УДК 517.968

Г. А. РАСОЛЬКО

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ ЯДРОМ КОШИ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Белорусский государственный университет

(*Поступила в редакцию 13.09.2013*)

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение вида

$$\frac{1}{\pi^3}\iiint_D \frac{\varphi(t_1,t_2,t_3)}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)(t_3-x_3)}dt_1dt_2dt_3+\frac{1}{\pi^3}\iiint_D k(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)\varphi(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3= \\ =f(x_1,x_2,x_3),\quad (x_1,x_2,x_3)\in D=[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1], \tag{1}$$

где f, k – заданные функции своих аргументов, непрерывные по Гельдеру, φ –искомая функция, непрерывная по Гельдеру.

Как и в одномерном случае [1], решение уравнения (1) зависит от класса функций, в котором оно разыскивается. Вопросы обратимости простейших так называемых характеристических операторов с мультипликативным ядром Коши изучались в работах [2–6].

Для построения вычислительной схемы численного решения уравнения (1), основанной на разложении сингулярного и регулярного интегралов по многочленам Чебышева, применим известные «спектральные соотношения» для сингулярных интегралов [7]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-x}=U_{n-1}(x),\quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}U_{n-1}(t)\frac{dt}{t-x}=-T_n(x),\quad |x|<1,\quad n=0,1,2,\ldots, \tag{2}$$

где $T_n(x)$, $U_{n-1}(x)$ – многочлены Чебышева первого и второго рода, и приведем необходимые сведения из теории уравнения (1).

I. Рассмотрим вначале построение вычислительной схемы численного решения уравнения (1) в классе функций, ограниченных на всем замкнутом кубе D. Уравнение (1) эквивалентно (в смысле разрешимости) относительно функции $u(x_1,x_2,x_3)=\varphi(x_1,x_2,x_3)\Big/\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}$ интегральному уравнению Фредгольма вида

$$u(x_1,x_2,x_3)+\iiint_D N(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)u(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3=R(f;x_1,x_2,x_3), \tag{3}$$

$$N(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)=-\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}\times \\ \times\frac{1}{\pi^6}\iiint_D\frac{k(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t_1,t_2,t_3)}{\sqrt{(1-\xi_1^2)(1-\xi_2^2)(1-\xi_3^2)}}\frac{d\xi_1d\xi_2d\xi_3}{(\xi_1-x_1)(\xi_2-x_2)(\xi_3-x_3)},$$

где $R(f;x_1,x_2,x_3)=-\dfrac{1}{\pi^3}\iiint_D\dfrac{f(t_1,t_2,t_3)}{\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}}\dfrac{dt_1dt_2dt_3}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)(t_3-x_3)}$,

с присоединенными к нему уравнениями

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\pi^3}\iiint_D k(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}u(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3\right)\frac{dx_k}{\sqrt{1-x_k^2}} =$$
$$= \int_{-1}^{1}\frac{f(x_1,x_2,x_3)}{\sqrt{1-x_k^2}}dx_k, \quad k=1,2,3, \quad -1<x_1,x_2,x_3<1. \tag{4}$$

Если однородное уравнение (3) неразрешимо, то решение неоднородного уравнения (3) определяется формулой

$$u(x_1,x_2,x_3) = R(f;x_1,x_2,x_3) - \iiint_D \Gamma(x_1,x_2,x_3,\xi_1,\xi_2,\xi_3)R(f;\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \tag{5}$$

где $\Gamma(x_1,x_2,x_3,\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ – резольвента ядра $N(x_1,x_2,x_3,\xi_1,\xi_2,\xi_3)$.

Подставляя в (4) вместо $u(x_1,x_2,x_3)$ правую часть , получим условия вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\omega_k(x_1,x_2,x_3)f(x_1,x_2,x_3)\frac{dx_k}{\sqrt{1-x_k^2}} = 0, \quad k=1,2,3, \quad -1<x_1,x_2,x_3<1, \tag{6}$$

где ω_k – определенные функции.

Т е о р е м а 1. *Пусть функции* $k(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)$, $f(x_1,x_2,x_3)$, *входящие в уравнение* (1), *принадлежат классу Гельдера* (*по всем переменным*), *пусть*, *далее*, *однородное уравнение Фредгольма* (3) *неразрешимо. Тогда при выполнении условий* (*необходимых и достаточных*) (6) *решение уравнения* (1) *относительно функции* $u(x_1,x_2,x_3) = \varphi(x_1,x_2,x_3)\Big/\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}$ *определяется формулой* (5).

Построим приближенное решение уравнения (1). С этой целью функции нескольких переменных $k(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)$, $f(x_1,x_2,x_3)$ аппроксимируем интерполяционными многочленами, построенными по узлам – нулям многочлена Чебышева первого рода ([8, с. 89]).

Введем обозначения:

$$\delta_{p_j} = \begin{cases}1, & p_j=0,\\ 2, & p_j\ge 1,\end{cases} \quad x_j^{k_j} = \cos\frac{2k_j-1}{2n+2}\pi, \; k_j=\overline{1,n+1}, \; t_j^{q_j} = \cos\frac{2q_j-1}{2n}\pi, \; q_j=\overline{1,n}, \; j=1,2,3. \tag{7}$$

В следующих представлениях будем использовать обозначения (7).

