ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.958 Поступила в редакцию 14.03.2018
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-135-148 Received 14.03.2018

В. И. Корзюк[1,2], Нгуен Ван Винь[1,3]

[1]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
[2]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
[3]Хюэский университет, Хюэ, Вьетнам

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ

Аннотация. Изучается классическое решение граничной задачи для строго гиперболического уравнения четвертого порядка в случае двух независимых переменных с четырьмя различными семействами характеристик. Заметим, что корректная постановка смешанных задач для гиперболических уравнений зависит не только от количества характеристик, но также и от их расположения. Оператор уравнения представляет собой композицию дифференциальных операторов первого порядка. Уравнение задается в полуполосе двух независимых переменных. На нижнем основании области задаются условия Коши, а на боковых границах – периодические условия. Методом характеристик выписывается в аналитическом виде решение рассматриваемой задачи. Доказывается единственность решения. Заметим также, что решение во всей заданной области представляет собой композицию найденных решений в некоторых подобластях. Таким образом, для того чтобы найденное классическое решение обладало искомой гладкостью, необходимо, чтобы на границе данных подобластей значения этих кусочных решений, а также их производных до четвертого порядка, совпадали. Под классическим решением понимается функция, которая определена во всех точках замыкания заданной области и имеет все классические производные, входящие в уравнение и условия задачи.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, гиперболические уравнения, уравнения четвертого порядка, частные производные, граничные условия, условия Коши, периодические условия, условия согласования, классическое решение, строгое гиперболическое уравнение

Для цитирования. Корзюк, В. И. Смешанная задача для одномерного гиперболического уравнения четвертого порядка с периодическими условиями / В. И. Корзюк, Нгуен Ван Винь // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 135–148. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-135-148

V. I. Korzyuk[1,2], Nguyen Van Vinh[1,3]

[1]Belarusian State University, Minsk, Belarus
[2]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
[3]Hue University's College of Education, Hue, Vietnam

A MIXED PROBLEM FOR THE FOUR-ORDER ONE-DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATION WITH PERIODIC CONDITIONS

Abstract. This article considers a classical solution of the boundary problem for the four-order strictly hyperbolic equation with four different characteristics. Note that the well-posed statement of mixed problems for hyperbolic equations not only depends on the number of characteristics, but also on their location. The operator appearing in the equation involves a composition of first-order differential operators. The equation is defined in the half-strip of two independent variables. There are Cauchy's conditions at the domain bottom and periodic conditions at other boundaries. Using the method of characteristics, the analytic solution of the considered problem is obtained. The uniqueness of the solution is proved. We have also noted that the solution in the whole given domain is a composition of the solutions obtained in some subdomains. Thus, for the obtained classical solution to possess required smoothness, the values of these piecewise solutions, as well as their derivatives up to the fourth order must coincide at the boundary of these subdomains. A classical solution is understood as a function that is defined everywhere at all closure points of a given domain and has all classical derivatives entering the equation and the conditions of the problem.

Keywords: differential equations, hyperbolic equations, partial derivatives, boundary conditions, Cauchy's conditions, periodic conditions, matching conditions, classical solution, strictly hyperbolic equations

For citation. Korzyuk V. I., Nguyen Van Vinh. A mixed problem for the four-order one-dimensional hyperbolic equation with periodic conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 135–148 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-135-148

Введение. Задачам для одномерного гиперболического уравнения четвертого порядка посвящено немало исследований (см., напр., [1–5]), и во многих из них изучаются классические решения. Настоящая работа является продолжением построения классических решений задач для строго гиперболических уравнений четвертого порядка с четырьмя различными характеристическими направлениями. Рассматривается гиперболическое уравнение с постоянными коэффициентами, для которого находится классическое решение смешанной задачи с периодическими условиями. Оператор уравнения представим в виде композиции линейных операторов первого порядка. В данной работе используется метод характеристик для нахождения классического решения. С помощью характеристик для уравнения определяется его общее решение, и из него выделяется то, которое удовлетворяет условиям Коши и другим граничным условиям.

