

УДК 517.987.4+519.6

Э. А. АЙРЯН¹, В. Б. МАЛЮТИН²

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

¹ Объединенный институт ядерных исследований (Дубна, Россия)

² Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 16.07.2013)

Введение. Один из классов функционалов, важных в функциональном интегрировании, это функциональные многочлены произвольной заданной степени. Одним из подходов к приближенному вычислению функциональных интегралов служит использование приближенных формул, являющихся точными на классе функциональных многочленов заданной степени [1–3]. Если значения интеграла от функциональных многочленов известны, то для приближенного вычисления интеграла можно использовать аппроксимацию исходного подинтегрального функционала функциональными многочленами. Подход с использованием функциональных многочленов применяется для разнообразных типов функциональных интегралов, обусловленных разнообразием пространств, мер и способом их задания. В данной статье рассматривается применение функциональных многочленов к приближенному вычислению матричнозначных функциональных интегралов, порожденных решениями уравнения Дирака. Такие функциональные интегралы широко используются в релятивистской теории, описывающей движение частицы в электромагнитном поле [4, 5].

В работе рассматривается вычисление матричнозначного функционального интеграла с помощью разложения функционала в ряд, члены которого имеют вид произведения линейных функционалов с возрастающей суммарной степенью. Исследуется сходимость этого ряда для некоторых функционалов.

Для некоторых типов функциональных интегралов, в частности для интегралов по гауссовым мерам, ряд из интегралов от произведения линейных функционалов с возрастающей суммарной степенью сходится для очень узкого класса функционалов. Для рассматриваемых матричнозначных интегралов в силу присущих им специфических свойств ряд из интегралов от произведения линейных функционалов сходится для широкого класса функционалов. Поэтому метод вычисления интегралов, основанный на разложении функционала в ряд, является эффективным в случае матричнозначных функциональных интегралов, порожденных решениями уравнения Дирака.

Рассматривается разложение при малых и больших значениях параметров, которые входят в интегрируемый функционал и переходную функцию, определяющую функциональный интеграл.

1. Аппроксимация интеграла и исследование сходимости. Следуя работам [4, 5], матричнозначный функциональный интеграл будем рассматривать на пространстве функций $x(\tau)$, $s \leq \tau \leq t$, удовлетворяющих условию $x(s) = 0$ и условию Липшица с порядком, равным единице, т. е. для любых $s \leq a < b \leq t$, $|x(b) - x(a)| \leq M |b - a|$. Интеграл определяется равенством

$$\int F(x(\cdot)) d\mu(x) = \lim_{\max_j \Delta t_j \rightarrow 0} \int_{R \dots R} (n) \int F \left(\sum_{j=1}^n x_j \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\cdot) \right) \prod_{j=n}^1 S(t_j - t_{j-1}, x_j - x_{j-1}) dx_1 \dots dx_n, \quad (1)$$

если этот предел существует для любого разбиения отрезка $[s, t]$ точками $s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$.

Здесь $x_j = x(t_j)$; $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$, $\chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau)$ – характеристическая функция интервала $[t_{j-1}, t_j]$; $S(t_j - t_{j-1}, x_j - x_{j-1})$ – переходная функция, являющаяся фундаментальным решением уравнения

$$\frac{\partial S(t, x)}{\partial t} = a\alpha \frac{\partial S(t, x)}{\partial x} + b\beta S(t, x), \quad (2)$$

где a, b – вещественные параметры, α, β – антикоммутирующие величины (операторы или матрицы), т. е. $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$. Мы также предполагаем, что $\alpha^2 = \beta^2 = E$, E – единичная матрица или оператор.

В данной работе рассматривается метод приближенного вычисления указанных интегралов от цилиндрических функционалов с помощью разложения интегрируемого функционала в ряд. Разложение имеет вид

$$F(x(\cdot)) = F\left(\int_s^t f_1(\tau) dx(\tau), \dots, \int_s^t f_d(\tau) dx(\tau)\right) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_d=0}^{\infty} F_{n_1, \dots, n_d} \prod_{k=1}^d \left(\int_s^t f_k(\tau) dx(\tau)\right)^{n_k}, \quad (3)$$

где F_{n_1, \dots, n_d} – коэффициенты разложения, принимающие вещественные значения.