Приближенное решение $u_{n-1}(x_1,x_2,x_3)$ найдем как точное решение уравнения

$$\frac{1}{\pi^3}\iiint_D \sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}\, u_{n-1}(t_1,t_2,t_3)\frac{dt_1dt_2dt_3}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)(t_3-x_3)} +$$
$$+\frac{1}{\pi^3}\iiint_D k_{n,n-1}(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}u_{n-1}(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3 = \tag{8}$$
$$= f_n(x_1,x_2,x_3)+Q_1(x_2,x_3)+Q_2(x_1,x_3)+Q_3(x_1,x_2), \quad -1<x_1,x_2,x_3<1,$$

где

$$k(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3) \approx k_{n,n-1}(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3) = \sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{n}\sum_{m_3=0}^{n}\sum_{p_1=0}^{n-1}\sum_{p_2=0}^{n-1}\sum_{p_3=0}^{n-1}\alpha_{m_1,m_2,m_3,p_1,p_2,p_3}\times$$
$$\times T_{m_1}(x_1)T_{m_2}(x_2)T_{m_3}(x_3)T_{p_1}(t_1)T_{p_2}(t_2)T_{p_3}(t_3), \tag{9}$$

$$\alpha_{m_1,m_2,m_3,p_1,p_2,p_3} = \frac{1}{(n^2+n)^3}\sum_{k_1=1}^{n+1}\delta_{m_1}T_{m_1}(x_1^{k_1})\sum_{k_2=1}^{n+1}\delta_{m_2}T_{m_2}(x_2^{k_2})\sum_{k_3=1}^{n+1}\delta_{m_3}T_{m_3}(x_3^{k_3})\times$$
$$\times\sum_{q_1=1}^{n}\delta_{p_1}T_{p_1}(t_1^{q_1})\sum_{q_2=1}^{n}\delta_{p_2}T_{p_2}(t_2^{q_2})\sum_{q_3=1}^{n}\delta_{p_3}T_{p_3}(t_3^{q_3})k(x_1^{k_1},x_2^{k_2},x_3^{k_3},t_1^{q_1},t_2^{q_2},t_3^{q_3}),$$

$$f(x_1,x_2,x_3) \approx f_n(x_1,x_2,x_3) = \sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{n}\sum_{m_3=0}^{n}\beta_{m_1,m_2,m_3}T_{m_1}(x_1)T_{m_2}(x_2)T_{m_3}(x_3), \tag{10}$$

$$\beta_{m_1,m_2,m_3}=\frac{1}{(n+1)^3}\sum_{k_1=1}^{n+1}\delta_{m_1}T_{m_1}(x_1^{k_1})\sum_{k_2=1}^{n+1}\delta_{m_2}T_{m_2}(x_2^{k_2})\sum_{k_3=1}^{n+1}\delta_{m_3}T_{m_3}(x_3^{k_3})f(x_1^{k_1},x_2^{k_2},x_3^{k_3}),$$

$$u_{n-1}(x_1,x_2,x_3)=\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-1}\sum_{k_3=0}^{n-1}c_{k_1,k_2,k_3}U_{k_1}(x_1)U_{k_2}(x_2)U_{k_3}(x_3),$$

c_{k_1,k_2,k_3} $(k_j=0,1,\ldots,n-1,\ j=1,2,3)$ – коэффициенты, подлежащие нахождению.

Вспомогательные многочлены $Q_1(x_2,x_3),Q_2(x_1,x_3),Q_3(x_1,x_2)$ определим так, чтобы для уравнения (8) были выполнены условия разрешимости

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(G_n(x_1,x_2,x_3)+Q_1(x_2,x_3)+Q_2(x_1,x_3)+Q_3(x_1,x_2))\frac{dx_k}{\sqrt{1-x_k^2}}=0,\ -1<x_1,x_2,x_3<1,\quad k=1,2,3,$$

$$G_n(x_1,x_2,x_3)=f_n(x_1,x_2,x_3)-\frac{1}{\pi^3}\iiint_D k_{n,n-1}(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}u_{n-1}(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3.$$

Нетрудно получить из предыдущего тождества

$$Q_1(x_2,x_3)+Q_2(x_1,x_3)+Q_3(x_1,x_2)=-\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{\pi}G_n(x_1,x_2,x_3)\frac{dx_k}{\sqrt{1-x_k^2}}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}G_n(x_1,x_2,x_3)\frac{dx_1dx_2}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}+\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}G_n(x_1,x_2,x_3)\frac{dx_1dx_3}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_3^2)}}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}G_n(x_1,x_2,x_3)\frac{dx_2dx_3}{\sqrt{(1-x_2^2)(1-x_3^2)}}-\frac{1}{\pi^3}\iiint_D G_n(x_1,x_2,x_3)\frac{dx_1dx_2dx_3}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}}.$$

В результате будем иметь следующее приближенное уравнение относительно неизвестной функции $u_{n-1}(x_1,x_2,x_3)$:

$$\frac{1}{\pi^3}\iiint_D\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}\,u_{n-1}(t_1,t_2,t_3)\frac{dt_1dt_2dt_3}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)(t_3-x_3)}+$$

$$+\frac{1}{\pi^3}\iiint_D k^*_{n,n-1}(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}\ u_{n-1}(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3= \tag{11}$$

$$=f_n^*(x_1,x_2,x_3),\quad -1<x_1,x_2,x_3<1,$$

где

$$k^*_{n,n-1}(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)=k_{n,n-1}(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)+W_n(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3),$$

$$W_n(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)=-\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}k_{n,n-1}(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)\frac{dx_k}{\sqrt{1-x_k^2}}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{k_{n,n-1}(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)dx_1dx_2}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}+\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{k_{n,n-1}(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)dx_1dx_3}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_3^2)}}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{k_{n,n-1}(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)dx_2dx_3}{\sqrt{(1-x_2^2)(1-x_3^2)}}-\frac{1}{\pi^3}\iiint_D\frac{k_{n,n-1}(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)dx_1dx_2dx_3}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}},$$

$$f_n^*(x_1,x_2,x_3)=f_n(x_1,x_2,x_3)+V_n(x_1,x_2,x_3),$$

$$V_n(x_1,x_2,x_3)=-\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}f_n(x_1,x_2,x_3)\frac{dx_k}{\sqrt{1-x_k^2}}+\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{f_n(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{f_n(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_3}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_3^2)}}+\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{f_n(x_1,x_2,x_3)dx_2dx_3}{\sqrt{(1-x_2^2)(1-x_3^2)}}-\frac{1}{\pi^3}\iiint_D\frac{f_n(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}}.$$