Постановка задачи. В замыкании области Q = $(0,\infty)\times(0,l)$ двух независимых переменных задано одномерное уравнение

$$Lu=\left(\partial_t-a^{(1)}\partial_x\right)\left(\partial_t-a^{(2)}\partial_x\right)\left(\partial_t-a^{(3)}\partial_x\right)\left(\partial_t-a^{(4)}\partial_x\right)u(t,x)=f(t,x),\ (t,x)\in\overline{Q} \tag{1}$$

относительно искомой функции $u:\mathbb{R}^2\supset\overline{Q}\ni(t,x)\to u(t,x)\in\mathbb{R}$, где $a^{(i)}$, $i=\overline{1,4}$, l – действительные числа и $a^{(i)}\neq a^{(j)}$ $\forall i\neq j$, $0<l<+\infty$, ∂_t, ∂_x – частные производные по t и x соответственно. В общем случае $\partial_t^k\partial_x^p=\dfrac{\partial^{k+p}}{\partial_t^k\partial_x^p}$ – частные производные по t и x порядка $k+p$, где k и p – целые неотрицательные числа. К уравнению (1) на части границы ∂Q области Q присоединяются условия Коши

$$\partial_t^j u(0,x)=\varphi_j(x),\ j=0,1,2,3,\ x\in[0,l], \tag{2}$$

и однородные периодические граничные условия

$$u(t,0)=u(t,l),\ \partial_x u(t,0)=\partial_x u(t,l),\ \partial_x^2 u(t,0)=\partial_x^2 u(t,l),\ \partial_x^3 u(t,0)=\partial_x^3 u(t,l), t\geq 0. \tag{3}$$

Здесь $f:\overline{Q}\ni(t,x)\to f(t,x)\in\mathbb{R}$, $\varphi_j:[0,l]\ni x\to\varphi_j(x)$, $j=0,1,2,3,$ – заданные функции. Таким образом, требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши (2), граничным условиям (3). Для определенности предположим, что $a^{(1)}$, $a^{(3)}<0$ и $a^{(2)}$, $a^{(4)}>0$.

Общее решение уравнения (1).

Лемма 1. *Общее решение уравнения* (1) *из класса четырежды непрерывно дифференцируемых функций представляется в виде суммы*

$$u(t,x)=g_1\left(x+a^{(1)}t\right)+g_2\left(x+a^{(2)}t\right)+g_3\left(x+a^{(3)}t\right)+g_4\left(x+a^{(4)}t\right)+v_p(t,x), \tag{4}$$

где g_j $\left(j=\overline{1,4}\right)$ *– произвольные функции с областиями определения* $D(g_1),D(g_3)=((-\infty,l])$, $D(g_2),D(g_4)=([0,+\infty))$, *если* $(t,x)\in\overline{Q}$ *и* v_p *– частное решение уравнения* (1).

Доказательство. Введем обозначение

$$\left(\partial_t-a^{(3)}\partial_x\right)\left(\partial_t-a^{(4)}\partial_x\right)u_0(t,x)=w(t,x),\quad (t,x)\in\overline{Q}. \tag{5}$$

Уравнение $Lu_0=0$ запишем в виде

$$\left(\partial_t-a^{(1)}\partial_x\right)\left(\partial_t-a^{(2)}\partial_x\right)w(t,x)=0,\quad (t,x)\in\overline{Q}. \tag{6}$$

Через функции характеристик делаем замену $x+a^{(1)}t=y_0$, $x+a^{(2)}t=y_1$. После приведения к каноническому виду уравнение (6) запишется так:

$$\left(-\left(a^{(1)}-a^{(2)}\right)^2\right)\partial_{y_0}\partial_{y_1}\tilde{w}=0, \tag{7}$$

где $\tilde{w}(y_0,y_1)=w(t,x)$. Интегрируем уравнение (7). В результате получим

$$\tilde{w}(y_0,y_1)=h^{(1)}(y_1)+h^{(2)}(y_0),$$

или

$$\omega(t,x)=h^{(1)}\left(x+a^{(1)}t\right)+h^{(2)}\left(x+a^{(2)}t\right).$$

Аналогично получим

$$u_0(t,x)=g_1\left(x+a^{(1)}t\right)+g_2\left(x+a^{(2)}t\right)+g_3\left(x+a^{(3)}t\right)+g_4\left(x+a^{(4)}t\right)$$

(см. также [5]). Лемма 1 доказана.

Т е о р е м а 1. *Общее решение* (4) *однородного уравнения* (1) $u_0(t,x)\in C^4\left(\overline{Q}\right)$ *тогда и только тогда, когда*

$$g_1,g_3\in C^4(-\infty,l],g_2,g_4\in C^4[0,\infty). \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если выполняются условия (8), то решение $u_0(t,x)=g_1\left(x+a^{(1)}t\right)+$ $+g_2\left(x+a^{(2)}t\right)+g_3\left(x+a^{(3)}t\right)+g_4\left(x+a^{(4)}t\right)$ однородного уравнения (1) принадлежит $C^4\left(\overline{Q}\right)$.