Т е о р е м а. Пусть функции $f_k(\tau)$, $1 \leq k \leq d$ интегрируемы по Риману на отрезке $[s, t]$. Пусть функция $F(u_1, \dots, u_d)$ допускает разложение в ряд $\sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} F_{n_1, \dots, n_d} u_1^{n_1} \dots u_d^{n_d}$, ряд $\sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} |F_{n_1, \dots, n_d}| |a|^N c_1^{n_1} \dots c_d^{n_d}$ сходится для некоторых $c_k > \int_s^t |f_k(\tau)| d\tau$, $1 \leq k \leq d$ и его сумма равна S . Тогда

$$\begin{aligned} & \int F\left(\int_s^t f_1(\tau) dx(\tau), \dots, \int_s^t f_d(\tau) dx(\tau)\right) d\mu(x) = \\ & = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_d=0}^{\infty} F_{n_1, \dots, n_d} \int \int (N) \int_s^t \prod_{k=1}^d \prod_{j=1}^{n_k} f_k(\tau_{kj}) \prod_{k=1}^d \prod_{j=1}^{n_k} dx(\tau_{kj}) d\mu(x) = \\ & = \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} F_{n_1, \dots, n_d} (-a)^N \int_s^t (N) \int_s^t \prod_{k=1}^d g_k(\tau_k) \prod_{k=0}^N \exp\{(\tau_{m_k} - \tau_{m_{k+1}})(-1)^k b\beta\} d\tau_1 \dots d\tau_N \alpha^N \end{aligned} \quad (4)$$

и ряд в равенстве (4) сходится.

Здесь $N = n_1 + \dots + n_d$, $g_i(\tau) = f_k(\tau)$, $\sum_{m=0}^{k-1} n_m \leq i < \sum_{m=0}^k n_m$, $1 \leq k \leq d$, $n_0 = 1$, (m_1, \dots, m_N) – перестановка чисел $(1, \dots, N)$ такая, что $\tau_{m_1} \geq \tau_{m_2} \geq \dots \geq \tau_{m_N}$, $\tau_{m_0} = t$, $\tau_{m_{N+1}} = s$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения матричнозначного интеграла следует, что

$$\begin{aligned} I & = \int F\left(\int_s^t f_1(\tau) dx(\tau), \dots, \int_s^t f_d(\tau) dx(\tau)\right) d\mu(x) = \\ & = \lim_j \int (n) \int_R \dots \int_R F\left(\sum_{j=1}^n f_1(t_{j-1})(x_j - x_{j-1}), \dots, \sum_{j=1}^n f_d(t_{j-1})(x_j - x_{j-1})\right) \prod_{j=n}^1 S(t_j - t_{j-1}, x_j - x_{j-1}) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Используя замену переменных $x_j - x_{j-1} = y_j$, $1 \leq j \leq n$, и то, что преобразование Фурье функции $S(t_j - t_{j-1}, y_j)$ равно $\exp\{(t_j - t_{j-1})(-ia\alpha z_j + b\beta)\}$, получим

$$I = \lim_j \int (n) \int_R \overset{\vee}{F}\left(\sum_{j=1}^n f_1(t_{j-1})z_j, \dots, \sum_{j=1}^n f_d(t_{j-1})z_j\right) \prod_{j=n}^1 \exp\{(t_j - t_{j-1})(-ia\alpha z_j + b\beta)\} dz_1 \dots dz_n, \quad (5)$$

где $\overset{\vee}{F}$ обозначает обратное преобразование Фурье функции F .

