

**ФИЗИКА**  
**PHYSICS**

УДК 530.1

Поступила в редакцию 12.10.2017  
Received 12.10.2017

**А. В. Ефимова**

*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

**КАСП-СИНГУЛЯРНОСТЬ ТРАЕКТОРИИ БЛОХОВСКОГО ВЕКТОРА КУБИТА  
ВО ВНЕШНЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ СВЕТОВОМ ПОЛЕ**

**Аннотация.** Исследована квантовая динамика двухуровневой квантово-механической системы, подверженной внешнему монохроматическому воздействию вне рамок приближения вращающейся волны. Показано, что при условии точного резонанса на траекториях векторов Блоха при различных начальных условиях проявляются особые точки, которые классифицируются как касп-сингулярности. Обнаружено, что в таких точках мгновенная ось вращения, относительно которой происходит вращение вектора Блоха, меняет направление на противоположное, и происходит остановка движения. При ненулевой частотной расстройке касп-сингулярности исчезают. Численный анализ особенностей траекторий вектора Блоха без приближения вращающейся волны дополнен исследованием, основанным на использовании методов Флоке. В рамках данного подхода получены и проанализированы рекуррентные соотношения для спектральных компонент амплитуд вероятностей. Найдено аналитическое выражение для двух значений квазиэнергий с точностью до четвертого порядка по величине энергии взаимодействия. Показано, что для получения сингулярного поведения траекторий вектора Блоха достаточно ограничиться четырьмя спектральными гармониками в разложении Флоке. Полученные результаты важны для достижения точности при выполнении когерентных преобразований с двухуровневыми системами в случаях, когда приближение вращающейся волны не применимо.

**Ключевые слова:** кубит, приближение вращающейся волны, вектор Блоха, отстройка от резонанса, методы Флоке и непрерывных дробей, матрица эволюции

**Для цитирования.** Ефимова, А. В. Касп-сингулярность траектории блоховского вектора кубита во внешнем периодическом световом поле / А. В. Ефимова // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 1. – С. 62–68.

**A. V. Efimova**

*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

**CUSP-SINGULARITY OF THE TRAJECTORY OF THE QUBIT'S BLOCH VECTOR  
UNDER AN EXTERNAL PERIODIC LIGHT FIELD**

**Abstract.** The quantum dynamics of a two-level quantum-mechanical system subjected to the external monochromatic action beyond the rotating wave approximation was investigated. It was shown that under the condition of exact resonance on the trajectories of the Bloch vectors, special points are manifested under different initial conditions. These points are classified as cusps singularities. It is revealed that at such points, the instantaneous rotation axis, relative to which the Bloch vector rotates, reverses its direction. There is a movement stop. For a nonzero frequency detuning, the cusp singularities vanish. A numerical analysis of the singularities of the trajectories of the Bloch vector without rotating wave approximation was supplemented by a study based on the use of the Floquet methods. Within the framework of this approach, recurrence relations for the spectral components of the probability amplitudes were obtained and analyzed. An analytic expression was found for the two values of quasi-energies within a fourth order of magnitude in the interaction energy. It was shown that to obtain a singular behavior of the trajectories of the Bloch vector, it is sufficient to confine by four spectral harmonics in the Floquet expansion. The results obtained are important for achieving the accuracy when performing coherent transformations with two-level systems in the cases where the rotating wave approximation is inapplicable.

**Keywords:** qubit, rotating wave approximation, Bloch vector, off-tuning from resonance, Floquet and continued-fraction methods, evolution matrix, dipole transition operator

**For citation.** Efimova A. V. Casp-singularity of the trajectory of the qubit's Bloch vector under an external periodic light field. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 62–68 (in Russian).

Для описания когерентной динамики двухуровневой системы (кубита) более 70 лет назад введена модель Раби [1]. Она широко используется при рассмотрении кубитов различной природы, включая одиночные атомы и ионы в ловушках, переходы Джозефсона, сверхпроводящие кубиты и др. [1]. Одна из простейших распространенных моделей в квантовой физике – одномодовая спин-бозонная модель, состоящая из двухуровневой системы, связанной с квантовым гармоническим осциллятором. В квантовой оптике она описывает атом, взаимодействующий с модой электромагнитного поля [2]. В случае классического описания поля эта система сводится к модели Раби. Для рассмотрения динамики взаимодействия кубита с полем широко применяется приближение вращающейся волны (ПВВ) [2, 3], которое основано на пренебрежении быстро осциллирующими членами в гамильтониане взаимодействия [4]. В настоящей работе рассмотрены особенности траекторий на сфере Блоха, к которым приводит отказ от приближения вращающейся волны [5–7] в зависимости от резонансной расстройки и величины взаимодействия. Анализ проводится численно и с использованием методов Флоке и непрерывных дробей [8, 9]. Показано, что недавно предсказанные сингулярности траекторий блоховского вектора [7] для случая точного резонанса исчезают при наличии частотной расстройки.

