эффективный полиномиальный алгоритм распознавания выпуклости их объединения [4]. Для произвольной O-выпуклости с конечным множеством направлений O частичной выпуклости мы можем представить такой алгоритм в трехмерном пространстве. Для трехмерного пространства имеются эффективные алгоритмы типа «заворачивания подарка» и «под-над» (см. [6]), позволяющие легко находить по заданным конечным множествам точек и лучей соответствующее представление многогранного множества в виде пересечения полупространств. Затем мы можем применить к этим многогранным множествам в новом представлении описанную ранее процедуру распознавания частичной выпуклости их объединения. Что касается случая произвольного n-мерного пространства, то мы не можем эффективно использовать методы «заворачивания подарка» и «под-над», так как они требуют экспоненциального времени по величине размерности n линейного пространства.

Заключение. Рассмотрена проблема распознавания частичной выпуклости объединения нескольких многогранных множеств и приведен полиномиальный алгоритм ее решения. Однако остаются открытыми следующие вопросы:

– можно ли найти полиномиальную по времени процедуру проверки O-выпуклости объединения нескольких многогранных множеств, когда количество этих многогранных множеств не фиксировано;

– можно ли построить эффективный полиномиальный алгоритм для распознавания частичной выпуклости объединения нескольких многогранных множеств, каждое из которых задается в виде суммы Минковского выпуклой оболочки конечного множества точек и выпуклой оболочки конечного множества лучей в n-мерном пространстве;

– в каких случаях, когда множество направлений O частичной выпуклости бесконечно, можно построить полиномиальный алгоритм для распознавания частичной выпуклости;

– можно ли найти эффективные алгоритмы для других видов обобщенной выпуклости, например для OC-выпуклости, образованной пересечениями конических семипространств частичной выпуклости [7].

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Института математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция-2020».

Acknowledgements. The work was carried out by the financial support from the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus within the framework of the Government Research Program “Convergence- 2020”.

Список использованных источников

1. Rawlins, G. Ortho-convexity and its generalizations / G. Rawlins, D. Wood // Machine Intelligence and Pattern Recognition. – Amsterdam: North-Holland, 1988. – P. 137–152.

2. Найденко, В. Г. Частичная выпуклость / В. Г. Найденко // Мат. заметки. – 2004. – Т. 75, вып. 2. – С. 222–235.

3. Найденко, В. Г. Распознавание частичной выпуклости объединения многогранных множеств / В. Г. Найденко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. – 2006. – № 4. – С. 45–49.

4. Bemporad, A. Convexity recognition of the union of polyhedral / A. Bemporad, K. Fukuda, F. D. Torrisi // Comput. Geometry. – 2001. – Vol. 18, № 3. – P. 141–154.

5. The explicit linear quadratic regulator for constrained systems / A. Bemporad [et al.] // Automatica. – 2002. – Vol. 38, № 1. – P. 3–20.

6. Препарата, Ф. Вычислительная геометрия: пер. с англ. / Ф. Препарата, М. Шеймос. – М.: Мир, 1989. – 478 с.

7. Метельский, Н. Н. Алгоритмические аспекты частичной выпуклости / Н. Н. Метельский, В. Г. Найденко // Мат. заметки. – 2000. – Т. 68, вып. 3. – С. 399–410.

References

1. Rawlins G., Wood D. Ortho-convexity and its generalizations. *Machine Intelligence and Pattern Recognition*. Amsterdam, North-Holland, 1988, pp. 137–152. Doi: 10.1016/b978-0-444-70467-2.50015-1

2. Naidenko V. G. Partial convexity. *Mathematical Notes*, 2004, vol. 75, no. 1–2, pp. 202–212. Doi: 10.1023/b:matn.0000015036.94515.c0

3. Naidenko V. G. Directional convexity recognition of the union of polyhedra. *Vestsi Natsyianal’nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series,* 2006, no. 4, pp. 45–49 (in Russian).

4. Bemporad A., Fukuda K., Torrisi F. D. Convexity recognition of the union of polyhedral. *Computational Geometry*, 2001, vol. 18, no. 3, pp. 141–154. Doi: 10.1016/s0925-7721(01)00004-9

5. Bemporad A., Morari M., Dua V., Pistikopoulos E. N. The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. *Automatica*, 2002, vol. 38, no. 1, pp. 3–20. Doi: 10.1016/s0005-1098(01)00174-1

6. Preparata F. P., Shamos M. I. *Computational Geometry*. Springer-Verlag, 1985. 400 p. Doi: 10.1007/978-1-4612-1098-6

7. Metel’skii N. N., Naidenko V. G. Algorithmic aspects of partial convexity. *Mathematical Notes,* 2000, vol. 68, no. 3, pp. 345–354. Doi: 10.1007/bf02674558

Информация об авторе

Найденко Владимир Григорьевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: naidenko@im.bas-net.by

Information about the author

Vladimir G. Naidenko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: naidenko@im.bas-net.by