

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 536.33

Поступила в редакцию 15.06.2017
Received 15.06.2017

А. П. Иванов

Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДЕ, ОБУСЛОВЛЕННОЕ ИСТОЧНИКАМИ РАЗНОЙ ФОРМЫ

Аннотация. Термографические методы на основе ИК-изображений активно используются в медицинской практике для ранней диагностики заболеваний, при проведении клинических процедур и хирургических операций. Одним из слабых мест указанных подходов является то, что изображения зашумлены тепловым влиянием слоя ткани, находящейся между обследуемым органом и тепловизором и, следовательно, лишь косвенно несут информацию о температурном режиме внутренних органов. С целью повышения методов дистанционных термографических исследований кожного покрова человека разработан способ расчета температуры, обусловленный наличием в ткани источников тепла разного происхождения, который основан на использовании аппарата теории линейных систем и результатов расчета от точечного источника. Рассмотрены источники в виде сферы, цилиндра разной ориентации, прямой линии, круга. Указаны особенности тепловых полей от них. Получены простые формулы для температуры от сферического источника внутри и вне его в бесконечной среде. Приведено сопоставление температур от нагретой линии конечной и бесконечной длины. На примере цилиндрического источника более детально выполнен анализ температуры внутри источника и вне его в зависимости от теплофизических параметров, глубины залегания, размеров. Особое внимание уделено сопоставлению результатов распределения температуры на поверхности кожи и его размеров. Полученные данные можно использовать для коррекции температуры в термографических исследованиях.

Ключевые слова: тепло, температура, теплоотдача, теплопроводность, термография, биологическая ткань, кожа, ИК-изображение

Для цитирования. Иванов, А. П. Распределение температуры в полубесконечной среде, обусловленное источниками разной формы / А. П. Иванов // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 1. – С. 69–76.

A. P. Ivanov

B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

TEMPERATURE DISTRIBUTION IN A SEMI-INFINITE MEDIUM DUE TO A HEAT SOURCE OF DIFFERENT SHAPE

Abstract. Thermographic methods based on IR images are actively used in medical practice for the early diagnosis of diseases, in clinical procedures and surgical operations. One of the weak points of the above methods is that the images are noisy due to the thermal influence of a tissue layer located between a human organ under examination and a thermal imager and they therefore carry only indirectly information about the temperature regime of internal organs. In order to improve the accuracy of remote thermographic methods, as applied to the human skin, the method of temperature estimation due to the presence of heat sources of different origin in the tissue has been developed. This method is based on using the linear systems theory approach and the calculation results of a point source. Sources in the shape of a sphere, a cylinder of different orientation, straight lines, and a circle are considered. Specific features of thermal fields from heat sources are indicated. Simple computational models are obtained for a temperature from a spherical source inside and outside it in an infinite medium. Temperatures from a heated line of finite and infinite length are compared. Using the example of a cylindrical heat source, the temperature inside and outside the source is analyzed in detail as a function of thermal physical parameters, occurrence depth and sizes. Particular attention is paid to comparing the results of the temperature distribution on the surface of the skin and its sizes. The given results can be used for temperature correction in thermographic studies.

Keywords: heat, temperature, thermal physical parameters, thermography, biological tissue, skin, IR image

For citation. Ivanov A. P. Temperature distribution in a semi-infinite medium due to a heat source of different shape. *Vestsi Natsyianal'най akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 69–76 (in Russian).

Введение. В медицинской практике важно знать и измерять температуру разных участков человеческого тела, ибо она определяет как положительные, так и отрицательные процессы,

протекающие в организме. В настоящее время активно внедряются неинвазивные (дистанционные) термографические методы на основе ИК-изображений. Однако вследствие теплопереноса тепловая картина не бывает четко выраженной – она «размывается» в пространстве. Изображения зашумлены тепловым влиянием слоя ткани, находящейся между обследуемым органом и тепловизором и, следовательно, лишь косвенно несут информацию о температурном режиме внутренних органов. Поэтому представляет интерес выяснение характера распределения температуры в среде от ее источника. Применительно к источникам разных размеров и форм описать математически это явление достаточно сложно. С целью расширения возможностей решения данной задачи воспользуемся результатами расчетов, выполненных для источника точечного размера.

