УДК 517.925.42,517.925.7

В. В. АМЕЛЬКИН, М. Н. ВАСИЛЕВИЧ

ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДОМ ВКБ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ЗАДАЧЕ РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,
e-mail: vamlkn@mail.ru, vasilevich.m@gmail.com

В настоящей статье методом ВКБ строится такое решение системы трех дифференциальных уравнений, возникающей в задаче Римана – Гильберта, компоненты которого удовлетворяют определенным соотношениям.

Ключевые слова: дифференциальная система, задача Римана – Гильберта, метод ВКБ.

V. V. AMEL'KIN, M. N. VASILEVICH

JWKB-METHOD AND CONSTRUCTION OF A DIFFERENTIAL SYSTEM EMERGING IN THE RIEMANN – HILBERT PROBLEM

Belarusian State University, Minsk, Belarus, e-mail: vamlkn@mail.ru, vasilevich.m@gmail.com

In this paper, we construct by means of JWKB-method a solution of the differential system emerging in the Riemann – Hilbert problem, with components satisfying the defined relations.

Keywords: differential system, Riemann – Hilbert problem, JWKB-method.

В статье [1] при построении системы Фукса второго порядка с четырьмя особыми точками и неприводимыми матрицами-вычетами было отмечено, что реализация приведенного в [1] алгоритма решения соответствующей задачи Римана – Гильберта полностью определяется его первым пунктом, заключающимся в решении системы трех дифференциальных уравнений (с сохранением принятых в [1] обозначений)

$$\frac{d\Delta_{12}}{dz} = -\frac{\Delta_{13}\Delta_{23}}{z}, \quad \frac{d\Delta_{13}}{dz} = \frac{\Delta_{12}\Delta_{23}}{z-1}, \quad \frac{d\Delta_{23}}{dz} = -\frac{\Delta_{12}\Delta_{13}}{z(z-1)}. \tag{1}$$

Система (1) возникает и в статье [2] при изучении трехволнового резонансного взаимодействия в (2+1) измерениях. В указанной статье показывается, что систему (1) можно свести к дифференциальному уравнению второго порядка второй степени, между решениями которого и решениями шестого уравнения Пенлеве существует взаимно однозначное соответствие.

Но вопрос о нахождении решений системы (1), как в [1], так и в [2], не рассматривался.

В настоящей статье показывается, как система (1) может быть решена на основе ВКБ-метода.

Так, обозначая

$$\Delta_{12} = -i\xi\Delta_1, \quad \Delta_{13} = -i\xi\Delta_2, \quad \Delta_{23} = -i\xi\Delta_3, \tag{2}$$

где $i = \sqrt{-1}$, ξ – константа, которую можно считать равной 1, перепишем систему (1) в виде

$$\frac{d\Delta_1}{dz} = i\frac{\xi}{z}\Delta_2\Delta_3, \quad \frac{d\Delta_2}{dz} = -i\frac{\xi}{z-1}\Delta_1\Delta_3, \quad \frac{d\Delta_3}{dz} = i\frac{\xi}{z(z-1)}\Delta_1\Delta_2. \tag{3}$$

Как показано в [3, с. 49–50], для точек сферы

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = 1, \tag{4}$$

являющейся частным интегралом системы (3), справедливо равенство

$$z(1 - \Delta_3) = \Delta_1 + i\Delta_2. \tag{5}$$

А в таком случае из соотношений (4) и (5) легко выводятся равенства

$$b\Delta_1 - ic\Delta_2 = 2, \quad 2\Delta_1 + c\Delta_3 = b, \quad 2i\Delta_2 + b\Delta_3 = c, \tag{6}$$

где

$$b = z + \frac{1}{z}, \quad c = z - \frac{1}{z},$$

которые означают, что систему (3) можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered}
\frac{d\Delta_1}{dz} = \frac{\xi z}{(z^2-1)^2}\left(-2b\Delta_1^2 + (b^2+4)\Delta_1 - 2b\right), \\
\frac{d\Delta_2}{dz} = -\frac{i\xi z^2}{(z-1)(z^2+1)^2}\left(2c\Delta_2^2 + i(c^2-4)\Delta_2 + 2c\right), \\
\frac{d\Delta_3}{dz} = \frac{\xi}{4z(z-1)}\left(bc\Delta_3^2 - (b^2+c^2)\Delta_3 + bc\right).
\end{gathered} \tag{7}$$

Каждое из уравнений системы (7) является уравнением Риккати, приводящимся к некоторому векторному линейному однородному дифференциальному уравнению первого порядка.