Двухуровневая квантово-механическая система с вектором состояния  $|\psi(t)\rangle = C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle$  и гамильтонианом взаимодействия  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ , где  $\hat{H}_0 = \hbar\omega_0 |1\rangle\langle 1|$  и  $\hat{V}(t) = \nu_{12}(t)|1\rangle\langle 2| + \nu_{21}(t)|2\rangle\langle 1|$ ,  $\nu_{12}(t) = \nu_{12} \cos(\omega t)$ ,  $\nu_{12}^* = \nu_{21}$ , описывается временным уравнением Шредингера для амплитуд вероятностей [10, 11]:

$$\begin{aligned} \dot{C}_1(\tau) &= -i\beta \cos(\alpha\tau) C_2(\tau), \\ \dot{C}_2(\tau) &= -i\beta \cos(\alpha\tau) C_1(\tau) - iC_2(\tau), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\alpha$  – отношение частоты внешнего поля к частоте перехода ( $\alpha = \omega/\omega_0$ ), безразмерный параметр взаимодействия  $\beta$  есть отношение энергии возмущения  $\nu_{12}$  к собственной энергии системы ( $\beta = \nu_{12}/\hbar\omega_0$ ) и  $\tau = \omega_0 t$  – безразмерное время.

Для наглядного представления квантовой динамики используются компоненты вектора Блоха в системе отсчета, вращающейся с частотой поля вокруг оси  $Z$ ,

$$x = \text{Re}(C_1(\tau)^* C_2(\tau) e^{i\alpha\tau}), \quad y = \text{Im}(C_1(\tau)^* C_2(\tau) e^{i\alpha\tau}), \quad z = (|C_2(\tau)|^2 - |C_1(\tau)|^2)/2. \quad (2)$$

Согласно уравнениям движения для компонент вектора Блоха  $\mathbf{R} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$  ( $\mathbf{e}_i$  – орты декартовой системы координат),

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -z\beta \sin(2\alpha\tau) + y(1-\alpha), \\ \dot{y} &= z\beta[1 + \cos(2\alpha\tau)] - x(1-\alpha), \\ \dot{z} &= x\beta \sin(2\alpha\tau) - y\beta[1 + \cos(2\alpha\tau)], \end{aligned} \quad (3)$$

вектор  $\mathbf{R}$  вращается вокруг мгновенной оси (рис. 1):

$$N_{\mathbf{R}}(\tau) = \frac{1}{\Omega(\tau)} \{ \beta[1 + \cos(2\alpha\tau)]\mathbf{e}_x + \beta \sin(2\alpha\tau)\mathbf{e}_y + (1-\alpha)\mathbf{e}_z \}, \quad (4)$$

с угловой скоростью вращения  $\Omega(\tau)$ , изменяющейся во времени как

$$\Omega(\tau) = \sqrt{2\beta^2[1 + \cos(2\alpha\tau)] + (1-\alpha)^2}. \quad (5)$$

Согласно соотношениям (3)–(5) в моменты времени  $\tau_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) при точном резонансе ( $\alpha = 1$ ) мгновенная ось вращения изменяет свой знак (точки остановки), в результате