Используя равенство

$$\exp\{-(t_j - t_{j-1})ia\alpha z_j\} = \sum_{\xi_j=\pm 1} \frac{1}{2} \left(\exp\{-(t_j - t_{j-1})iaz_j\} + \xi_j \exp\{(t_j - t_{j-1})iaz_j\} \right) \alpha^{\frac{1-\xi_j}{2}},$$

верное в случае $\alpha^2 = E$, получаем

$$\begin{aligned} & \prod_{j=n}^1 \left[\exp\{-(t_j - t_{j-1})ia\alpha z_j\} \exp\{(t_j - t_{j-1})b\beta\} \right] = \\ & = \sum_{\xi_1=\pm 1} \cdots \sum_{\xi_n=\pm 1} \prod_{j=n}^1 \left[\frac{1}{2} \left(\exp\{-(t_j - t_{j-1})iaz_j\} + \xi_j \exp\{(t_j - t_{j-1})iaz_j\} \right) \alpha^{\frac{1-\xi_j}{2}} \exp\{(t_j - t_{j-1})b\beta\} \right]. \end{aligned}$$

В данном произведении множители, содержащие α , чередуются с множителями, содержащими β . Учитывая правило антикоммутиации α и β , расположим каждый множитель, содержащий β , слева от всех множителей, содержащих α . Получим:

$$\begin{aligned} & \prod_{j=n}^1 \left[\exp\{-(t_j - t_{j-1})ia\alpha z_j\} \exp\{(t_j - t_{j-1})b\beta\} \right] = \\ & = \sum_{\xi_1=\pm 1} \cdots \sum_{\xi_n=\pm 1} \prod_{j=n}^1 \frac{1}{2} \left(\exp\{-(t_j - t_{j-1})iaz_j\} + \xi_j \exp\{(t_j - t_{j-1})iaz_j\} \right) \times \\ & \quad \times \prod_{j=n}^1 \exp\left\{ (t_j - t_{j-1}) \left(\prod_{l=n}^j \xi_l \right) b\beta \right\} \prod_{j=n}^1 \alpha^{\frac{1-\xi_j}{2}}. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных

$$\xi_1 = \eta_1 \eta_2, \quad \xi_2 = \eta_2 \eta_3, \dots, \quad \xi_n = \eta_n.$$

Обратная замена переменных имеет вид

$$\eta_n = \xi_n, \quad \eta_{n-1} = \xi_{n-1} \xi_n, \dots, \quad \eta_1 = \xi_1 \cdots \xi_n.$$

Получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \prod_{j=n}^1 \left[\exp\{-(t_j - t_{j-1})ia\alpha z_j\} \exp\{(t_j - t_{j-1})b\beta\} \right] = \\ & = \sum_{\eta_1=\pm 1} \cdots \sum_{\eta_n=\pm 1} \prod_{j=n}^1 \frac{1}{2} \left(\exp\{-(t_j - t_{j-1})iaz_j\} + \eta_j \eta_{j+1} \exp\{(t_j - t_{j-1})iaz_j\} \right) \times \\ & \quad \times \prod_{j=n}^1 \exp\{(t_j - t_{j-1})\eta_j b\beta\} \prod_{j=n}^1 \alpha^{\frac{1-\eta_j \eta_{j+1}}{2}}, \end{aligned}$$

где $\eta_{n+1} = 1$.

Подставим полученное выражение в (5) и воспользуемся равенством

$$\prod_{j=n}^1 \alpha^{\frac{1-\eta_j \eta_{j+1}}{2}} = \alpha^{\frac{1-\eta_1 \eta_{n+1}}{2}} = \alpha^{\frac{1-\eta_1}{2}}.$$

Получаем

$$\begin{aligned} I & = \lim_{\max_j \Delta t_j \rightarrow 0} \int_R \int_R \check{F} \left(\sum_{j=1}^n f_1(t_{j-1})z_j, \dots, \sum_{j=1}^n f_d(t_{j-1})z_j \right) \times \\ & \times \sum_{\eta_1=\pm 1} \cdots \sum_{\eta_n=\pm 1} \prod_{j=n}^1 \frac{1}{2} \left(\exp\{-(t_j - t_{j-1})iaz_j\} + \eta_j \eta_{j+1} \exp\{(t_j - t_{j-1})iaz_j\} \right) \times \\ & \quad \times \prod_{j=n}^1 \exp\{(t_j - t_{j-1})\eta_j b\beta\} \alpha^{\frac{1-\eta_1}{2}} dz_1 \dots dz_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя правую часть равенства

$$\exp\{-(t_j - t_{j-1})iaz_j\} + \eta_j \eta_{j+1} \exp\{(t_j - t_{j-1})iaz_j\} = \sum_{v_j=\pm 1} \exp\{-(t_j - t_{j-1})iaz_j v_j\} (\eta_j \eta_{j+1})^{\frac{1-v_j}{2}}$$