Обратно, пусть $u_0(t,x)\in C^4\left(\overline{Q}\right)$ и является решением однородного уравнения (1). Тогда производные $\partial_t^j\partial_x^k u_0(t,x)\in C^0\left(\overline{Q}\right)$, где $t,k\in\{0,1,2,3,4\}$ и $j+k=4$. Расписывая данные производные более подробно, получим

$$\begin{aligned}\partial_t^j\partial_x^k u_0(t,x)=&\left(a^{(1)}\right)^j d^4g_1\left(x+a^{(1)}t\right)+\left(a^{(2)}\right)^j d^4g_2\left(x+a^{(2)}t\right)+\\&+\left(a^{(3)}\right)^j d^4g_3\left(x+a^{(3)}t\right)+\left(a^{(4)}\right)^j d^4g_4\left(x+a^{(4)}t\right),\end{aligned} \tag{9}$$

где d^4 – оператор обыкновенной производной четвертого порядка. Равенства (9) рассматриваются как система пяти уравнений относительно производных $d^4g_i, i=\overline{1,4}$. Нетрудно проверить, что определители четвертого порядка матрицы этих уравнений не равны нулю. Следовательно, производные d^4g_i определяются через производные $\partial_t^j\partial_x^k u_0(t,x)$ решения $u_0(t,x)$ однородного уравнения (1). Отсюда следует необходимость выполнения условий (8). Таким образом, доказано утверждение теоремы 1.

Частное решение уравнения (1). Конструкция частного решения будет осуществляться локально на подмножествах области Q. Конструкция состоит из двух этапов.

Первый этап. Сначала разобьем область Q на подобласти $Q^{(m)}$, $m=1,2,3,...,$ как это представлено на рис. 1:

$$\begin{aligned}Q^{(m)}&=\left\{(t,x)\Big|\frac{m-1}{2}\left(\frac{l}{a^{(2)}}-\frac{l}{a^{(1)}}\right)<t<-\frac{a^{(2)}+a^{(1)}}{a^{(1)}a^{(2)}}x+\frac{(m+1)l}{2a^{(2)}}-\frac{(m-1)l}{2a^{(1)}},0<x<l\right\},m=1,3,5,...,\\Q^{(m)}&=\left\{(t,x)\Big|-\frac{a^{(2)}+a^{(1)}}{a^{(1)}a^{(2)}}x+\frac{ml}{2a^{(2)}}-\frac{(m-2)l}{2a^{(1)}}<t<\frac{m}{2}\left(\frac{l}{a^{(2)}}-\frac{l}{a^{(1)}}\right),0<x<l\right\},m=2,4,6,... .\end{aligned} \tag{10}$$

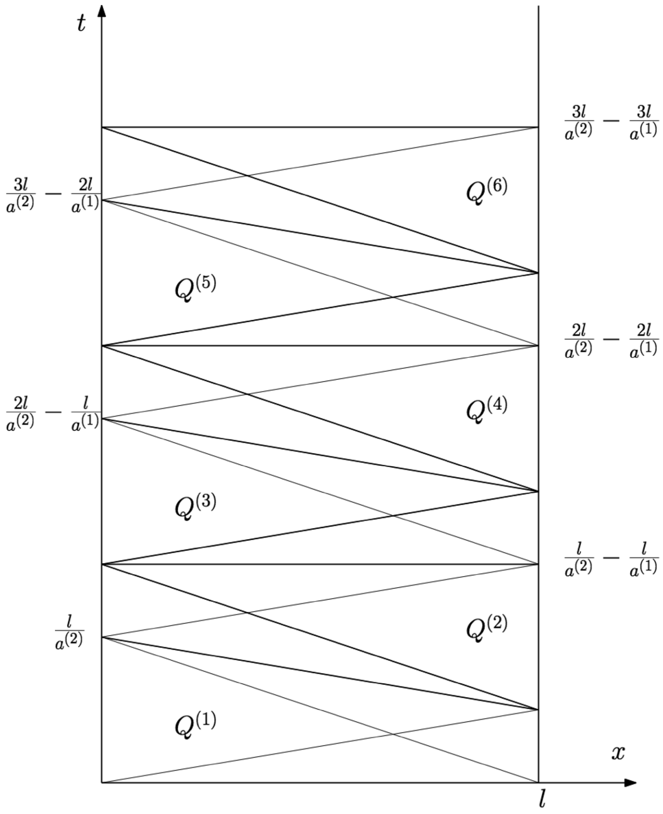

Рис. 1. Разбиение области Q на подобласти $Q^{(m)}$

Fig. 1. Partition of the domain Q into the subdomains $Q^{(m)}$

В замыкании $\overline{Q^{(m)}}$ подобласти $Q^{(m)}$ рассматриваем уравнение

$$\left(\partial_t - a^{(1)}\partial_x\right)\left(\partial_t - a^{(2)}\partial_x\right) w_p(t,x) = f(t,x). \tag{11}$$