Исходные положения и аналитические результаты. Математически будем рассматривать биологическую мягкую ткань как полубесконечный слой. Температура биоткани по глубине неоднородна. Обычно поверхность кожи холоднее, чем внутренние участки среды. Разность температур при нормальном состоянии организма поддерживается за счет различных естественных метаболических процессов, характеристики которых зависят от многих факторов. (Этот вопрос здесь не анализируется.) Рассмотрим случай дополнительного источника тепла в среде. В работах [1, 2] получены аналитические формулы для возникающего приращения температуры ΔT от ряда осесимметричных источников. Так, для точечного источника с тепловой мощностью Q , Вт на глубине a , имеющего в цилиндрической системе координаты $z = a, r = 0$, величина ΔT_p есть [1]

$$\Delta T_p = \frac{Q}{4\pi k} \left\{ \left[(z-a)^2 + r^2 \right]^{-1/2} - \left[(z+a)^2 + r^2 \right]^{-1/2} \right\} + \frac{Q}{2\pi k} \int_0^\infty \frac{\exp[-p(a+z)] p J_0(pr)}{p+h} dp. \quad (1)$$

Для источника в виде бесконечной прямой линии с линейной плотностью мощности Q' , Вт/см, имеющего в декартовой системе координаты $z = a, x = 0$ и направленного вдоль оси y , величина ΔT_y есть [2]

$$\Delta T_y = \frac{Q'}{4\pi k} \ln \frac{(z+a)^2 + x^2}{(z-a)^2 + x^2} + \frac{Q'}{\pi k} \int_0^\infty \frac{\exp[-p(z+a)] \cos(pz) dy}{p+h}. \quad (2)$$

Здесь z, r, x – координаты точки наблюдения (ввиду симметрии задачи φ координата отсутствует); $h = H/k, \text{ см}^{-1}$ – параметр теплоотдачи; $H, \text{ Вт}/(\text{см}^2 \cdot \text{К})$ – поток тепла с единицы поверхности при $T_s - T_a = 1,0 \text{ К}$ (T_s и T_a – температуры соответственно поверхности ткани и окружающей среды). Поток H включает обмен энергией вследствие излучения, конвекции и испарения. Типичные значения h изменяются в пределах $0,05-0,5 \text{ см}^{-1}$, а коэффициент теплопроводности для биоткани $k = 0,004-0,006 \text{ Вт}/(\text{см} \cdot \text{К})$ [3, 4], J_0 – функция Бесселя нулевого порядка. На поверхности среды от точечного источника

$$\Delta T_p(r, a) = \frac{Q}{2\pi k} \int_0^\infty \frac{\exp(-pa) p J_0(pr)}{p+h} dp. \quad (3)$$

Остановимся на точечном источнике. Естественно, что практически его нельзя реализовать. Однако полученные с его помощью температурные данные можно использовать для расчета температуры от источников разных форм. Выделим в источнике произвольной формы и объема V в цилиндрической системе координат бесконечно малый элементарный объем $dV = r^* dr^* dz^* d\varphi$, имеющий координаты r^*, z^*, φ . Положим, что он создает в пространстве распределение температуры, описываемое формулой (1). По отношению к этому элементарному объему в (1) заменим a на z^*, r на $l = \sqrt{(r - r^* \cos \varphi)^2 + (r^* \sin \varphi)^2}$, а Q – на произведение объемной плотности тепловой мощности рассматриваемого источника q на элементарный объем dV . Тогда приращение температуры, отнесенное к элементарному объему, будет

$$D = D_1 + D_2. \quad (4)$$

Здесь

$$D_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left\{ \left[(z - z^*)^2 + l^2 \right]^{-1/2} - \left[(z + z^*)^2 + l^2 \right]^{-1/2} \right\}, \quad D_2 = \frac{q}{2\pi\kappa} \int_0^\infty \frac{\exp[-p(z^* + z)] p J_0(pl)}{p + h} dp. \quad (5)$$

Очевидно, приращение температуры от всего объема источника будет

$$\Delta T = \int_V D dv. \quad (6)$$

Можно рассмотреть источник не в виде объема, а поверхности или линии. Тогда нужно выделить бесконечно малую площадку или отрезок линии и положить, что они создают температуру как точка (1). Для получения конечного результата необходимо провести операцию интегрирования по всей рассматриваемой поверхности или линии.