Пользуясь формулой

$$J_k = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,U_k(t)dt = \begin{cases} 1/2, & k=0, \\ -1/2, & k=-2, \\ 0, & k\neq 0,\ k\neq -2, \end{cases} \tag{12}$$

упростим интегралы, входящие в многочлены $W_n(x_1,x_2,x_3)$, $V_n(x_1,x_2,x_3)$, и этим получим их представление через многочлены $T_{m_j}(x_j)$, $m_j = 0,1,\dots,n.$ Имеем

$$k^*_{n,n-1}(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3) =$$

$$= \sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{n}\sum_{m_3=0}^{n}\sum_{p_1=0}^{n-1}\sum_{p_2=0}^{n-1}\sum_{p_3=0}^{n-1}\alpha_{m_1,m_2,m_3,p_1,p_2,p_3}T_{m_1}(x_1)T_{m_2}(x_2)T_{m_3}(x_3)T_{p_1}(t_1)T_{p_2}(t_2)T_{p_3}(t_3) -$$

$$-\sum_{m_2=0}^{n}\sum_{m_3=0}^{n}\sum_{p_1=0}^{n-1}\sum_{p_2=0}^{n-1}\sum_{p_3=0}^{n-1}\alpha_{0,m_2,m_3,p_1,p_2,p_{33}}T_{m_2}(x_2)T_{m_3}(x_3)T_{p_1}(t_1)T_{p_2}(t_2)T_{p_3}(t_3) -$$

$$-\sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_3=0}^{n}\sum_{p_1=0}^{n-1}\sum_{p_2=0}^{n-1}\sum_{p_3=0}^{n-1}\alpha_{m_1,0,m_3,p_1,p_2,p_3}T_{m_1}(x_1)T_{m_3}(x_3)T_{p_1}(t_1)T_{p_2}(t_2)T_{p_3}(t_3) -$$

$$-\sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{n}\sum_{p_1=0}^{n-1}\sum_{p_2=0}^{n-1}\sum_{p_3=0}^{n-1}\alpha_{m_1,m_2,0,p_1,p_2,p_3}T_{m_1}(x_1)T_{m_2}(x_2)T_{p_1}(t_1)T_{p_2}(t_2)T_{p_3}(t_3) +$$

$$+\sum_{m_1=0}^{n}\sum_{p_1=0}^{n-1}\sum_{p_2=0}^{n-1}\sum_{p_3=0}^{n-1}\alpha_{m_1,0,0,p_1,p_2,p_3}T_{m_1}(x_1)T_{p_1}(t_1)T_{p_2}(t_2)T_{p_3}(t_3) +$$

$$+\sum_{m_2=0}^{n}\sum_{p_1=0}^{n-1}\sum_{p_2=0}^{n-1}\sum_{p_3=0}^{n-1}\alpha_{0,m_2,0,p_1,p_2,p_3}T_{m_2}(x_2)T_{p_1}(t_1)T_{p_2}(t_2)T_{p_3}(t_3) +$$

$$+\sum_{m_3=0}^{n}\sum_{p_1=0}^{n-1}\sum_{p_2=0}^{n-1}\sum_{p_3=0}^{n-1}\alpha_{0,0,m_3,p_1,p_2,p_3}T_{m_3}(x_3)T_{p_1}(t_1)T_{p_2}(t_2)T_{p_3}(t_3) -$$

$$-\sum_{p_1=0}^{n-1}\sum_{p_2=0}^{n-1}\sum_{p_3=0}^{n-1}\alpha_{0,0,0,p_1,p_2,p_3}T_{p_1}(t_1)T_{p_2}(t_2)T_{p_3}(t_3),$$

$$f^*_n(x_1,x_2,x_3) = \sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{n}\sum_{m_3=0}^{n}\beta_{m_1,m_2,m_3}T_{m_1}(x_1)T_{m_2}(x_2)T_{m_3}(x_3) -$$

$$-\sum_{m_2=0}^{n}\sum_{m_3=0}^{n}\beta_{0,m_2,m_3}T_{m_2}(x_2)T_{m_3}(x_3) - \sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_3=0}^{n}\beta_{m_1,0,m_3}T_{m_1}(x_1)T_{m_3}(x_3) -$$

$$-\sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{n}\beta_{m_1,m_2,0}T_{m_1}(x_1)T_{m_2}(x_2) + \sum_{m_1=0}^{n}\beta_{m_1,0,0}T_{m_1}(x_1) +$$

$$+\sum_{m_2=0}^{n}\beta_{0,m_2,0}T_{m_2}(x_2) + \sum_{m_3=0}^{n}\beta_{0,0,m_3}T_{m_3}(x_3) - \beta_{0,0,0}.$$