Рассуждения здесь следующие. Обозначим

$$\begin{gathered}
f_1 = -\frac{2\xi bz}{(z^2-1)^2} = -\frac{2\xi(z^2+1)}{(z^2-1)^2}, \quad g_1 = \frac{\xi(b^2+4)z}{(z^2-1)^2} = \frac{\xi(z^4+6z^2+1)}{z(z^2-1)^2}, \\
f_2 = -\frac{2i\xi cz^2}{(z-1)(z^2+1)^2} = -\frac{2i\xi z(z+1)}{(z^2+1)^2}, \quad g_2 = \frac{\xi(c^2-4)z^2}{(z-1)(z^2+1)^2} = \frac{\xi(z^4-6z^2+1)}{(z-1)(z^2+1)^2}, \\
f_3 = \frac{\xi bc}{4z(z-1)} = \frac{\xi(z+1)(z^2+1)}{4z^3}, \quad g_3 = -\frac{\xi(b^2+c^2)}{4z(z-1)} = -\frac{\xi(z^4+1)}{2z^3(z-1)},
\end{gathered}$$

тогда систему (7) можно переписать в виде

$$\Delta_r' = f_r\Delta_r^2 + g_r\Delta_r + f_r, \quad r = \overline{1,3}, \quad ' = \frac{d}{dz}.$$

Полагая в полученной системе уравнений Риккати последовательно

$$\Delta_r = \frac{\overline{\Delta}_r}{f_r}, \quad \overline{\Delta}_r = u_r - \frac{1}{2}\left(\frac{f_r'}{f_r} + g_r\right), \quad u_r = -\frac{v_r'}{v_r}, \tag{8}$$

придем к системе

$$v_r'' + \varphi_r(z)v_r = 0, \quad r = \overline{1,3}, \quad '' = \frac{d^2}{dz^2}, \tag{9}$$

где

$$\varphi_r(z) = f_r^2 + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{f_r'}{f_r}\right)' + g_r'\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{f_r'}{f_r} + g_r\right)^2,$$

или к системе

$$v_r'' + \big(1 + h_r(z)\big)v_r = 0, \quad r = \overline{1, 3}, \tag{10}$$

где $h_r(z) = \varphi_r(z) - 1$.

Следуя теперь [4, с. 27], будем искать v_r в виде

$$v_r = a_r^1(z)e^{iz} + a_r^2(z)e^{-iz}, \quad r = \overline{1, 3}.$$

Тогда при каждом фиксированном r уравнение (10) можно заменить [4, с. 28] системой двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{da_r^1}{dz} = \frac{1}{2}ih_r(z)\Big(a_r^1(z) + a_r^2(z)e^{-2iz}\Big),$$
$$\frac{da_r^2}{dz} = -\frac{1}{2}ih_r(z)\Big(a_r^2(z) + a_r^1(z)e^{2iz}\Big),$$

которую, вводя вектор-столбец

$$a_r = \begin{pmatrix} a_r^1(z) \\ a_r^2(z) \end{pmatrix}$$

и нильпотентную матрицу

$$M_r(z) = \frac{1}{2}ih_r(z)\begin{pmatrix} 1 & e^{-2iz} \\ -e^{2iz} & -1 \end{pmatrix},$$

можем записать в векторной форме

$$\frac{da_r}{dz} = M_r(z)a_r.$$

Это дифференциальное уравнение можно заменить интегральным уравнением

$$a_r(z) = a_r(z_0) + \int_{z_0}^{z} M_r(z_1)a_r(z_1)dz_1,$$

общее решение которого можно получить методом итераций [4, с. 29–33]. Оно имеет вид

$$a_r(z) = F_r(z, z_0)a_r(z_0), \tag{11}$$

где элементы фундаментальной матрицы

$$F_r(z, z_0) = \begin{pmatrix} F_{11}^r(z, z_0) & F_{12}^r(z, z_0) \\ F_{21}^r(z, z_0) & F_{22}^r(z, z_0) \end{pmatrix}$$