Рассмотрим некоторые формы источников. Начнем с объемных. Для выполнения операции (6) необходимо задать уравнение поверхности рассматриваемого источника и в трехмерном интеграле подставить соответствующие пределы. Будем в дальнейшем везде полагать q постоянным в любой точке источника.

Сферический источник. В этом случае (6) примет вид

$$\Delta T_{sp} = 2 \int_0^{0,5d} r^* \left\{ \int_{a-j}^{a+j} \left[\int_0^\pi D d\phi \right] dz^* \right\} dr^*, \quad (7)$$

где $j = \left[(0,5d)^2 - r^{*2} \right]^{0,5}$ – половина длины хорды сечения источника по диаметру, направленной перпендикулярно поверхности среды; a – здесь и в последующих рассматриваемых источниках – положение их «центра тяжести»; d – диаметр сферы. Формула (7) описывает тепловой режим как внутри, так и вне сферического источника.

Остановимся на температуре внутри источника. Из результатов расчетов следует, что рост теплоотдачи уменьшает ΔT . Чем меньше d и больше a , тем меньше влияние h на температуру. Максимум распределения температуры по диаметру, перпендикулярному поверхности среды, смещен от центра источника к поверхности, особенно сильно при малых d . По ортогональному диаметру наблюдается плавное падение ΔT от центра источника к периферии. Согласно (4)–(7) приращение температуры пропорционально Q . Все указанные закономерности определяются взаимосвязью переноса тепла вследствие проявления механизмов теплопроводности, теплоотдачи, а также разного положения и размера патологического источника.

При большом углублении источника в среду, когда влияние поверхности не сказывается на создаваемой им температуре, распределение ΔT ведет себя, как в бесконечной среде. Пусть источник с радиусом R_0 имеет равномерно распределенную по объему плотность тепловой мощности. В этом случае, согласно [5], на расстоянии от центра источника $R \geq R_0$ приращение температуры в среде

$$\Delta T_{sp}(R) = \frac{Q}{4\pi\kappa R}, \quad (8)$$

а при $R \leq R_0$, в нем самом,

$$\Delta T_{sp}(R) = \frac{Q}{8\pi\kappa R_0} \left[3 - \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \right]. \quad (9)$$

Средняя температура такого источника

$$\overline{\Delta T_{sp}} = \frac{\int_V T_{sp}(R) dv}{V} = \frac{3Q}{10\pi\kappa R_0}. \quad (10)$$

Из (9) видно, что на большой глубине в источнике температура пропорциональна Q/d . Ее распределение симметрично относительно центра. Отношение температур в центре и на поверхности равно $3/2$.

Расчеты показывают любопытный результат: приращение температуры вне сферического источника в любом месте среды, в том числе и на границе раздела источник – среда, такое же, как и от точечного (3) при их одинаковой тепловой мощности, если совпадают их центры нахождения. Таким образом, размеры рассмотренного сферического источника не могут быть выявлены по температурному распределению на поверхности кожи. Также ясно, что и любой другой аналогичный тепловой источник, угловые линейные размеры которого в большинстве направлений мало отличаются друг от друга, даст на поверхности распределение температуры, совпадающее с распределением от точки. По распределению температуры он принципиально отличается от растянутых в плоскости источников. Подробнее об этом будет сказано ниже.

Цилиндрический источник, ось которого перпендикулярна поверхности среды. Для цилиндра с диаметром d и высотой z_0 приращение температуры будет

$$\Delta T_{c1} = 2 \int_0^{0,5d} r^* \left\{ \int_{a-0,5z_0}^{a+0,5z_0} \left[\int_0^\pi D d\varphi \right] dz^* \right\} dr^*. \quad (11)$$

При малых z_0 выражение (11) обращается в

$$\Delta T_{c1} = 2z_0 \int_0^{0,5d} r^* \left[\int_0^\pi D d\varphi \right] dr^*. \quad (12)$$

Цилиндрический источник, ось которого параллельна поверхности среды. В данном случае из-за наглядности целесообразно рассматривать декартову систему координат xuz , ось x которой перпендикулярна источнику, а ось y совпадает с его осью. Ось z направлена перпендикулярно плоской поверхности биоткани внутрь нее. Рассуждения аналогичны рассмотренным ранее. Элементарный объем источника $dV = dx^* dy^* dz^*$, имеет координаты x^*, y^*, z^* , у точки наблюдения координаты x, y, z , приращение температуры будет

$$\Delta T_{c2} = \int_{a-0,5d}^{a+0,5d} \left[\int_{-\sqrt{(0,5d)^2 - (a-z^*)^2}}^{\sqrt{(0,5d)^2 - (a-z^*)^2}} \left(\int_{-0,5l}^{0,5l} D dy^* \right) dx^* \right] dz^*. \quad (13)$$

Здесь в D , описываемом формулами (3) и (4), следует полагать $l = \sqrt{(y^* - y)^2 + (x - x^*)^2}$.