Применяя в (11) свойство линейности интеграла и переходя от кратных интегралов к повторным, учтя аппроксимации (9), (10) и спектральные соотношения (2), из (11) получим:

$$\begin{gathered} -\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-1}\sum_{k_3=0}^{n-1}c_{k_1,k_2,k_3}T_{k_1+1}(x_1)T_{k_2+1}(x_2)T_{k_3+1}(x_3) + \\ +\sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{n}\sum_{m_3=0}^{n}\sum_{p_1=0}^{n-1}\sum_{p_2=0}^{n-1}\sum_{p_3=0}^{n-1}\alpha^*_{m_1,m_2,m_3,p_1,p_2,p_3}T_{m_1}(x_1)T_{m_2}(x_2)T_{m_3}(x_3)\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-1}\sum_{k_3=0}^{n-1}c_{k_1,k_2,k_3}\times \\ \times\prod_{j=1}^{3}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t_j^2}\,T_{p_j}(t_j)U_{k_j}(t_j)dt_j = \sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{n}\sum_{m_3=0}^{n}\beta^*_{m_1,m_2,m_3}T_{m_1}(x_1)T_{m_2}(x_2)T_{m_3}(x_3). \end{gathered} \tag{13}$$

Используя формулы $2T_p(x)U_k(x) = U_{p-k}(x) + U_{p+k}(x)$ и (12), упростим интегралы, входящие в (13). Приравнивая в (13) коэффициенты при одинаковых многочленах $T_{m_1}(x_1),\ T_{m_2}(x_2), T_{m_3}(x_3)$, $m_j > 0,\ j = 1,2,3,$ для нахождения c_{k_1,k_2,k_3} $(k_j = 0,1,\dots,n-1,\ j = 1,2,3)$ получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$-c_{m_1-1,m_2-1,m_3-1} + \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-1}\sum_{k_3=0}^{n-1} c_{k_1,k_2,k_3}\,\mu_{m_1,m_2,m_3,k_1,k_2,k_3} = \beta_{m_1,m_2,m_3},\quad m_j = 1,2,\dots,n,\quad j = 1,2,3, \tag{14}$$

$$\mu_{m_1,m_2,m_3,k_1,k_2,k_3} =$$

$$= \frac{1}{8}\sum_{p_1=0}^{n-1}\sum_{p_2=0}^{n-1}\sum_{p_3=0}^{n-1} \alpha_{m_1,m_2,m_3,p_1,p_2,p_3}(J_{p_1-k_1} + J_{p_1+k_1})(J_{p_2-k_2} + J_{p_2+k_2})(J_{p_3-k_3} + J_{p_3+k_3}).$$

Приведем теорему, устанавливающую разрешимость системы (14).

Введем класс функций $W^rH(\mu),\quad r \ge 1,\quad 0 < \mu \le 1.$

Мы говорим, что функция $f(x_1,x_2,x_3) \in W^rH(\mu),\ r \ge 1,$ если она по каждой переменной имеет производные до порядка $r \ge 1$ и r-я производная из класса $H(\mu),\ 0 < \mu \le 1.$

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Если* $k \in W^rH(\mu), f \in W^rH(\mu), r \ge 1,\ 0 < \mu \le 1,$ *то при достаточно больших n система* (14) *разрешима и*

$$\| u(x_1,x_2,x_3) - u_{n+1}(x_1,x_2,x_3) \|_C = O\left(\frac{\ln^6 n}{n^{r+\mu-3}}\right),\quad r + \mu - 3 > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится по схеме работы [9].

II. Далее будем разыскивать решение $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ в классе H*. Это означает, что $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ в любой замкнутой области из D, не содержащей граничных точек, принадлежит классу H, а вблизи граничных точек представима в виде

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = (x_1+1)^{\alpha_1}(x_1-1)^{\beta_1}(x_2+1)^{\alpha_2}(x_2-1)^{\beta_2}(x_3+1)^{\alpha_3}(x_3-1)^{\beta_3}\varphi_0(x_1,x_2,x_3),$$

где $\varphi_0(x_1,x_2,x_3) \in H,\ -1 < \alpha_j,\ \beta_j \le 0,\ j = 1,2,3.$

Известно, что решение задачи

$$\frac{1}{\pi^3}\iiint_D \frac{\varphi(t_1,t_2,t_3)}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)(t_3-x_3)}dt_1dt_2dt_3 = f(x_1,x_2,x_3),\quad (x_1,x_2,x_3) \in D, \tag{15}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t_1,x_2,x_3)dt_1 = g_1(x_2,x_3),\quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(x_1,t_2,x_3)dt_2 = g_2(x_1,x_2),\\ \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(x_1,x_2,t_3)dt_3 = g_3(x_1,x_2),\quad -1 < x_1,x_2,x_3 < 1,\end{gathered} \tag{16}$$

где $g_1(x_2,x_3),\ g_2(x_1,x_2),\ g_3(x_1,x_2)$ – заданные функции класса H*, удовлетворяющие следующим условиям согласования:

$$\int_{-1}^{1} g_1(t_2,x_3)dt_2 = \int_{-1}^{1} g_2(t_1,x_3)dt_1,\ \int_{-1}^{1} g_1(x_2,t_3)dt_3 = \int_{-1}^{1} g_3(t_1,x_2)dt_1,\ \int_{-1}^{1} g_2(x_1,t_3)dt_3 = \int_{-1}^{1} g_3(x_1,t_2)dt_2, \tag{17}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g_1(t_2,t_3)dt_2dt_3 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g_2(t_1,t_3)dt_1dt_3 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g_3(t_1,t_2)dt_1dt_2 = \pi^2 A,$$

согласно [5], дается формулой

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = \frac{R(f;x_1,x_2,x_3)}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}} + G(x_1,x_2,x_3), \tag{18}$$

где

$$R(f;x_1,x_2,x_3) = -\frac{1}{\pi^3}\iiint_D \frac{\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)(t_3-x_3)} f(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3, \tag{19}$$

$$G(x_1,x_2,x_3)=\frac{g_1(x_2,x_3)}{\sqrt{1-x_1^2}}+\frac{g_2(x_1,x_3)}{\sqrt{1-x_2^2}}+\frac{g_3(x_1,x_2)}{\sqrt{1-x_3^2}}-\frac{1}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}g_1(t_2,x_3)dt_2-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_3^2)}}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}g_3(t_1,x_2)dt_1-\frac{1}{\sqrt{(1-x_2^2)(1-x_3^2)}}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}g_2(x_1,t_3)dt_3+\frac{A}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}}.$$