После его интегрирования получаем решение

$$\begin{gathered} w_p^{(m)}(t,x) = f^{(1,m)}\left(x + a^{(1)}t\right) + f^{(2,m)}\left(x + a^{(2)}t\right) - \\ -\frac{1}{\left(a^{(2)} - a^{(1)}\right)^2} \int\limits_{A^{(m)}}^{x+a^{(1)}t} d\xi \int\limits_{B^{(m)}}^{x+a^{(2)}t} f\left(\frac{\eta-\xi}{a^{(2)}-a^{(1)}}, \frac{a^{(2)}\xi - a^{(1)}\eta}{a^{(2)}-a^{(1)}}\right) d\eta, \end{gathered} \tag{12}$$

где

$$A^{(m)} = \begin{cases} -\dfrac{(m-1)}{2} l + \dfrac{m-1}{2}\dfrac{la^{(1)}}{a^{(2)}}, & m = 1,3,5,..., \\ -\dfrac{(m-1)}{2} l + \dfrac{m}{2}\dfrac{la^{(1)}}{a^{(2)}}, & m = 2,4,6,..., \end{cases} \qquad B^{(m)} = \begin{cases} l + \dfrac{m-1}{2}\left(l - \dfrac{la^{(2)}}{a^{(1)}}\right), & m = 1,3,5,..., \\ \dfrac{m}{2}\left(l - \dfrac{la^{(2)}}{a^{(1)}}\right), & m = 2,4,6,... . \end{cases}$$

Из формулы (12) видно, что для каждого m = 1,2,3,…, если функция f принадлежит $C^2\left(\overline{Q}\right)$, функция $w_p^{(m)}$ является непрерывно дифференцируемой до третьего порядка включительно на множестве $\overline{Q^{(m)}}$ и удовлетворяет уравнению (11). Частное решение w_p уравнения (11) на множестве $\overline{Q}$ определим с помощью функций

$$w_p(t,x) = w_p^{(m)}(t,x),\ (t,x) \in \overline{Q^{(m)}},\ m \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Требуем выполнения условия гладкости w_p на $\overline{Q}$. За счет выбора функций $f^{(j,m)}$ и f из класса $C^2(\overline{Q})$ частное решение (13) должна быть из класса $C^3(\overline{Q})$. Это можно сделать следующим образом. При соответствующем выборе функций $f^{(j,1)}$, $j = 1,2$,

$$w_p^{(1)}(0,x) = \partial_t w_p^{(1)}(0,x) = 0,\ \partial_t^2 w_p^{(1)}(0,x) = f(0,x),\ \partial_t^3 w_p^{(1)}(0,x) = \partial_t f(0,x).$$

Далее за счет функций $f^{(j,2)}, j = 1,2,$ при $t = \frac{l}{a^{(2)}} - \frac{a^{(1)} + a^{(2)}}{a^{(1)} a^{(2)}} x$ достигается выполнение условий Коши для функции $w_p^{(2)}$, т. е.

$$\begin{aligned} w_p^{(2)}\left(\frac{l}{a^{(2)}} - \frac{a^{(1)}+a^{(2)}}{a^{(1)}a^{(2)}}x, x\right) &= w_p^{(1)}\left(\frac{l}{a^{(2)}} - \frac{a^{(1)}+a^{(2)}}{a^{(1)}a^{(2)}}x, x\right), \\ \partial_t w_p^{(2)}\left(\frac{l}{a^{(2)}} - \frac{a^{(1)}+a^{(2)}}{a^{(1)}a^{(2)}}x, x\right) &= \partial_t w_p^{(1)}\left(\frac{l}{a^{(2)}} - \frac{a^{(1)}+a^{(2)}}{a^{(1)}a^{(2)}}x, x\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Отсюда и из уравнения (11) следуют равенства для вторых и третьих производных