Перейдем к источникам в виде поверхности или линии.

Источник в виде плоской поверхности – круга. Поверхности круга и среды параллельны. В этом случае следует взять не элементарный объем, а элементарную площадку в цилиндрической системе координат $r^* dr^* d\varphi$, которая имеет поверхностную плотность тепловой мощности источника q_s , Вт/см². Решение сводится к нахождению двукратного интеграла

$$\Delta T_s = 2 \int_0^{0,5d} r^* \left[\int_0^\pi D d\varphi \right] dr^*, \quad (14)$$

где в D вместо q следует использовать q_s . Естественно, что (12) при $z_0 \rightarrow 0$ не перейдет в (14), поскольку заданы разные условия на испускаемую тепловую мощность источников.

Источник в виде прямой линии. Для сохранения единства обозначений, хотя линия расположена в направлении y , ее длину обозначим через z_0 . Середина линии находится в точке $y^* = 0$. Для такого источника

$$\Delta T_l = \int_{-0,5z_0}^{0,5z_0} D dy^*. \quad (15)$$

Здесь в D вместо q следует использовать тепловую мощность на единице длины линейного источника q_p , Вт/см. С практической точки зрения (например, применительно к кровеносным

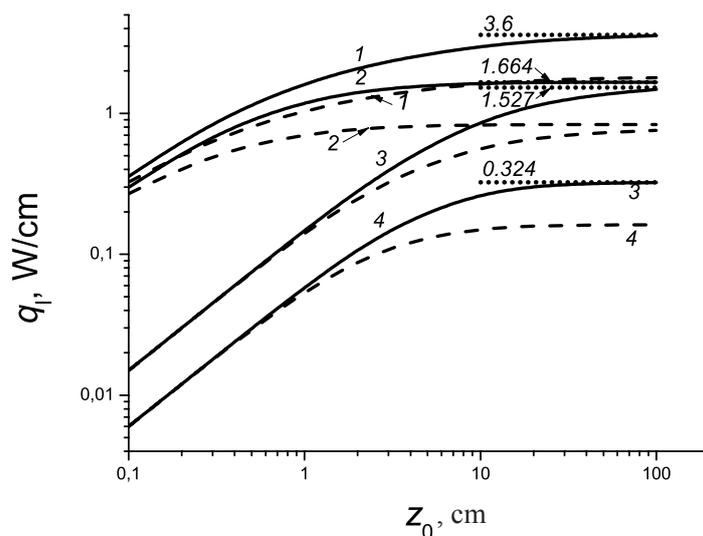


Рис. 1. Зависимость приращения температуры ΔT_1 на поверхности среды от длины линии z_0 при $q_1 = 0,01$ Вт/см. Цифры у кривых соответствуют следующим значениям h в см^{-1} и a в см:

1 – 0,05 и 0,1; 2 – 0,8 и 0,1; 3 – 0,05 и 2,0; 4 – 0,8 и 2,0

Fig. 1. Temperature difference ΔT_1 on the medium surface vs. the length of the line z_0 at $q_1 = 0.01$, W/cm, and different values of h and a : 1 – 0.05 cm^{-1} and 0.1 cm; 2 – 0.8 and 0.1; 3 – 0.05 and 2.0; 4 – 0.8 and 2.0

сосудам) интересно выяснить ту длину линии, находящуюся в декартовой системе на глубине a в плоскости yOz , от которой в плоскости xOz сформируется такое же распределение температуры, как и от бесконечной линии (2). Это частично иллюстрирует рис. 1, на котором представлены зависимости приращения температуры на поверхности среды от величины z_0 в точке $x = 0$, $y = 0$ (сплошные линии) при разных a и h . Числа у линий в виде точек обозначают приращения, когда $z_0 = \infty$. Из рис. 1 видно, что чем больше глубина залегания источника и теплоотдача, тем раньше достигают кривые своего асимптотического значения. Однако в любом случае практические асимптотического значения z_0 – порядка и более 10 см. Поэтому в медицинской практике целесообразно пользоваться (15) для конечной длины линии. На рис. 1 также представлен случай, когда $x = 0$, $y = 0,5z_0$ (прерывистые линии). Отметим, что здесь температура практически перестает изменяться при несколько меньших z_0 , чем в предыдущем случае.