Обратимся теперь к уравнению (1) и присоединим к нему условия (16). Полагая

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=\varphi^*(x_1,x_2,x_3)+\psi(x_1,x_2,x_3),$$

от задачи (1), (16), (17) приходим к двум задачам:

$$\frac{1}{\pi^3}\iiint_D\frac{\varphi^*(t_1,t_2,t_3)}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)(t_3-x_3)}dt_1dt_2dt_3=0,\quad (x_1,x_2,x_3)\in D, \tag{20}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi^*(t_1,x_2,x_3)dt_1=g_1(x_2,x_3),\quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi^*(x_1,t_2,x_3)dt_2=g_2(x_1,x_2),\\ \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi^*(x_1,x_2,t_3)dt_3=g_3(x_1,x_2),\quad \frac{1}{\pi^3}\iiint_D\varphi^*(t_1,t_2,t_3)dt_3=A,\ -1<x_1,x_2,x_3<1,\end{gathered} \tag{21}$$

и

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi^3}\iiint_D\frac{\psi(t_1,t_2,t_3)}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)(t_3-x_3)}dt_1dt_2dt_3+\frac{1}{\pi^3}\iiint_D k(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)\psi(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3=\\ =f^*(x_1,x_2,x_3),\quad (x_1,x_2,x_3)\in D,\end{gathered} \tag{22}$$

где

$$f^*(x_1,x_2,x_3)=f(x_1,x_2,x_3)-\frac{1}{\pi^3}\iiint_D k(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)\varphi^*(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3.$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\psi(t_1,x_2,x_3)dt_1=0,\ \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\psi(x_1,t_2,x_3)dt_2=0,\ \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\psi(x_1,x_2,t_3)dt_3=0,\\ -1<x_1,x_2,x_3<1.\end{gathered} \tag{23}$$

Согласно (18), (19), решение задачи (20), (21) определяется формулой

$$\varphi^*(x_1,x_2,x_3)=G(x_1,x_2,x_3),$$

а задача (22), (23) эквивалентна в смысле разрешимости интегральному уравнению Фредгольма

$$u(x_1,x_2,x_3)+\iiint_D N(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)u(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3=F(x_1,x_2,x_3), \tag{24}$$

где

$$N(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}}\frac{1}{\pi^6}\iiint_D\sqrt{(1-\xi_1^2)(1-\xi_2^2)(1-\xi_3^2)}\frac{k(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t_1,t_2,t_3)d\xi_1d\xi_2d\xi_3}{(\xi_1-x_1)(\xi_2-x_2)(\xi_3-x_3)},$$

$$F(x_1,x_2,x_3)=-\frac{1}{\pi^3}\iiint_D\sqrt{(1-\xi_1^2)(1-\xi_2^2)(1-\xi_3^2)}\frac{f^*(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\xi_1d\xi_2d\xi_3}{(\xi_1-x_1)(\xi_2-x_2)(\xi_3-x_3)},$$

$$\psi(x_1,x_2,x_3)=u(x_1,x_2,x_3)\Big/\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}.$$

Пусть однородное уравнение (24) неразрешимо (имеет только нулевое решение). Тогда решение неоднородного уравнения (24) дается формулой

$$u(x_1,x_2,x_3)=F(x_1,x_2,x_3)-\iiint_D\Gamma(x_1,x_2,x_3,\xi_1,\xi_2,\xi_3)F(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\xi_1d\xi_2d\xi_3,$$

где $\Gamma(x_1,x_2,x_3,\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ – резольвента ядра $N(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)$.

Т е о р е м а 3. *Пусть функции* $k(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3), f(x_1,x_2,x_3)$, *входящие в уравнение* (1), *принадлежат классу Гельдера* (*по всем переменным*), *функции* $g_1(x_2,x_3)$, $g_2(x_1,x_3)$, $g_3(x_1,x_2)$, *входящие в* (21), *принадлежат классу H*, пусть, далее, однородное уравнение Фредгольма* (24) *неразрешимо. Тогда задача* (1), (16), (17) *имеет единственное решение, представимое в виде*

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=\frac{u(x_1,x_2,x_3)}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}}+\frac{g_1(x_2,x_3)}{\sqrt{1-x_1^2}}+\frac{g_2(x_1,x_3)}{\sqrt{1-x_2^2}}+\frac{g_3(x_1,x_2)}{\sqrt{1-x_3^2}}-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}g_1(t_2,x_3)dt_2-\frac{1}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_3^2)}}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}g_3(t_1,x_2)dt_1-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{(1-x_2^2)(1-x_3^2)}}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}g_2(x_1,t_3)dt_3+\frac{A}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}},$$

где $u(x_1,x_2,x_3)$ *– решение задачи* (24).

Введем обозначения:

$$h_1(x_2,x_3)=\sqrt{(1-x_2^2)(1-x_3^2)}\;g_1(x_2,x_3),\quad h_2(x_1,x_3)=\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_3^2)}\;g_2(x_1,x_3),$$
$$h_3(x_1,x_2)=\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}\;g_3(x_1,x_2),\quad G^*(x_1,x_2,x_3)=\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}G(x_1,x_2,x_3),$$

т. е.

$$G^*(x_1,x_2,x_3)=h_1(x_2,x_3)+h_2(x_1,x_3)+h_3(x_1,x_2)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h_1(t_2,x_3)}{\sqrt{(1-t_2^2)}}dt_2-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h_3(t_1,x_2)}{\sqrt{(1-t_1^2)}}dt_1-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h_2(x_1,t_3)}{\sqrt{(1-t_3^2)}}dt_3+A.$$

Построим приближенное решение задачи (22), (23). С этой целью функции нескольких переменных k, f, h_1, h_2, h_3 аппроксимируем интерполяционными многочленами, построенными по узлам – нулям многочлена Чебышева первого рода [8].