в (6) и вычисляя интегралы по переменным z_1, \dots, z_n , получим

$$I = \lim_j \sum_{\max \Delta t_j \rightarrow 0} \cdots \sum_{\eta_n=\pm 1} \cdots \sum_{v_1=\pm 1} \cdots \sum_{v_n=\pm 1} \prod_{j=n}^1 \frac{1}{2} (\eta_j \eta_{j+1})^{\frac{1-v_j}{2}} \times \\ \times F \left(-\sum_{j=1}^n f_1(t_{j-1})(t_j - t_{j-1})av_j, \dots, -\sum_{j=1}^n f_d(t_{j-1})(t_j - t_{j-1})av_j \right) \prod_{j=n}^1 \exp\{(t_j - t_{j-1})\eta_j b\beta\} \alpha^{\frac{1-\eta_1}{2}}. \quad (7)$$

Используем разложение $F(u_1, \dots, u_d) = \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} F_{n_1, \dots, n_d} u_1^{n_1} \cdots u_d^{n_d}$, которое по условию теоремы сходится при $u_k = |a|c_k$, $1 \leq k \leq d$. Так как $c_k > \int_s^t |f_k(\tau)| d\tau$, $1 \leq k \leq d$, то это разложение сходится и при $u_k = |a| \int_s^t |f_k(\tau)| d\tau$, $1 \leq k \leq d$, и при $u_k = |a| \sum_{j=1}^n |f_k(t_{j-1})| |t_j - t_{j-1}|$, $1 \leq k \leq d$. Поменяем местами знак $\sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty}$ и знак $\sum_{v_j=\pm 1}$. Тогда формула (7) запишется в виде

$$I = \lim_j \sum_{\max \Delta t_j \rightarrow 0} \cdots \sum_{\eta_n=\pm 1} \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} F_{n_1, \dots, n_d} \sum_{v_1=\pm 1} \cdots \sum_{v_n=\pm 1} \prod_{j=n}^1 \frac{1}{2} (\eta_j \eta_{j+1})^{\frac{1-v_j}{2}} (-a)^N \times \\ \times \prod_{k=1}^d \left(\sum_{j=1}^n f_k(t_{j-1})(t_j - t_{j-1})v_j \right)^{n_k} \prod_{j=n}^1 \exp\{(t_j - t_{j-1})\eta_j b\beta\} \alpha^{\frac{1-\eta_1}{2}}. \quad (8)$$

С учетом обозначения $g_i(\tau) = f_k(\tau)$, $\sum_{m=0}^{k-1} n_m \leq i < \sum_{m=0}^k n_m$, $1 \leq k \leq d$, $n_0 = 1$ равенство (8) имеет вид

$$I = \lim_j \sum_{\max \Delta t_j \rightarrow 0} \cdots \sum_{\eta_n=\pm 1} \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} F_{n_1, \dots, n_d} \sum_{v_1=\pm 1} \cdots \sum_{v_n=\pm 1} \prod_{j=n}^1 \frac{1}{2} (\eta_j \eta_{j+1})^{\frac{1-v_j}{2}} (-a)^N \times \\ \times \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_N=1}^n \prod_{k=1}^d g_k(t_{j_k-1})(t_{j_k} - t_{j_k-1})v_{j_k} \prod_{j=n}^1 \exp\{(t_j - t_{j-1})\eta_j b\beta\} \alpha^{\frac{1-\eta_1}{2}}.$$

Представим множество $\{j_k, 1 \leq k \leq N\}$ в виде объединения множеств J_l , $1 \leq l \leq L$, где множество J_l состоит из чисел j_k , которые равны между собой и равны i_l . Все i_l , $1 \leq l \leq L$, имеют разные значения и $i_1 < i_2 < \dots < i_L$. Число элементов в множестве J_l равно p_l . Тогда, выполняя суммирование по v_1, \dots, v_n , получаем равенство

$$I = \lim_j \sum_{\max \Delta t_j \rightarrow 0} \cdots \sum_{\eta_n=\pm 1} \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} F_{n_1, \dots, n_d} (-a)^N \times \\ \times \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_N=1}^n \prod_{j=n, j \neq j_k}^1 \frac{1}{2} (1 + \eta_j \eta_{j+1}) \prod_{l=1}^L \frac{1}{2} (1 + (-1)^{p_l} \eta_{i_l} \eta_{i_l+1}) \times \\ \times \prod_{k=1}^N g_k(t_{j_k-1})(t_{j_k} - t_{j_k-1}) \prod_{j=n}^1 \exp\{(t_j - t_{j-1})\eta_j b\beta\} \alpha^{\frac{1-\eta_1}{2}}.$$