Выбор модели формы патологического источника. Возникает вопрос: какую форму модели патологического источника следует выбрать для последующего детального исследования. Достаточно удобными, вследствие определенной пространственной симметрии, являются сферический и цилиндрический источники. Ранее уже говорилось, что сферический источник разных диаметров дает на поверхности среды такое же распределение, как и точечный, при их одинаковой тепловой мощности, поэтому дистанционным термографическим методом принципиально нельзя определить размер источника. В то же время наблюдается сильная трансформация пространственного распределения, а также абсолютного значения ΔT при изменении формы цилиндра, когда его объем постоянный. Поэтому в практическом смысле модель формы патологического участка с повышенной температурой в виде цилиндра представляется наиболее интересной. Детально проанализируем влияние разных факторов на возникающее от такого источника приращение температуры.

Тепловой режим от цилиндрического источника. Были выполнены расчеты для цилиндрического источника, ось которого перпендикулярна поверхности среды, с использованием формул (11), (12). Начнем с анализа температуры внутри цилиндра. Расчеты показывают, что всегда с отходом от оси цилиндра ΔT уменьшается. Этот перепад тем больше, чем больше h и меньше a . В среднем он близок к 1,5. При малой теплоотдаче температура значительно выше, чем при большой. На рис. 2, *a* приведены данные высотного распределения ΔT по оси цилиндра для случаев, когда торцевая поверхность цилиндра находится соответственно на поверхности среды и на большой глубине. Рассмотрен случай, когда $q = 0,2$ Вт/см³, $d = 1,0$ см, $z_0 = 0,2$ см.

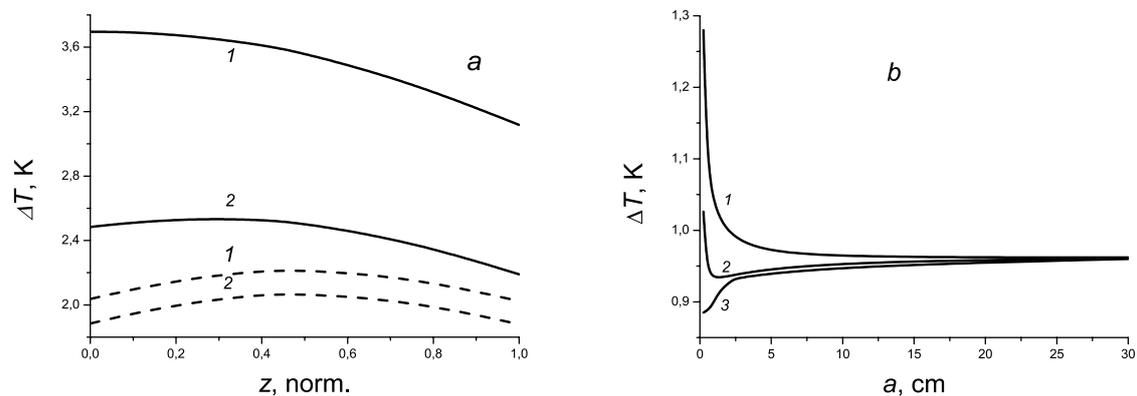


Рис. 2. Распределение приращения температуры внутри цилиндрического источника (цифры у кривых соответствуют разным h в см^{-1} : 1 – 0,05; 2 – 0,8; 3 – 2,11); a – зависимость ΔT от нормированной высотной координаты внутри цилиндра соответственно при a равном 0,1 см (сплошные линии) и 1,0 см (прерывистые линии); b – зависимость ΔT от a на оси цилиндра

Fig. 2. Temperature difference distribution inside a cylindrical source with different h cm^{-1} : 1 – 0.05; 2 – 0.8; 3 – 2.11; a – normalized height coordinate inside the cylinder dependence of ΔT at 0.1 cm (solid line) and at 1.0 cm (dash line) respectively; b – a on the axis of the cylinder dependence of ΔT

Если источник находится у поверхности, то, вследствие замедленного теплооттока, при перемещении от поверхности торца к центру ΔT медленно убывает или нарастает (при больших h), а затем быстро идет на спад. Когда a велико, распределение температуры практически симметрично убывает на расстояния большие или меньшие a . При росте q , z_0 и уменьшении h максимум распределения ΔT на оси цилиндра смещается вверх относительно центра (графический результат не приведен).