Введем обозначения:

$$\sigma_{m_j}=\begin{cases}1, & m_j=0,1,\ldots,n-2,\\ 0, & m_j=n-1,n,\end{cases}\qquad \delta_{p_j}=\begin{cases}1, & p_j=0,\\ 2, & p_j\ge 1,\end{cases}\qquad \omega(m,x)=T_m(x)-\sigma(m)T_{m+2}(x),$$
$$x_j^{k_j}=\cos\frac{2k_j-1}{2n+2}\pi,\quad k_j=1,2,\ldots,n+1,\quad t_j^{q_j}=\cos\frac{2q_j-1}{2n+4}\pi,\quad q_j=1,2,\ldots,n+2,\quad j=1,2,3. \tag{25}$$

В следующих представлениях будем использовать обозначения (25).

$$k(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)\approx k_{n,n+1}(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)=\sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{n}\sum_{m_3=0}^{n}\sum_{p_1=0}^{n+1}\sum_{p_2=0}^{n+1}\sum_{p_3=0}^{n+1}\alpha_{m_1,m_2,m_3,p_1,p_2,p_3}\times$$
$$\times U_{m_1}(x_1)U_{m_2}(x_2)U_{m_3}(x_3)T_{p_1}(t_1)T_{p_2}(t_2)T_{p_3}(t_3), \tag{26}$$

где

$$\alpha_{m_1,m_2,m_3,p_1,p_2,p_3}=\frac{1}{(n+2)^3(n+1)^3}\sum_{k_1=1}^{n+1}\omega(m_1,x_1^{k_1})\sum_{k_1=1}^{n+1}\omega(m_2,x_2^{k_2})\sum_{k_1=1}^{n+1}\omega(m_3,x_3^{k_3})\times$$
$$\times\sum_{q_1=1}^{n+2}\delta_{p_1}T_{p_1}(t_1^{q_1})\sum_{q_2=1}^{n+2}\delta_{p_2}T_{p_2}(t_2^{q_2})\sum_{q_3=1}^{n+2}\delta_{p_3}T_{p_3}(t_3^{q_3})\,k(x_1^{k_1},x_2^{k_2},x_3^{k_3},t_1^{q_1},t_2^{q_2},t_3^{q_3}),$$

$$f(x_1,x_2,x_3)\approx f_n(x_1,x_2,x_3)=\sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{n}\sum_{m_3=0}^{n}\beta_{m_1,m_2,m_3}U_{m_1}(x_1)U_{m_2}(x_2)U_{m_3}(x_3), \tag{27}$$

где $\beta_{m_1,m_2,m_3}=\dfrac{1}{(n+1)^3}\sum\limits_{k_1=1}^{n+1}\omega(m_1,x_1^{k_1})\sum\limits_{k_2=1}^{n+1}\omega(m_2,x_2^{k_2})\sum\limits_{k_3=1}^{n+1}\omega(m_3,x_3^{k_3})f(x_1^{k_1},x_2^{k_2},x_3^{k_3}),$

$$h_1(x_2,x_3)\approx h_{1,n+1}(x_2,x_3)=\sum_{p_2=0}^{n+1}\sum_{p_3=0}^{n+1}\gamma^1_{p_2,p_3}T_{p_2}(x_2)T_{p_3}(x_3), \tag{28}$$

где $\gamma^1_{p_2,p_3}=\dfrac{1}{(n+2)^2}\sum\limits_{q_2=1}^{n+2}\delta_{p_2}T_{p_2}(x_2^{q_2})\sum\limits_{q_3=1}^{n+2}\delta_{p_3}T_{p_3}(x_3^{q_3})\,h_1(x_2^{p_2},x_3^{p_3})$,

$$h_2(x_1,x_3)\approx h_{2,n+1}(x_1,x_3)=\sum_{p_1=0}^{n+1}\sum_{p_3=0}^{n+1}\gamma^2_{p_1,p_3}T_{p_1}(x_1)T_{p_3}(x_3), \tag{29}$$

где $\gamma^2_{p_1,p_3}=\dfrac{1}{(n+2)^2}\sum\limits_{q_1=1}^{n+2}\delta_{p_1}T_{p_1}(x_1^{q_1})\sum\limits_{q_3=1}^{n+2}\delta_{p_3}T_{p_3}(x_3^{q_3})\,h_2(x_1^{p_1},x_3^{p_3})$,

$$h_3(x_1,x_2)\approx h_{3,n+1}(x_1,x_2)=\sum_{p_1=0}^{n+1}\sum_{p_2=0}^{n+1}\gamma^3_{p_1,p_2}T_{p_1}(x_1)T_{p_2}(x_2), \tag{30}$$

где $\gamma^3_{p_1,p_2}=\dfrac{1}{(n+2)^2}\sum\limits_{q_1=1}^{n+2}\delta_{p_1}T_{p_1}(x_1^{q_1})\sum\limits_{q_2=1}^{n+2}\delta_{p_2}T_{p_2}(x_2^{q_2})\,h_3(x_1^{p_1},x_2^{p_2})$,

$$\begin{aligned}G^*(x_1,x_2,x_3)\approx G^*_{n+1}(x_1,x_2,x_3)&=h_{1,n+1}(x_2,x_3)+h_{2,n+1}(x_1,x_3)+h_{3,n+1}(x_1,x_2)-\\&-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h_{1,n+1}(t_2,x_3)}{\sqrt{(1-t_2^2)}}dt_2-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h_{3,n+1}(t_1,x_2)}{\sqrt{(1-t_1^2)}}dt_1-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h_{2,n+1}(x_1,t_3)}{\sqrt{(1-t_3^2)}}dt_3+A.\end{aligned} \tag{31}$$