В данной формуле функциональный интеграл представляется в виде суммы по конфигурациям, задаваемым всевозможными наборами чисел (η_1, \dots, η_n) , $\eta_j = \pm 1$, $1 \leq j \leq n$. При этом пред-

ставлении ненулевой вклад в значение интеграла дает только одна конфигурация $\eta_j = \eta_{j+1}$, $j \neq j_k$, $\eta_j = (-1)^{p_l} \eta_{j+1}$, $j = i_l$, $1 \leq l \leq L$. То есть $\eta_n = \eta_{n-1} = \dots = \eta_{i_L+1} = 1$, $\eta_{i_L} = \eta_{i_L-1} = \dots = \eta_{i_L-1+1} = (-1)^{p_L}, \dots$, $\eta_{i_1} = \eta_{i_1-1} = \dots = \eta_1 = (-1)^{p_L} \dots (-1)^{p_1}$. Таким образом, значение интеграла равно значению суммы на этой единственной конфигурации.

Следовательно, после суммирования по η_1, \dots, η_n получаем равенство

$$I = \lim_j \sum_{\max \Delta t_j \rightarrow 0, n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} F_{n_1, \dots, n_d} (-a)^N \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_N=1}^n \times \quad (9)$$

$$\times \prod_{k=1}^N g_k(t_{j_k-1})(t_{j_k} - t_{j_k-1}) \prod_{k=0}^N \exp\{(t_{j_{m_k}} - t_{j_{m_{k+1}}})(-1)^k b\beta\} \alpha^N,$$

где (m_1, \dots, m_N) – перестановка чисел $(1, \dots, N)$ такая, что $j_{m_1} \geq j_{m_2} \geq \dots \geq j_{m_N}$, $t_{j_{m_0}} = t$, $t_{j_{m_{N+1}}} = s$.

Из условия существования интегралов $\int_s^t f_k(\tau) d\tau$, $1 \leq k \leq d$, следует, что существует

$$\lim_j \sum_{\max \Delta t_j \rightarrow 0, j_1=1}^n \dots \sum_{j_N=1}^n \prod_{k=1}^N g_k(t_{j_k-1})(t_{j_k} - t_{j_k-1}) \prod_{k=0}^N \exp\{(t_{j_{m_k}} - t_{j_{m_{k+1}}})(-1)^k b\beta\} \quad (10)$$

и равен

$$\int_s^t (N) \int_s^t \prod_{k=1}^N g_k(\tau_k) \prod_{k=0}^N \exp\{(\tau_{m_k} - \tau_{m_{k+1}})(-1)^k b\beta\} d\tau_1 \dots d\tau_N,$$

где $\tau_{m_1} \geq \tau_{m_2} \geq \dots \geq \tau_{m_N}$, $\tau_{m_0} = t$, $\tau_{m_{N+1}} = s$.

Из условия существования интегралов $\int_s^t f_k(\tau) d\tau$, $1 \leq k \leq d$, и неравенств $c_k > \int_s^t |f_k(\tau)| d\tau$, $1 \leq k \leq d$, следует, что существует такое \bar{n}_1 , что для всех $n \geq \bar{n}_1$

$$\left\| \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_N=1}^n \prod_{k=1}^N g_k(t_{j_k-1})(t_{j_k} - t_{j_k-1}) \prod_{k=0}^N \exp\{(t_{j_{m_k}} - t_{j_{m_{k+1}}})(-1)^k b\beta\} \right\| \leq \exp\{t |b| \|\beta\|\} \prod_{k=1}^d c_k^{n_k}. \quad (11)$$