Рис 2, b иллюстрирует величину ΔT в центре тяжести источника при разной глубине его залегания и параметре теплоотдачи. Расчет выполнен при $z_0 = 0,5$ см, $d = 0,5$ см, $q = 0,1$ Вт/см³. Чем меньше теплоотдача, тем, естественно, выше температура. Особенно сильно это проявляется, когда источник располагается у поверхности среды. Однако при больших a его температура не зависит от h и a . В данном случае она равна 0,96 градуса. Если h очень мало и приращение

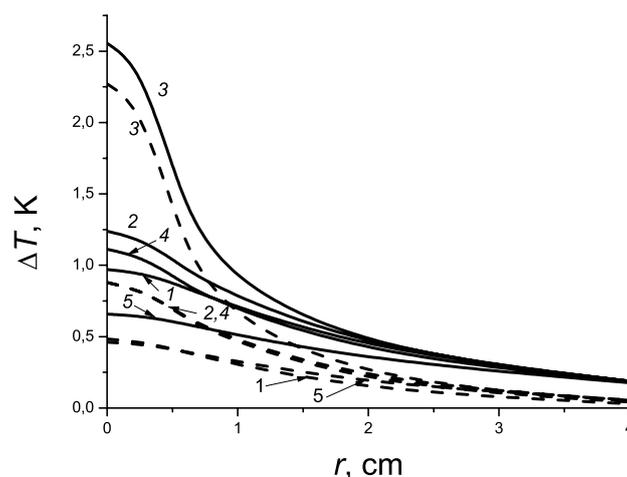


Рис. 3. Распределение ΔT в ткани при наличии источника на глубине $a = 1,0$ см. Цифры у кривых соответствуют разным глубинам залегания плоскости (см), параллельной поверхности среды, в которой рассматривается ΔT :

1 – 0; 2 – 0,5; 3 – 1,0; 4 – 1,5; 5 – 2,0. Сплошные линии – $h = 0,05$ см^{-1} , прерывистые – $h = 0,8$ см^{-1}

Fig. 3. ΔT distribution in the tissue in the presence of a heat source at a depth of $a = 1.0$ cm. Lines correspond to different values of the plane in cm, parallel to the surface of the medium in which the temperature difference ΔT is considered:

1 – 0; 2 – 0.5; 3 – 1.0; 4 – 1.5; 5 – 2.0; $h = 0.05$ cm^{-1} (solid lines), $h = 0.8$ cm^{-1} (dash lines)

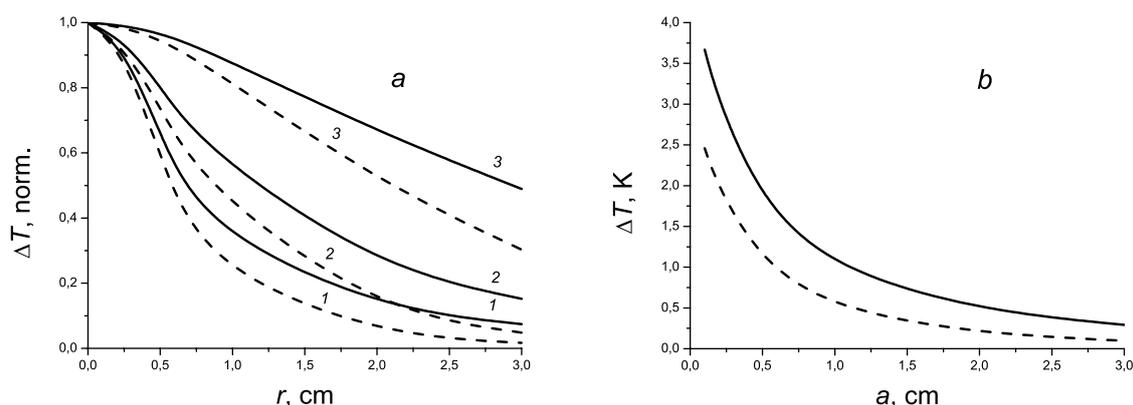


Рис. 4. Влияние a на ΔT поверхности при $q = 0,2 \text{ Вт/см}^3$, $z_0 = 0,2 \text{ см}$, $d = 1,0 \text{ см}$; цифры у кривых соответствуют разным a (см): 1 – 0,1; 2 – 0,5; 3 – 2,0 (сплошные линии – $h = 0,05 \text{ см}^{-1}$, прерывистые – $h = 0,8 \text{ см}^{-1}$):

a – нормированные функции $\Delta T(r)$; b – абсолютные $\Delta T(a)$ при $r = 0$