Учитывая, что

$$I_k=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_k(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=\begin{cases}1, & k=0,\\ 0, & k\neq 0,\end{cases} \tag{32}$$

упростим интегралы, входящие в $G^*_{n+1}(x_1,x_2,x_3)$, и вследствие этого получим представление этой функции по многочленам Чебышева первого рода:

$$\begin{aligned}G^*_{n+1}(x_1,x_2,x_3)&=\sum_{p_2=0}^{n+1}\sum_{p_3=0}^{n+1}\gamma^1_{p_2,p_3}T_{p_2}(x_2)T_{p_3}(x_3)+\sum_{p_1=0}^{n+1}\sum_{p_3=0}^{n+1}\gamma^2_{p_1,p_3}T_{p_1}(x_1)T_{p_3}(x_3)+\\&+\sum_{p_1=0}^{n+1}\sum_{p_2=0}^{n+1}\gamma^3_{p_1,p_2}T_{p_1}(x_1)T_{p_2}(x_2)-\sum_{p_3=0}^{n+1}\gamma^1_{0,p_3}T_{p_3}(x_3)-\sum_{p_2=0}^{n+1}\gamma^3_{0,p_2}T_{p_2}(x_2)-\sum_{p_1=0}^{n+1}\gamma^2_{p_1,0}T_{p_1}(x_1)+A.\end{aligned}$$

Приближенное решение задачи (22), (23) найдем как точное решение задачи

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi^3}\iiint_D\frac{u_{n+1}(t_1,t_2,t_3)}{\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}}\frac{dt_1dt_2dt_3}{(t_1-x_1)(t_2-x_2)(t_3-x_3)}+\\&+\frac{1}{\pi^3}\iiint_D k_{n,n+1}(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)\frac{u_{n+1}(t_1,t_2,t_3)}{\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}}dt_1dt_2dt_3=F_n(x_1,x_2,x_3),\end{aligned} \tag{33}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{u_{n+1}(t_1,x_2,x_3)}{\sqrt{1-t_1^2}}dt_1=0,\ \int_{-1}^{1}\frac{u_{n+1}(x_1,t_2,x_3)}{\sqrt{1-t_2^2}}dt_2=0,\ \int_{-1}^{1}\frac{u_{n+1}(x_1,x_2,t_3)}{\sqrt{1-t_3^2}}dt_3=0,\ -1<x_1,x_2,x_3<1, \tag{34}$$

где

$$F_n(x_1,x_2,x_3)=f_n(x_1,x_2,x_3)-\frac{1}{\pi^3}\iiint_D k_{n,n+1}(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)G^*_{n+1}(t_1,t_2,t_3)\frac{dt_1dt_2dt_3}{\sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}},$$

$$u_{n+1}(x_1,x_2x_3)=\sum_{k_1=0}^{n+1}\sum_{k_2=0}^{n+1}\sum_{k_3=0}^{n+1}c_{k_1,k_2,k_3}T_{k_1}(x_1)T_{k_2}(x_2)T_{k_3}(x_3),$$

c_{k_1,k_2,k_3} $(k_j=0,1,\ldots,n+1,\ j=1,2,3)$ – коэффициенты, подлежащие нахождению.

Применяя в (33) свойство линейности интеграла и переходя от кратных интегралов к повторным, пользуясь спектральными соотношениями (2), формулами (32) и $2\,T_k(x)T_p(x)=$

$=T_{k-p}(x)+T_{k+p}(x)$, а также аппроксимациями (26)–(31), и вводя обозначения $J(p,k)=I_{|k-p|}+I_{k+p}$, от (33) придем к равенствам

$$\sum_{k_1=1}^{n+1}\sum_{k_2=1}^{n+1}\sum_{k_3=1}^{n+1} c_{k_1,k_2,k_3}U_{k_1-1}(x_1)U_{k_2-1}(x_2)U_{k_3-1}(x_3)+$$
$$+\sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{n}\sum_{m_3=0}^{n}\sum_{p_1=0}^{n+1}\sum_{p_2=0}^{n+1}\sum_{p_3=0}^{n+1}\alpha_{m_1,m_2,m_3,p_1,p_2,p_3}U_{m_1}(x_1)U_{m_2}(x_2)U_{m_3}(x_3)\times$$
$$\times\sum_{k_1=0}^{n+1}\sum_{k_2=0}^{n+1}\sum_{k_3=0}^{n+1}c_{k_1,k_2,k_3}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_{p_1}(t_1)T_{k_1}(t_1)}{\sqrt{1-t_1^2}}dt_1\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_{p_2}(t_2)T_{k_2}(t_2)}{\sqrt{1-t_2^2}}dt_2\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_{p_3}(t_3)T_{k_3}(t_3)}{\sqrt{1-t_3^2}}dt_3= \tag{35}$$
$$=\sum_{m_1=0}^{n}\sum_{m_2=0}^{n}\sum_{m_3=0}^{n}\beta^{*}_{m_1,m_2,m_3}U_{m_1}(x_1)U_{m_2}(x_2)U_{m_3}(x_3),$$