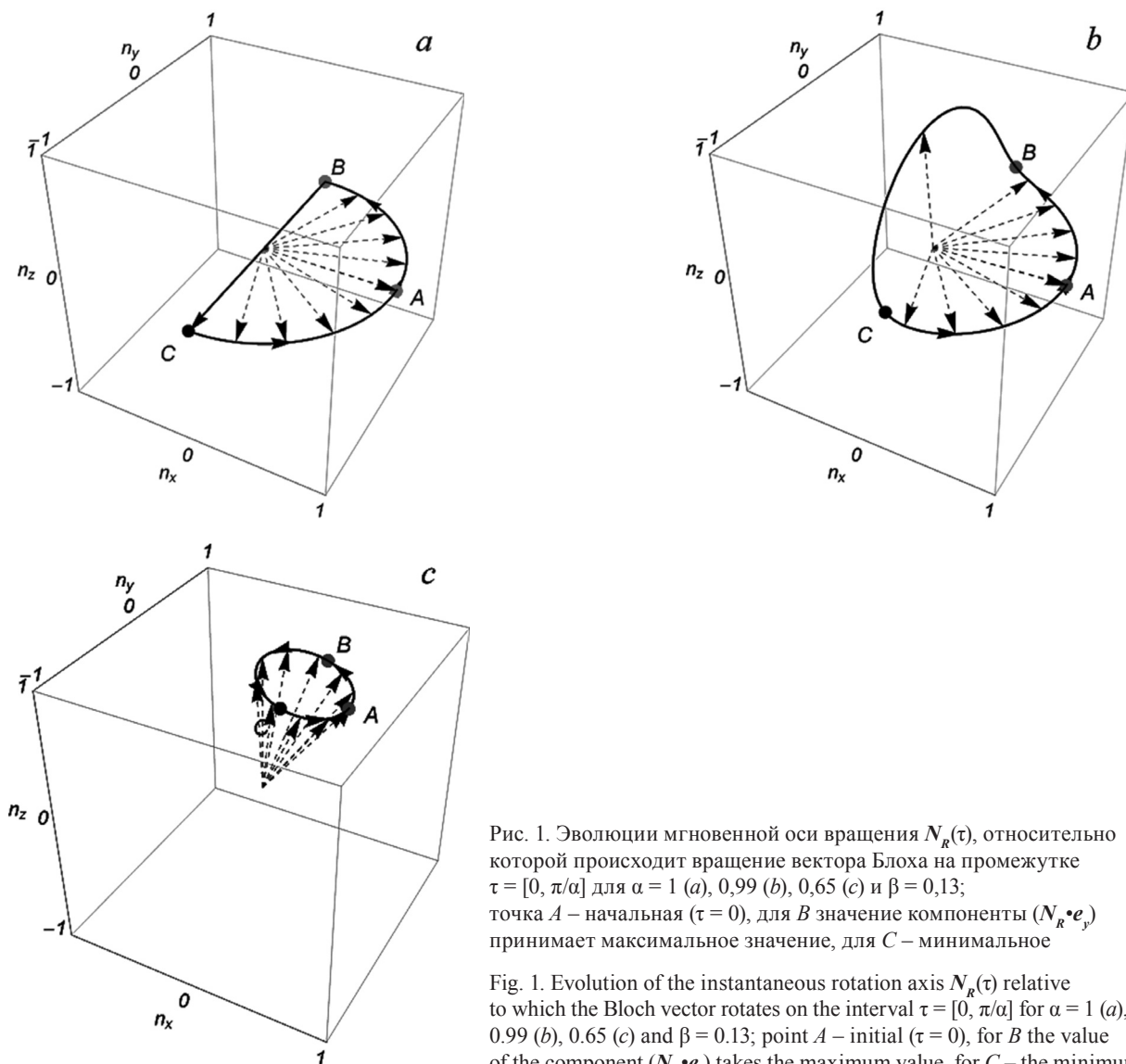


Рис. 1. Эволюции мгновенной оси вращения  $N_R(\tau)$ , относительно которой происходит вращение вектора Блоха на промежутке  $\tau = [0, \pi/\alpha]$  для  $\alpha = 1$  (a), 0,99 (b), 0,65 (c) и  $\beta = 0,13$ ; точка A – начальная ( $\tau = 0$ ), для B значение компоненты  $(N_R \cdot e_y)$  принимает максимальное значение, для C – минимальное

Fig. 1. Evolution of the instantaneous rotation axis  $N_R(\tau)$  relative to which the Bloch vector rotates on the interval  $\tau = [0, \pi/\alpha]$  for  $\alpha = 1$  (a), 0,99 (b), 0,65 (c) and  $\beta = 0,13$ ; point A – initial ( $\tau = 0$ ), for B the value of the component  $(N_R \cdot e_y)$  takes the maximum value, for C – the minimum

чего на траектории появляются сингулярные точки – касп-сингулярности (рис. 2, a) [7, 12]. Однако наличие частотной расстройки ( $\alpha \neq 1$ ) приводит к исчезновению таких сингулярностей (рис. 2, b–d): исчезают точки остановки.

Так как гамильтониан рассматриваемой системы является периодической функцией, то для решения уравнений (1) применима теорема Флоке [8, 9], согласно которой решение можно искать в виде

$$C_{j\mu}(\tau) = e^{i\mu\tau} \varphi_{j\mu}(\tau), \quad (j = 1, 2), \tag{6}$$

где  $\mu$  – так называемые квазиэнергии [13, 14], которые совместно с частотами гармоник определяют частоты спектральных линий излучаемого света, а  $\varphi_{j\mu}(\tau)$  – периодические функции с периодом  $2\pi/\alpha$ :

$$\varphi_{j\mu}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{j,n}(\mu) e^{in\alpha\tau}. \tag{7}$$