Fig. 4. Influence of a on the ΔT surfaces at $q = 0.2 \text{ W/cm}^3$, $z_0 = 0.2 \text{ cm}$, $d = 1.0 \text{ cm}$. Numbers denote different values of a in cm: 1 – 0.1; 2 – 0.5; 3 – 2.0. Solid lines denote $h = 0.05 \text{ cm}^{-1}$, dash lines denote $h = 0.8 \text{ cm}^{-1}$ a is the normalized functions $\Delta T(r)$, b is absolute $\Delta T(a)$ at $r = 0$

температуры источника у поверхности больше, то с ростом a величина ΔT монотонно уменьшается; в противоположном случае – монотонно растет. При некоторых ситуациях, как видно из рис. 2, b , функция $\Delta T = f(a)$ имеет минимум, где ΔT меньше своего асимптотического значения.

Общая картина распределения приращения температуры в ткани на разных поверхностях, параллельных поверхности среды, представлена на рис. 3. Рассмотрен случай $q = 0,2 \text{ Вт/см}^3$, $d = 1,0 \text{ см}$, $z_0 = 0,2 \text{ см}$. Кривая 1 соответствует наблюдению на поверхности биоткани. Имеет место плавное падение температуры с ростом радиальной координаты. По мере погружения в среду (при приближении к источнику) кривые, естественно, поднимаются, заостряются. Непосредственно на глубине 1,0 см (кривая 3) наиболее сильно выражен тепловой контраст. Следует отметить, что даже здесь поверхностное распределение температуры в пределах самого источника не остается постоянным (при $q = \text{const}$), а плавно убывает к краям. При дальнейшем углублении температура везде уменьшается и тепловой контраст исчезает. Обращает на себя внимание тот факт, что на одинаковом небольшом удалении в обе стороны от источника температурные распределения почти одинаковые (кривые 2, 4).

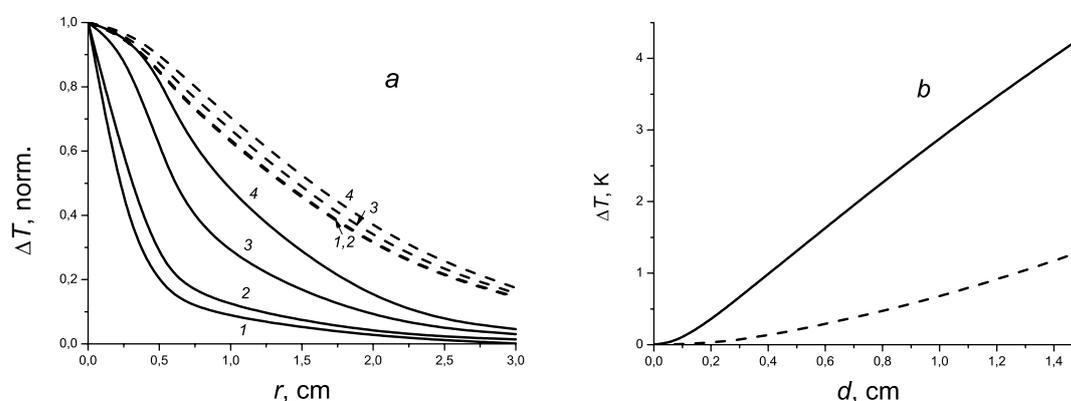


Рис. 5. Влияние d на ΔT поверхности; цифры у кривых соответствуют разным d (см):

1 – 0,2; 2 – 0,4; 3 – 1,0; 4 – 1,5 (сплошные линии – $a = 0,1 \text{ см}$, прерывистые – $a = 1,0 \text{ см}$):

a – нормированные функции $\Delta T(r)$; b – абсолютные $\Delta T(d)$ при $r = 0$