где

$$\beta^{*}_{m_1,m_2,m_3}=\beta_{m_1,m_2,m_3}-\sum_{p_2=0}^{n+1}\sum_{p_3=0}^{n+1}\frac{\alpha_{m_1,m_2,m_3,0,p_2,p_3}}{4}\sum_{q_2=0}^{n+1}\sum_{q_3=0}^{n+1}\gamma^{1}_{q_2,q_3}J(p_2,q_2)J(p_3,q_3)-$$
$$-\sum_{p_1=0}^{n+1}\sum_{p_3=0}^{n+1}\frac{\alpha_{m_1,m_2,m_3,p_1,0,p_3}}{4}\sum_{q_1=0}^{n+1}\sum_{q_3=0}^{n+1}\gamma^{2}_{q_1,q_3}J(p_1,q_1)J(p_3,q_3)-$$
$$-\sum_{p_1=0}^{n+1}\sum_{p_2=0}^{n+1}\frac{\alpha_{m_1,m_2,m_3,p_1,p_2,0}}{4}\sum_{q_1=0}^{n+1}\sum_{q_2=0}^{n+1}\gamma^{3}_{q_1,q_2}J(p_1,q_1)J(p_2,q_2)+$$
$$+\sum_{p_3=0}^{n+1}\frac{\alpha_{m_1,m_2,m_3,0,0,p_3}}{2}\sum_{q_3=0}^{n+1}\gamma^{1}_{0,q_3}J(p_3,q_3)+\sum_{p_2=0}^{n+1}\frac{\alpha_{m_1,m_2,m_3,0,p_2,0}}{2}\sum_{q_2=0}^{n+1}\gamma^{3}_{0,q_2}J(p_2,q_2)+$$
$$+\sum_{p_1=0}^{n+1}\frac{\alpha_{m_1,m_2,m_3,p_1,0,0}}{2}\sum_{q_1=0}^{n+1}\gamma^{2}_{q_1,0}J(p_1,q_1)-\alpha_{m_1,m_2,m_3,0,0,0}\,A.$$

Приравнивая в (35) коэффициенты при одинаковых многочленах $U_{m_1}(x_1),\ U_{m_2}(x_2), U_{m_3}(x_3)$, для нахождения c_{k_1,k_2,k_3} $(k_j=0,1,\ldots,n+1,\ j=1,2,3)$ получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$c_{m_1+1,m_2+1,m_3+1}+\sum_{k_1=0}^{n+1}\sum_{k_2=0}^{n+1}\sum_{k_3=0}^{n+1}c_{k_1,k_2,k_3}\,\mu_{m_1,m_2,m_3,k_1,k_2,k_3}=\beta^{*}_{m_1,m_2,m_3},\ m_j=0,1,\ldots,n,\ \ j=1,2,3. \tag{36}$$

где

$$\mu_{m_1,m_2,m_3,k_1,k_2,k_3}=\frac{1}{8}\sum_{p_1=0}^{n+1}\sum_{p_2=0}^{n+1}\sum_{p_3=0}^{n+1}\alpha_{m_1,m_2,m_3,p_1,p_2,p_3}\left[I_{|p_1-k_1|}+I_{p_1+k_1}\right]\left[I_{|p_2-k_2|}+I_{p_2+k_2}\right]\times$$
$$\times\left[I_{|p_3-k_3|}+I_{p_3+k_3}\right],\ m_j=0,1,\ldots,n,\quad k_j=0,1,\ldots,n+1,\quad j=1,2,3.$$

Система (36) содержит $(N+2)^3$ неизвестных и $(N+1)^3$ уравнений, однако, учитывая в (34) тот факт, что многочлены Чебышева образуют на отрезке [–1, 1] линейно независимую систему, из (34) приходим к выводу, что все коэффициенты c_{k_1,k_2,k_3}, имеющие хотя бы один нулевой индекс, равны нулю. Исключив соответствующие столбцы из (36), получаем систему линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей:

$$c_{m_1+1,m_2+1,m_3+1}+\sum_{k_1=1}^{n+1}\sum_{k_2=1}^{n+1}\sum_{k_3=1}^{n+1}c_{k_1,k_2,k_3}\,\mu_{m_1,m_2,m_3,k_1,k_2,k_3}=\beta^{*}_{m_1,m_2,m_3},\quad m_j=0,1,\ldots,n,\ \ j=1,2,3. \tag{37}$$

Т е о р е м а 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Если* $k\in W^rH(\mu), f\in W^rH(\mu)$, $h_1\in W^rH(\mu),\ h_2\in W^rH(\mu),\ h_3\in W^rH(\mu),\ r\ge 1,\ 0<\mu\le 1$, *то при достаточно больших n система* (37) *разрешима и* $\|u(x_1,x_2,x_3)-u_{n+1}(x_1,x_2,x_3)\|_C=O\left(\dfrac{\ln^6 n}{n^{r+\mu-3}}\right),\ \ r+\mu-3>0.$

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится по схеме работы [9].

Литература

1. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
2. *Лифанов И. К.* // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249, № 6. С. 1306–1309.
3. *Шешко М. А.* // Докл АН БССР. 1980. Т. 24, № 10. С. 888–891.
4. *Расолько Г. А.* // Дифференц. уравнения. 1987. 14 с. (Деп. в ВИНИТИ 12.03.87, № 1808–В87).
5. *Шешко М. А., Расолько Г. А.* // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 5. С. 911–915.
6. *Расолько Г. А., Шешко М. А.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 6. С. 1092–1097.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М., 1966. Т. 2.
8. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М., 1983.
9. *Шешко М. А.* Сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши и Гильберта и их приближенное решение. Люблин, 2003.

G. A. RASOLKO

APPROXIMATE SOLUTION OF THE FIRST-KIND INTEGRAL EQUATION WITH THE MULTIPLICATIVE CAUCHY KERNEL BY THE METHOD OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS

Summary

The computing scheme of numerical solution of the first-kind integral equation with the triple Cauchy kernel in classes of bounded and unbounded functions by the method of orthogonal polynomials is obtained.