Подставляя (6) в (1), получаем рекуррентные соотношения для спектральных компонент  $c_{1,n}(\mu)$  и  $c_{2,n}(\mu)$ , которые в случае точного резонанса ( $\alpha = 1$ ) имеют вид

$$c_{1,n} = -\beta(c_{2,n-1} + c_{2,n+1})/2(n + \mu), \tag{8a}$$

$$c_{2,n} = -[\beta(c_{1,n-1} + c_{1,n+1}) + 2c_{2,n}]/2(n + \mu). \tag{8б}$$

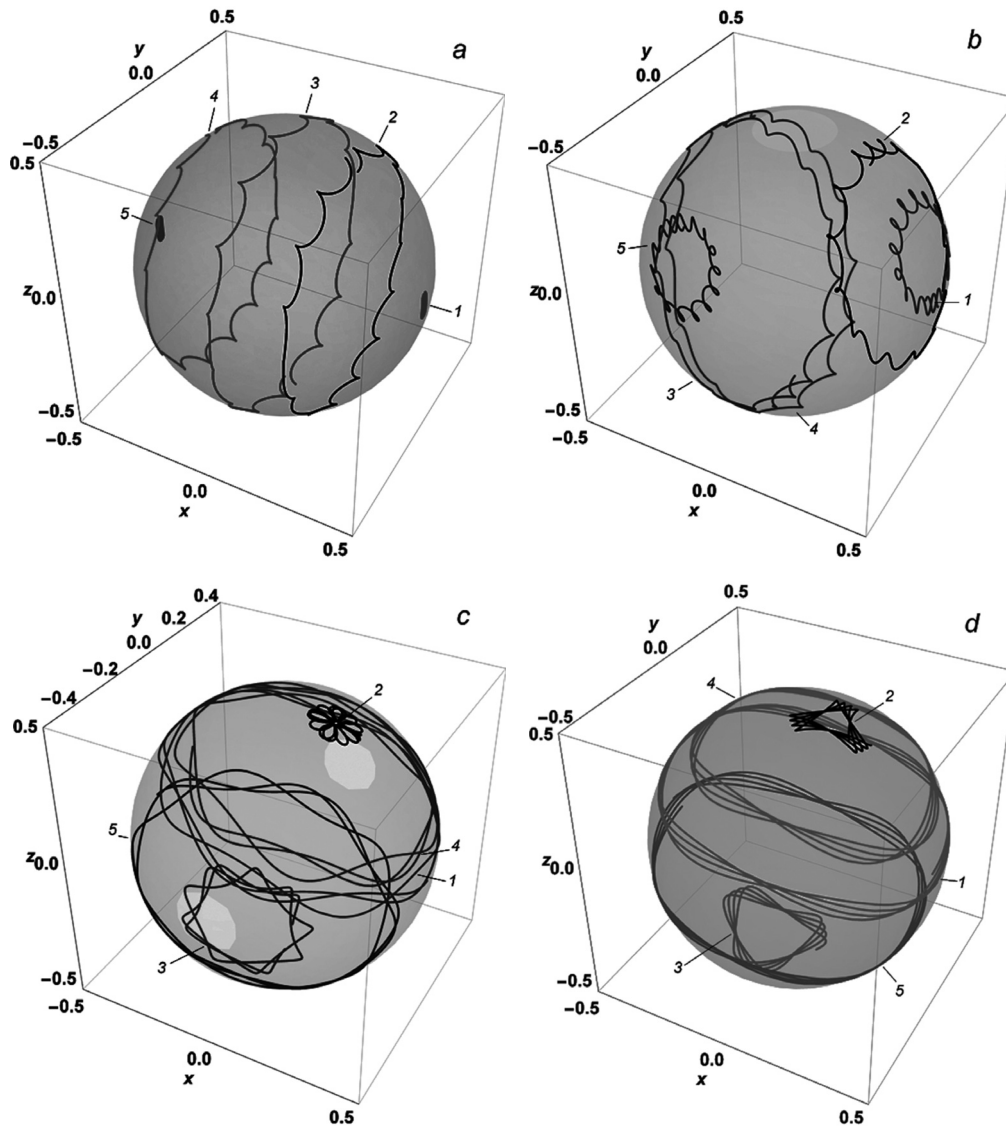


Рис. 2. Эволюция векторов Блоха  $(x,y,z)$  без приближения вращающейся волны [15] со значениями  $\alpha$ : 1 (a), 0,95 (b), 0,65 (c), 0,5 (d) и при значении параметра взаимодействия  $\beta$ , равного 0,13, на временных промежутках  $[0; 48,31]$  с начальными условиями

$$C_1(0)=1/\sqrt{2}, C_2(0)=1/\sqrt{2} (1); C_1(0)=0,26, C_2(0)=0,97 (2); C_1(0)=1, C_2(0)=0 (3);$$