Из неравенств $c_k > \int_s^t |f_k(\tau)| d\tau$, $1 \leq k \leq d$, и сходимости ряда $\sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} |F_{n_1, \dots, n_d}| |a|^N c_1^{n_1} \dots c_d^{n_d}$ следует, что для любого малого $\varepsilon > 0$ существует такое \bar{n} , что для всех $n_j \geq \bar{n}$, $1 \leq j \leq d$,

$$\left\| \sum_{n_1, \dots, n_d=\bar{n}}^{\infty} F_{n_1, \dots, n_d} (-a)^N \int_s^t (N) \int_s^t \prod_{k=1}^N g_k(\tau_k) \prod_{k=0}^N \exp\{(\tau_{m_k} - \tau_{m_{k+1}})(-1)^k b\beta\} d\tau_1 \dots d\tau_N \alpha^N \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{n_1, \dots, n_d=\bar{n}}^{\infty} |F_{n_1, \dots, n_d}| |a|^N \exp\{t |b| \|\beta\|\} c_1^{n_1} \dots c_d^{n_d} \bar{\alpha} < \varepsilon \exp\{t |b| \|\beta\|\} \bar{\alpha}, \quad (12)$$

где $\bar{\alpha} = \max\{\|E\|, \|\alpha\|\}$.

Из неравенства (11) и сходимости ряда $\sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} |F_{n_1, \dots, n_d}| |a|^N c_1^{n_1} \dots c_d^{n_d}$ следует, что для любого малого $\varepsilon > 0$ существует такое \bar{n} , что для всех $n_j \geq \bar{n}$, $1 \leq j \leq d$, и $n \geq \bar{n}_1$

$$\left\| \sum_{n_1, \dots, n_d=\bar{n}}^{\infty} F_{n_1, \dots, n_d} (-a)^N \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_N=1}^n \prod_{k=1}^N g_k(t_{j_k-1})(t_{j_k} - t_{j_k-1}) \prod_{k=0}^N \exp\{(t_{j_{m_k}} - t_{j_{m_{k+1}}})(-1)^k b\beta\} \alpha^N \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{n_1, \dots, n_d=\bar{n}}^{\infty} |F_{n_1, \dots, n_d}| |a|^N \exp\{t |b| \|\beta\|\} c_1^{n_1} \dots c_d^{n_d} \bar{\alpha} < \varepsilon \exp\{t |b| \|\beta\|\} \bar{\alpha}. \quad (13)$$

Из существования предела (10) следует, что для \bar{n} существует такое \bar{n}_2 , что для всех $n \geq \bar{n}_2$

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\bar{n}} F_{n_1, \dots, n_d} (-a)^N \left(\int_s^t (N) \int \prod_{k=1}^N g_k(\tau_k) \prod_{k=0}^N \exp\{(\tau_{m_k} - \tau_{m_{k+1}})(-1)^k b\beta\} d\tau_1 \dots d\tau_N - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_N=1}^n \prod_{k=1}^N g_k(t_{j_k-1})(t_{j_k} - t_{j_{k-1}}) \prod_{k=0}^N \exp\{(t_{j_{m_k}} - t_{j_{m_{k+1}}})(-1)^k b\beta\} \right) \alpha^N \right\| \leq \\ & \leq \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\bar{n}} |F_{n_1, \dots, n_d}| |a|^N \varepsilon c_1^{n_1} \dots c_d^{n_d} \bar{\alpha} \leq \varepsilon S \bar{\alpha}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из неравенств (12)–(14) следует, что для $n \geq \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\}$

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} F_{n_1, \dots, n_d} (-a)^N \int_s^t (N) \int \prod_{k=1}^N g_k(\tau_k) \prod_{k=0}^N \exp\{(\tau_{m_k} - \tau_{m_{k+1}})(-1)^k b\beta\} d\tau_1 \dots d\tau_N \alpha^N - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} F_{n_1, \dots, n_d} (-a)^N \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_N=1}^n \prod_{k=1}^N g_k(t_{j_k-1})(t_{j_k} - t_{j_{k-1}}) \prod_{k=0}^N \exp\{(t_{j_{m_k}} - t_{j_{m_{k+1}}})(-1)^k b\beta\} \alpha^N \right\| \leq \\ & \leq \varepsilon \exp\{t |b| \|\beta\|\} \bar{\alpha} + \varepsilon S \bar{\alpha} + \varepsilon \exp\{t |b| \|\beta\|\} \bar{\alpha} = \varepsilon (2 \exp\{t |b| \|\beta\|\} + S) \bar{\alpha}. \end{aligned}$$