представимы в виде рядов

$$F_{11}^r(z, z_0) = 1 + \frac{i}{2}\int_{z_0}^{z} h_r(z_1)dz_1 + \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int_{z_0}^{z} h_r(z_1)dz_1 \int_{z_0}^{z_1} h_r(z_2)\Big(1 - e^{-2i(z_1 - z_2)}\Big)dz_2 +$$

$$+\left(\frac{i}{2}\right)^3 \int_{z_0}^{z} h_r(z_1)dz_1 \int_{z_0}^{z_1} h_r(z_2)\Big(1 - e^{-2i(z_1 - z_2)}\Big)dz_2 \int_{z_0}^{z_2} h_r(z_3)\Big(1 - e^{-2i(z_2 - z_3)}\Big)dz_3 + \ldots,$$

$$F_{12}^r(z, z_0) = \frac{i}{2}\int_{z_0}^{z} h_r(z_1)e^{-2iz_1}dz_1 + \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int_{z_0}^{z} h_r(z_1)dz_1 \int_{z_0}^{z_1} h_r(z_2)\Big(1 - e^{-2i(z_1 - z_2)}\Big)e^{-2iz_2}dz_2 +$$

$$+\left(\frac{i}{2}\right)^3 \int_{z_0}^{z} h_r(z_1)dz_1 \int_{z_0}^{z_1} h_r(z_2)\left(1-e^{-2i(z_1-z_2)}\right)dz_2 \int_{z_0}^{z_2} h_r(z_3)\left(1-e^{-2i(z_2-z_3)}\right)e^{-2iz_3}dz_3 + \dots .$$

Элементы $F_{21}^r(z, z_0)$ и $F_{22}^r(z, z_0)$ получаются из выражений для $F_{12}^r(z, z_0)$ и $F_{11}^r(z, z_0)$ соответственно заменой i на $-i$.

В таком случае из (11) находим, что

$$a_r^1(z) = F_{11}^r a_r^1(z_0) + F_{12}^r a_r^2(z_0),$$
$$a_r^2(z) = F_{21}^r a_r^1(z_0) + F_{22}^r a_r^2(z_0),$$

и, значит, общее решение уравнения (10) представимо в виде

$$v_r = a_r^1(z_0)\left(F_{11}^r e^{iz} + F_{12}^r e^{-iz}\right) + a_r^2(z_0)\left(F_{12}^r e^{iz} + F_{22}^r e^{-iz}\right).$$

Обозначая теперь через $\overline{F}_r$ матрицу, полученную из матрицы F_r заменой функции $h_r(z)$ функцией $\varphi_r(z) = h_r(z) + 1,$ получим общее решение уравнения (9)

$$v_r = a_r^1(z_0)\left(\overline{F}_{11}^r e^{iz} + \overline{F}_{12}^r e^{-iz}\right) + a_r^2(z_0)\left(\overline{F}_{12}^r e^{iz} + \overline{F}_{22}^r e^{-iz}\right).$$

Тогда, следуя цепочке равенств (8) в обратном порядке, находим, что

$$\Delta_r = -\frac{\left(a_r^1(z_0)\left(\overline{F}_{11}^r e^{iz} + \overline{F}_{12}^r e^{-iz}\right) + a_r^2(z_0)\left(\overline{F}_{12}^r e^{iz} + \overline{F}_{22}^r e^{-iz}\right)\right)'}{f_r\left(a_r^1(z_0)\left(\overline{F}_{11}^r e^{iz} + \overline{F}_{12}^r e^{-iz}\right) + a_r^2(z_0)\left(\overline{F}_{12}^r e^{iz} + \overline{F}_{22}^r e^{-iz}\right)\right)} - \frac{1}{2f_r}\left(\frac{f_r'}{f_r} + g_r\right), \quad r = \overline{1,3}. \tag{12}$$

З а м е ч а н и е. В каждую из формул (12) входит в действительности одна произвольная постоянная $C_r = \dfrac{a_r^2(z_0)}{a_r^1(z_0)}$ $\left(\text{или } C_r = \dfrac{a_r^1(z_0)}{a_r^2(z_0)}\right).$

Результатом проведенных рассуждений является следующая

Т е о р е м а. *Общее решение системы* (1)*, компоненты которого удовлетворяют равенствам* (6)*, определяется соотношениями* (12), (2).

Исследование выполнено при поддержке проекта FP7-PEOPLE-2012-IRSES-316338.

Список использованной литературы

1. *Амелькин, В. В.* Построение системы Фукса второго порядка с четырьмя особыми точками и неприводимыми матрицами-вычетами / В. В. Амелькин, М. Н. Василевич // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2013. – № 4. – С. 107–116.

2. On Certain Symmetry Reduction Systems of the Three-Wave Resonant Interaction in (2+1) Dimensions / R. A. Leo [et al.] // Progr. Theor. Phys. – 1986. – Vol. 76, N 4. – P. 739–751.

3. *Маркушевич, А. И.* Теория аналитических функций / А. И. Маркушевич. – Л.; М.: Гостехтеоретиздат, 1950.

4. *Фрёман, Н.* ВКБ-приближение / Н. Фрёман, П. У. Фрёман. – М.: Мир, 1967.

Поступила в редакцию 14.05.2015