$$C_1(0)=0,26, C_2(0)=-0,97 (4); C_1(0)=-1/\sqrt{2}, C_2(0)=1/\sqrt{2} (5)$$

Fig. 2. Evolution of the Bloch vectors  $(x,y,z)$  without rotating wave approximation [15] with the values of  $\alpha$ : 1 (a), 0,95 (b), 0,65 (c), 0,5 (d) and with the value of the interaction parameter  $\beta$ , equal to 0,13, on time intervals  $[0, 48.31]$  with the initial conditions

$$C_1(0)=1/\sqrt{2}, C_2(0)=1/\sqrt{2} (1); C_1(0)=0.26, C_2(0)=0.97 (2); C_1(0)=1, C_2(0)=0 (3);$$

$$C_1(0)=0.26, C_2(0)=-0.97 (4); C_1(0)=-1/\sqrt{2}, C_2(0)=1/\sqrt{2} (5)$$

Соотношения (8) сводятся к трехчленному рекуррентному соотношению для компоненты  $c_{2,n}$ :

$$\eta_{\mu+n}(\beta^2)c_{2,n} = -\beta^2(c_{2,n-2} + v_{\mu+n}c_{2,n+2}), \quad (9)$$

демонстрирующему, что из всех коэффициентов  $c_{2,n}$  ряда Фурье (7) можно оставить только четные коэффициенты  $c_{2,\pm 2p}$  ( $p = 0, 1, 2 \dots$ ). В соотношении (9) введены обозначения:

$$\eta_{\mu}(\beta^2) = \xi_{\mu}\beta^2 + \eta_{\mu}(0), \quad \xi_{\mu} = 2\mu/(\mu + 1), \quad \eta_{\mu}(0) = -4(\mu^2 - 1), \quad (10)$$

$$v_{\mu} = (\mu - 1)/(\mu + 1). \quad (11)$$

Отношение двух соседних компонент  $c_{2,n+2}$  и  $c_{2,n}$  ( $X_n = c_{2,n+2}/c_{2,n}$ ) удовлетворяет убывающему

$$X_n = -\beta^2 / (\eta_{\mu+n+2} + v_{\mu+n+2}\beta^2 X_{n+2}) \quad (12)$$

и возрастающему

$$X_n = -(\beta^2 v_{\mu+n})^{-1} (\eta_{\mu+n} + \beta^2 / X_{n-2}) \quad (13)$$

рекуррентным соотношениям, которые эквивалентны друг другу и которые можно представить в виде следующих непрерывных дробей:

$$X_n = -\frac{\beta^2}{\eta_{\mu+n+2} - \frac{v_{\mu+n+2}\beta^4}{\eta_{\mu+n+4} - \frac{v_{\mu+n+4}\beta^4}{\eta_{\mu+n+6} - \dots}}}, \quad (14)$$

$$X_n = -\frac{1}{v_{\mu+n}\beta^2} \left[ \eta_{\mu+n} - \frac{v_{\mu+n-2}\beta^4}{\eta_{\mu+n-2} - \frac{v_{\mu+n-4}\beta^4}{\eta_{\mu+n-4} - \frac{v_{\mu+n-6}\beta^4}{\eta_{\mu+n-6} - \dots}} \right]. \quad (15)$$

Значения центрального элемента  $X_0$ , полученные из убывающих и возрастающих непрерывных дробей (14), (15), должны совпадать. Обрывая дроби на некоторых членах и приравнивая получающиеся при этом два значения центрального элемента, приходим к уравнению для нахождения квазиэнергий. Так, при учете только второго порядка в непрерывных дробях (14), (15), получается следующее уравнение для квазиэнергий:

$$v_{\mu}\beta^4 = \left( \eta_{\mu+2} - \frac{v_{\mu+2}\beta^4}{\eta_{\mu+4}} \right) \left( \eta_{\mu} - \frac{v_{\mu-2}\beta^4}{\eta_{\mu-2}} \right). \quad (16)$$

Учитывая малость значения параметра  $\beta$ , уравнение (16) с точностью до членов порядка  $\beta^4$  принимает вид