Следовательно, существует предел в формуле (9) и его значение равно

$$\sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} F_{n_1, \dots, n_d} (-a)^N \int_s^t (N) \int \prod_{k=1}^N g_k(\tau_k) \prod_{k=0}^N \exp\{(\tau_{m_k} - \tau_{m_{k+1}})(-1)^k b\beta\} d\tau_1 \dots d\tau_N \alpha^N. \quad (15)$$

Из приведенного доказательства следует, что значение

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_d=0}^{\infty} F_{n_1, \dots, n_d} \int_s^t (N) \int \prod_{k=1}^d \prod_{j=1}^{n_k} f_k(\tau_{kj}) \prod_{k=1}^d \prod_{j=1}^{n_k} dx(\tau_{kj}) d\mu(x)$$

также равно (15). То есть теорема доказана.

2. Интегралы, содержащие малый и большой параметры. Из вида разложения (4) следует, что удобно использовать разложение (4) для приближенного вычисления матричнозначных функциональных интегралов при малых значениях параметра a . В качестве примера рассмотрим вычисление матричнозначного функционального интеграла

$$\int \exp \left\{ \int_s^t \lambda(\tau) dx(\tau) \right\} d\mu(x).$$

Используя разложение (4), получаем:

$$\begin{aligned} & \int \exp \left\{ \int_s^t \lambda(\tau) dx(\tau) \right\} d\mu(x) = \\ & = \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{1}{n_1!} (-a)^{n_1} \int_s^t (n_1) \int \prod_{k=1}^{n_1} \lambda(\tau_k) \prod_{k=0}^{n_1} \exp\{(\tau_{m_k} - \tau_{m_{k+1}})(-1)^k b\beta\} d\tau_1 \dots d\tau_{n_1} \alpha^{n_1} = \\ & = \sum_{n_1=0}^{\infty} (-a)^{n_1} \int_s^t (n_1) \int \prod_{\tau_3 \tau_2 k=1}^{n_1} \lambda(\tau_k) \exp\{(t - 2\tau_1 + 2\tau_2 - \dots + (-1)^{n_1} 2\tau_{n_1} - (-1)^{n_1} s) b\beta\} d\tau_1 \dots d\tau_{n_1} \alpha^{n_1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Если в разложении использовать многочлены нулевой и первой степени, т. е. взять в правой части равенства (16) первые два слагаемых ($a_1 = 0, 1$), получим

$$\int \exp \left\{ \int_s^t \lambda(\tau) dx(\tau) \right\} d\mu(x) \approx \exp\{(t-s)b\beta\} - a \int_s^t \lambda(\tau) \exp\{(t-2\tau+s)b\beta\} d\tau \alpha. \quad (17)$$

Точное значение при $a = 0,1; b = 1; t = 2; s = 1; \lambda \equiv 1; \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ равно $\begin{pmatrix} 1,431 & 1,177 \\ 1,177 & 1,667 \end{pmatrix}$.

Если в разложении учитывать многочлены только нулевой степени, то получим приближенное значение $\text{ch}(b(t-s))E + \text{sh}(b(t-s))\beta = \begin{pmatrix} 1,543 & 1,175 \\ 1,175 & 1,543 \end{pmatrix}$.