Fig. 5. Influence of d on the ΔT surfaces. Numbers denote different values of d in cm: 1 – 0.2; 2 – 0.4; 3 – 1.0; 4 – 1.5. Solid lines denote $a = 0.1 \text{ cm}$, dash lines $a = 1.0 \text{ cm}$; a is the normalized functions $\Delta T(r)$, b is absolute $\Delta T(a)$ at $r = 0$

С практической точки зрения особый интерес представляет взаимосвязь между распределением приращения температуры на поверхности среды и глубиной залегания источника (рис. 4). На рис. 4, *a* данные при $r = 0$ нормированы к единице и виден характер температурного размывания изображения торца цилиндрического источника. С ростом a кривые уплощаются, особенно сильно при малой теплоотдаче. С ростом h величина ΔT уменьшается. Расчеты показывают, что нормированные значения ΔT не зависят от z_0 . Изменение абсолютного значения температуры при $r = 0$ с ростом a представлено на рис. 4, *b*.

Остановимся на влиянии диаметра цилиндрического источника на «температурное пятно», создаваемое им на поверхности биоткани, когда источник находится у поверхности и на большой глубине, что представлено на рис. 5 при $q = 0,2$ Вт/см³, $z_0 = 0,2$ см, $h = 0,4$ см⁻¹. Видно, что при погружении источника тепла уже на глубину 1 см (прерывистые линии) его размер практически не проявляется в радиальном распределении температуры (рис. 5, *a*). В то же время абсолютные значения ΔT зависят от a и d (рис. 5, *b*).

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность В. В. Баруну за участие в разработке программы расчетов и обсуждение результатов.

Acknowledgements. The author is very grateful to V. V. Barun for participation in developing computation programs and in discussing the obtained results.

Список использованных источников

1. Draper, J. W. The calculation of skin temperature distribution in thermography / J. W. Draper, J. W. Boag // *Phys. Med. Biol.* – 1971. – Vol. 16, № 2. – P. 201–211.
2. Awbery, J. H. Heat flow when the boundary condition is Newtons's law / J. H. Awbery // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science.* – 1929. – Vol. 7, № 47. – P. 1143–1153.
3. Gustafsson, S. E. Torell Analytical calculation of the skin temperature distribution due to subcutaneous heat production in a spherical heat source (relevant to thermography) / S. E. Gustafsson, S. K. Nilsson, L. M. Torell // *Phys. Med. Biol.* – 1975. – Vol. 20, № 2. – P. 219–224.
4. Barun, V. V. Thermal action of a short light pulse on biological tissues / V. V. Barun, A. P. Ivanov // *Int. J. Heat Mass Transfer.* – 2003. – Vol. 46, № 17. – P. 3243–3254.
5. Carslaw, H. S. *Conduction of Heat in Solids* / H. S. Carslaw, J. C. Jaeger. – 2nd ed. – Oxford: Clarendon Press, 1959.

References

1. Draper J. W., Boag J. W. The calculation of skin temperature distribution in thermography. *Physics in Medicine and Biology*, 1971, vol. 16, no. 2, pp. 201–211. Doi: 10.1088/0031-9155/16/2/301
2. Awbery J. H. Heat flow when the boundary condition is Newtons's law. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1929, vol. 7, no. 47, pp. 1143–1153. Doi: 10.1080/14786440608564843
3. Gustafsson S. E., Nilsson S. K., Torell L. M. Analytical calculation of the skin temperature distribution due to subcutaneous heat production in a spherical heat source (relevant to thermography). *Physics in Medicine and Biology*, 1975, vol. 20, no. 2, pp. 219–224. Doi: 10.1088/0031-9155/20/2/003
4. Barun V. V., Ivanov A. P. Thermal action of a short light pulse on biological tissues. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2003, vol. 46, no. 17, pp. 3243–3254. Doi: 10.1016/s0017-9310(03)00124-8
5. Carslaw H. S., Jaeger J. C. *Conduction of Heat in Solids*. 2nd ed. Oxford: Clarendon Press, 1959. 510 p.

Информация об авторе

Иванов Аркадий Петрович – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ivanovap@dragon.bas-net.by

Information about the author

Arkady P. Ivanov – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Senior Researcher of the B. I. Stepanov Institute of Physics, National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ivanovap@dragon.bas-net.by