$$\begin{aligned} & \eta_{\mu+4}(0)\eta_{\mu+2}(0)\eta_{\mu}(0)\eta_{\mu-2}(0) + \beta^2 [\xi_{\mu+4}\eta_{\mu+2}(0)\eta_{\mu}(0)\eta_{\mu-2}(0) + \\ & + \eta_{\mu+4}(0)\xi_{\mu+2}\eta_{\mu}(0)\eta_{\mu-2}(0) + \eta_{\mu+4}(0)\eta_{\mu+2}(0)\xi_{\mu}\eta_{\mu-2}(0) + \eta_{\mu+4}(0)\eta_{\mu+2}(0)\eta_{\mu}(0)\xi_{\mu-2}] + \\ & + \beta^4 [\xi_{\mu+4}\xi_{\mu+2}\eta_{\mu}(0)\eta_{\mu-2}(0) + \xi_{\mu+4}\eta_{\mu+2}(0)\xi_{\mu}\eta_{\mu-2}(0) + \xi_{\mu+4}\eta_{\mu+2}(0)\eta_{\mu}(0)\xi_{\mu-2} + \\ & + \eta_{\mu+4}(0)\xi_{\mu+2}\xi_{\mu}\eta_{\mu-2}(0) + \eta_{\mu+4}(0)\xi_{\mu+2}\eta_{\mu}(0)\xi_{\mu-2} + \eta_{\mu+4}(0)\eta_{\mu+2}(0)\xi_{\mu}\xi_{\mu-2} - \\ & - \eta_{\mu+2}(0)\eta_{\mu+4}(0)v_{\mu-2} - v_{\mu+2}\eta_{\mu}(0)\eta_{\mu-2}(0) - v_{\mu}\eta_{\mu+4}(0)\eta_{\mu-2}(0)] = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Решение последнего уравнения с выбранной точностью дает следующие корни:

$$\begin{aligned} \mu &= m + \mu_{+,-}, \quad (m = -3, -1, 1), \\ \mu_{+,-} &= \pm \beta / 2 (1 + \beta^2 / 128) + \beta^2 / 16. \end{aligned} \quad (18)$$

Для уточнения найденных значений квазиэнергий можно воспользоваться численным решением рассмотренного выше алгоритма. Увеличение количества членов, оставляемых в непрерывных дробях, приводит к увеличению количества корней (18) без изменения их структуры.

Найденные значения  $\mu$  и соответствующие  $c_{j,n}(\mu)$ , подставленные в (6), (7), дают решения уравнений (1). Выбирая из них два линейно независимых, можно получить общее решение (1), удовлетворяющее начальным условиям для  $C_1(0)$  и  $C_2(0)$ ,

$$C_j(\tau) = A_1 C_{j\mu_1}(\tau) + A_2 C_{j\mu_2}(\tau). \quad (19)$$

В качестве линейно независимых выбираются решения, соответствующие корням  $\mu_{1,2} = -1 + \mu_{+,-}$  в (18).

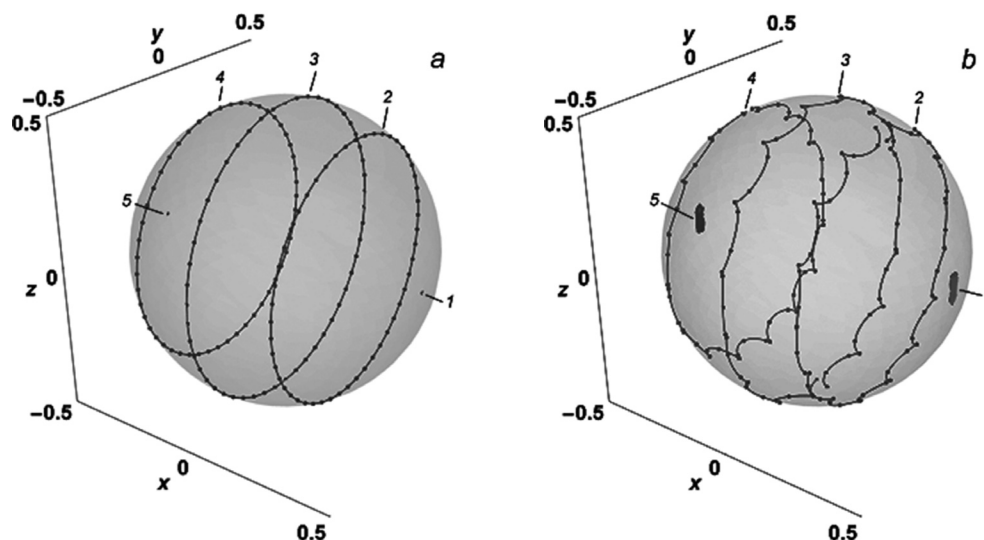


Рис. 3. Сравнение эволюции вектора Блоха на основе методов Флоке (гладкие линии) и при численном расчете (точки) с различными начальными условиями:

$$C_1(0) = 1/\sqrt{2}, C_2(0) = 1/\sqrt{2} \text{ (1)}; C_1(0) = 0,26, C_2(0) = 0,97 \text{ (2)}; C_1(0) = 1, C_2(0) = 0 \text{ (3)};$$

$$C_1(0) = 0,26, C_2(0) = -0,97 \text{ (4)}; C_1(0) = -1/\sqrt{2}, C_2(0) = 1/\sqrt{2} \text{ (5)}$$

при значениях параметра взаимодействия  $\beta$ , равного 0,001 ( $\mu_+ = 0,000500063$  и  $\mu_- = -0,000499938$ ) (a) и 0,13 ( $\mu_+ = 0,0660648$  и  $\mu_- = -0,0639523$ ) (b)