Если в разложении учитывать многочлены нулевой и первой степени, то получим приближенное значение

$$\text{ch}(b(t-s))E + \text{sh}(b(t-s))\beta - \frac{a\lambda}{b} \text{sh}(b(t-s))\alpha = \begin{pmatrix} 1,426 & 1,175 \\ 1,175 & 1,661 \end{pmatrix}.$$

Разложение (4) также удобно использовать для приближенного вычисления матричнозначных функциональных интегралов при больших значениях параметра b . Пусть $|f_k(\tau)| \leq C, 1 \leq k \leq d$. Тогда кратные интегралы в формуле (4) можно оценить величиной

$$\begin{aligned} & C^N \int_s^t (N) \int_s^t \prod_{k=0}^N \left\| \exp\{(\tau_{m_k} - \tau_{m_{k+1}})(-1)^k b\beta\} \right\| d\tau_1 \dots d\tau_N \leq \\ & \leq C^N N! \left\| \exp\{-b\beta t\} \right\| \int_s^t (N) \int_s^t \int_s^t \exp\{(2t - 2\tau_1 + 2\tau_2 - \dots + 2(-1)^N \tau_N - (-1)^N s)\|b\beta\|} d\tau_1 \dots d\tau_N. \end{aligned}$$

После вычисления интегралов по $d\tau_1 d\tau_2$ получим оценку

$$C^N N! \left\| e^{-b\beta t} \right\| \left\| \frac{t}{2\|b\beta\|} \int_s^t (N-2) \int_s^t \int_s^t \exp\{(2t - 2\tau_3 + 2\tau_N - \dots + 2(-1)^N \tau_N - (-1)^N s)\|b\beta\|} d\tau_3 \dots d\tau_N. \right.$$

Далее, вычисляя интегралы по $d\tau_3 \dots d\tau_N$, придем к оценке

$$C^N N! \left\| e^{-b\beta t} \right\| \left\| \frac{t}{2\|b\beta\|} \exp\{(2t-s)\|b\beta\|} \right\| H,$$

где $H = \left(\frac{t}{2\|b\beta\|} \right)^{\frac{N}{2}}$, если N четно, $H = \frac{1}{2\|b\beta\|} \left(\frac{t}{2\|b\beta\|} \right)^{\frac{N-1}{2}}$, если N нечетно.

Из вида константы H следует, что разложение (4) удобно использовать для приближенного вычисления матричнозначных функциональных интегралов при больших значениях параметра b .

В качестве примера рассмотрим вычисление матричнозначного функционального интеграла

$$\int_s^t \exp\left\{ \int_s^t \lambda(\tau) dx(\tau) \right\} d\mu(x).$$

Если в разложении использовать многочлены нулевой и первой степени, то этот интеграл можно вычислить по приближенной формуле (17).

Точное значение при $a = 1; b = 10; t = 2; s = 1; \lambda \equiv 1; \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ равно $\begin{pmatrix} 10414,2 & 11507,3 \\ 11507,3 & 12715,6 \end{pmatrix}$.

Если в разложении учитывать многочлены только нулевой степени, то получим приближенное значение $\text{ch}(b(t-s))E + \text{sh}(b(t-s))\beta = \begin{pmatrix} 11014,2 & 11014,1 \\ 11014,1 & 11014,2 \end{pmatrix}$.

Если в разложении учитывать многочлены нулевой и первой степени, то получим приближенное значение

$$\text{ch}(b(t-s))E + \text{sh}(b(t-s))\beta - \frac{a\lambda}{b} \text{sh}(b(t-s))\alpha = \begin{pmatrix} 9912,8 & 11014,1 \\ 11014,1 & 12115,6 \end{pmatrix}.$$

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф12Д-001).

Литература

1. *Егоров А. Д., Соболевский П. И., Янович Л. А.* Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. Минск, 1985.
2. *Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A.* Functional integrals: Approximate evaluation and Applications. Dordrecht, 1993.
3. *Егоров А. Д., Жидков Е. П., Лобанов Ю. Ю.* Введение в теорию и приложения функционального интегрирования. М., 2006.
4. *Ichinose T., Tamura H.* // J. Math. Phys. 1984. Vol 25, N. 6. P. 1810–1819.
5. *Ichinose T., Tamura H.* // J. Math. Phys. 1988. Vol. 29, N. 1. P. 103–109.

E. A. AYRYAN, V. B. MALYUTIN

EVALUATION OF MATRIX-VALUED FUNCTIONAL INTEGRALS USING FUNCTIONAL POLYNOMIALS

Summary

The method of approximate evaluation of matrix-valued functional integrals, generated by the solution of the Dirac equation is proposed. The method is based on the expansion of the functional in a series. The terms of the series have the form of a product of linear functionals with an increasing total power. The convergence of this series for a wide class of functionals is proved.