Fig. 3. Comparison of the Bloch vector evolution on the basis of the Floquet methods (smooth lines) and in numerical calculations (points), at different initial conditions

$$C_1(0) = 1/\sqrt{2}, C_2(0) = 1/\sqrt{2} \text{ (1)}; C_1(0) = 0,26, C_2(0) = 0,97 \text{ (2)}; C_1(0) = 1, C_2(0) = 0 \text{ (3)};$$

$$C_1(0) = 0,26, C_2(0) = -0,97 \text{ (4)}; C_1(0) = -1/\sqrt{2}, C_2(0) = 1/\sqrt{2} \text{ (5)}$$

at the values of the interaction parameter  $\beta$  equal to 0,001 ( $\mu_+ = 0,000500063$  and  $\mu_- = -0,000499938$ ) (a) and 0,13 ( $\mu_+ = 0,0660648$  and  $\mu_- = -0,0639523$ ) (b)

В качестве примера, демонстрирующего точность метода Флоке для описания явления касп-сингулярности траекторий блоховского вектора, на рис. 3 приведено сопоставление траекторий, полученных разными методами. Причем для описания хорошей точности достаточно ограничиться только тремя и четырьмя гармониками в разложении Флоке:  $\{c_{2,-2}; c_{2,0}; c_{2,2}\}$  для  $C_{2\mu}(\tau)$  и  $\{c_{1,-3}; c_{1,-1}; c_{1,1}; c_{1,3}\}$  для  $C_{1\mu}(\tau)$ . Рис. 3 демонстрирует, что использование методов Флоке обеспечивает достаточную точность для описания явления касп-сингулярности [12] траекторий блоховского вектора.

В заключение в настоящей работе проведено исследование возникновения касп-сингулярностей на траекториях векторов Блоха кубита во внешнем периодическом возмущении – эффекта, имеющего значение для методов управления состояниями квантовых систем, в смысле достижения точности получаемых состояний, например при использовании  $\frac{\pi}{2}$ - и  $\pi$ -импульсов. Выявлено, что при применении методов Флоке достаточно ограничиться четырьмя гармониками для получения удовлетворительного согласия с численным расчетом особенностей траекторий. Происходит исчезновение касп-сингулярностей при увеличении частотной расстройки от резонанса.

### Список использованных источников

1. Braak, D. Integrability of the Rabi model / D. Braak // Phys. Rev. Lett. – 2011. – Vol. 107, № 10. – P. 100401-1–100401-4.
2. Irish, E. K. Generalized rotating-wave approximation for arbitrarily large coupling / E. K. Irish // Phys. Rev. Lett. – 2007. – Vol. 99, № 17. – P. 173601-1–173601-4.
3. Аллен, Л. Оптический резонанс и двухуровневые атомы / Л. Аллен, Дж. Эберли; пер. Т. М. Ильиной, М. С. Стрижевской. – М.: Мир, 1978. – 224 с.
4. Могилевцев, Д. С. Методы квантовой оптики структурированных резервуаров / Д. С. Могилевцев, С. Я. Клилин. – Минск: Беларуская акадэмія навукаў, 2007. – 174 с.
5. Abdel-Aty, M. Dynamics of Bloch vectors and channel capacity of two non-identical charge qubits / M. Abdel-Aty, N. Metwally, A.-S. F. Obama // Phys. Lett. A. – 2009. – Vol. 373, № 10. – P. 927–933.

6. Dandoloff, R. Geometry of entangled states, Bloch spheres and Hopf fibrations / R. Dandoloff, R. Mosseri // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 2001. – Vol. 34, № 47. – P. 10243–10252.
7. Benenti, G. Nonperturbative interpretation of the Bloch vector's path beyond the rotating-wave approximation / G. Benenti, S. Siccardi, G. Strini // *Phys. Rev. A.* – 2013. – Vol. 88. – P. 033814-1–033841-8.
8. Мэтьюз, Дж. Математические методы физики / Дж. Мэтьюз, Р. Уокер. – М.: Атомиздат, 1972. – 398 с.
9. Hänggi P. Driven quantum systems / P. Hänggi // *Quantum Transport and Dissipation* / T. Dittrich [et al.]. – New York: WILEY-VCH, 1999. – P. 249–286.
10. Давыдов, А. С. Квантовая механика / А. С. Давыдов. – 3-е изд., стер. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 703 с.
11. Скалли, М. О. Квантовая оптика: пер. с англ. / М. О. Скалли, М. С. Зубайри; под ред. В. В. Самарцева. – М.: Физматлит, 2003. – 512 с.
12. Ефимова, А. В. Сингулярность траекторий блоховского вектора без использования приближения вращающейся волны / А. В. Ефимова // *Современные проблемы физики: междунар. шк.-конф. молодых ученых и специалистов, Минск, 8–10 июня 2016 г.* / Нац. акад. наук Беларуси, Ин-т физики им. Б. И. Степанова; редкол.: В. В. Машко [и др.]. – Минск, 2016. – С. 41–45.
13. Зельдович, Я. Б. Квазиэнергия квантовой системы, подвергающейся периодическому воздействию / Я. Б. Зельдович // *Журн. эксперим. и теорет. физики.* – 1966. – Т. 51, вып. 5. – С. 1492–1495.
14. Ритус, В. И. Сдвиг и расщепление атомных уровней полем электромагнитной волны / В. И. Ритус // *Журн. эксперим. и теорет. физики.* – 1966. – Т. 51, вып. 5. – С. 1544–1549.
15. Feranchuk, I. D. Two-level system in a one-mode quantum field: numerical solution on the basis of the operator method / I. D. Feranchuk, L. I. Komarov, A. P. Ulyanekov // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 1996. – Vol. 29, № 14 – P. 4035–4047.

### References

1. Braak D. Integrability of the Rabi model. *Physical Review Letters*, 2011, vol. 107, no. 10, pp. 100401-1–100401-4. Doi: 10.1103/physrevlett.107.100401
2. Irish E. K. Generalized rotating-wave approximation for arbitrarily large coupling. *Physical Review Letters*, 2007, vol. 99, no. 17, pp. 173601-1–173601-4. Doi: 10.1103/physrevlett.99.173601
3. Allen L., Eberly J. *Optical resonance and two-level atoms*. John Wiley and Sons LTD, 1975. 233 p.
4. Mogilevtsev D. S., Kilin S. Ya. *Quantum optics methods for structured reservoirs*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2007. 174 p. (in Russian).
5. Abdel-Aty M., Metwally N., Obama A.-S. F. Dynamics of Bloch vectors and channel capacity of two non-identical charge qubits. *Physics Letters A*, 2009, vol. 373, no. 10, pp. 927–933. Doi: 10.1016/j.physleta.2009.01.017
6. Dandoloff R., Mosseri R. Geometry of entangled states, Bloch spheres and Hopf fibrations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2001, vol. 34, no. 47, pp. 10243–10252. Doi: 10.1088/0305-4470/34/47/324
7. Benenti G., Siccardi S., Strini G. Nonperturbative interpretation of the Bloch vector's path beyond the rotating-wave approximation. *Physical Review A*, 2013, vol. 88, pp. 033814-1–033841-8. Doi: 10.1103/physreva.88.033814
8. Mathews J., Walker R. *Mathematical Methods of Physics*. New York, Benjamin, 1964. 475 p.
9. Dittrich T., Hänggi P., Ingold G.-L., Kramer B., Schoen G., Zwirger W. *Quantum Transport and Dissipation. Chapter 5. Driven quantum systems*. New York, WILEY-VCH, 1999, pp. 249–286.
10. Davydov A. S. *Quantum mechanics*. 3rd ed. Saint Petersburg: BKhV-Peterburg Publ., 2011. 703 p. (in Russian).
11. Scully M. O., Zubairy M. S. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997. 630 p. Doi: 10.1017/CBO9780511813993
12. Efimova A. V. Singularity of Bloch vector's paths without using the rotating wave approximation. *Sovremennye problemy fiziki: Mezhdunarodnaya shkola-konferentsiya molodykh uchenykh i spetsialistov. Minsk, 8–10 iyunya 2016 g.* [Modern problems of physics, international school-conf. of young scientists and specialists, Minsk, 8–10 June 2016]. Minsk, 2016, pp. 41–45 (in Russian).
13. Zel'dovich Ya. B. The quasienergy of an quantum-mechanical system subjected to a periodic action. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1967, vol. 24, no. 5, pp. 1006–1008.
14. Ritus V. I. Shift and splitting of atomic energy levels by the field of an electromagnetic wave. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1967, vol. 24, no. 5, pp. 1041–1044.
15. Feranchuk I. D., Komarov L. I., Ulyanekov A. P. Two-level system in a one-mode quantum field: numerical solution on the basis of the operator method. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1996, vol. 29, no. 14, pp. 4035–4047. Doi: 10.1088/0305-4470/29/14/026

### Информация об авторе

**Ефимова Александра Валерьевна** – научный сотрудник Центра «Квантовая оптика и квантовая информатика», Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: efimovaalexandra@yandex.ru

### Information about the author

**Alexandra V. Efimova** – Researcher of the Centre “Quantum Optics and Quantum Information”, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: efimovaalexandra@yandex.ru