$$\begin{aligned} \partial_t^2 w_p^{(2)}\left(\frac{l}{a^{(2)}} - \frac{a^{(1)}+a^{(2)}}{a^{(1)}a^{(2)}}x, x\right) &= \partial_t^2 w_p^{(1)}\left(\frac{l}{a^{(2)}} - \frac{a^{(1)}+a^{(2)}}{a^{(1)}a^{(2)}}x, x\right), \\ \partial_t^3 w_p^{(2)}\left(\frac{l}{a^{(2)}} - \frac{a^{(1)}+a^{(2)}}{a^{(1)}a^{(2)}}x, x\right) &= \partial_t^3 w_p^{(1)}\left(\frac{l}{a^{(2)}} - \frac{a^{(1)}+a^{(2)}}{a^{(1)}a^{(2)}}x, x\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Из равенств (14), (15) и предположения $f \in C^2(\overline{Q})$ следует, что $w_p(t,x) \in C^3\left(\overline{Q^{(1)}} \cup \overline{Q^{(2)}}\right)$. За счет других функций $f^{(j,m)}$, $j = 1,2,\ m = 3,4,...,$ из класса C^3 требуем, чтобы для примыкающих друг к другу функций $w_p^{(m+1)}$ и $w_p^{(m)}$ значения самих функций и их производных первого, второго и третьего порядков совпадали на общих границах, представляющих собой отрезки $x + \frac{a^{(1)}a^{(2)}}{a^{(1)}+a^{(2)}} t = \left(\frac{m+1}{2}\frac{l}{a^{(2)}} - \frac{m-1}{2}\frac{l}{a^{(1)}}\right)\frac{a^{(1)}a^{(2)}}{a^{(1)}+a^{(2)}},\ m = 3,5,...,x \in [0,l],$ и $t = \frac{m}{2}\left(\frac{l}{a^{(2)}} - \frac{l}{a^{(2)}}\right)$, $m = 4,6,8,...,x \in [0,l]$.

Второй этап. Разобьем область Q на подобласти $\Omega^{(k)}$, k = 1,2,3,…, как это представлено на рис. 2:

$$\begin{aligned} \Omega^{(k)} &= \left\{(t,x) \middle| \frac{k-1}{2}\left(\frac{l}{a^{(4)}} - \frac{l}{a^{(3)}}\right) < t < -\frac{a^{(4)}+a^{(3)}}{a^{(3)}a^{(4)}}x + \frac{(k+1)l}{2a^{(4)}} - \frac{(k-1)l}{2a^{(3)}}, 0 < x < l\right\}, k = 1,3,5,..., \\ \Omega^{(k)} &= \left\{(t,x) \middle| -\frac{a^{(4)}+a^{(3)}}{a^{(3)}a^{(4)}}x + \frac{kl}{2a^{(4)}} - \frac{(k-2)l}{2a^{(3)}} < t < \frac{k}{2}\left(\frac{l}{a^{(4)}} - \frac{l}{a^{(3)}}\right), 0 < x < l\right\}, k = 2,4,6,... . \end{aligned} \tag{16}$$

Теперь в замыкании $\overline{\Omega}^{(k)}$ подобласти $\Omega^{(k)}$ рассматриваем уравнение

$$\left(\partial_t - a^{(3)}\partial_x\right)\left(\partial_t - a^{(4)}\partial_x\right) v_p(t,x) = w_p(t,x). \tag{17}$$

После его интегрирования получаем решение

$$v_p^{(k)}(t,x) = f^{(3,k)}\left(x + a^{(3)}t\right) + f^{(4,k)}\left(x + a^{(4)}t\right) -$$
$$-\frac{1}{\left(a^{(4)} - a^{(3)}\right)^2} \int\limits_{C^{(k)}}^{x+a^{(3)}t} d\xi \int\limits_{D^{(k)}}^{x+a^{(4)}t} w_p\left(\frac{\eta - \xi}{a^{(4)} - a^{(3)}}, \frac{a^{(4)}\xi - a^{(3)}\eta}{a^{(4)} - a^{(3)}}\right) d\eta, \qquad (18)$$

где

$$C^{(k)} = \begin{cases} -\frac{(k-1)}{2} l + \frac{k-1}{2} \frac{la^{(3)}}{a^{(4)}}, \ k = 1,3,5,...., \\ -\frac{(k-1)}{2} l + \frac{k}{2} \frac{la^{(3)}}{a^{(4)}}, \ k = 2,4,6,...., \end{cases} \qquad D^{(k)} = \begin{cases} l + \frac{k-1}{2}\left(l - \frac{la^{(4)}}{a^{(3)}}\right), \ k = 1,3,5,..., \\ \frac{k}{2}\left(l - \frac{la^{(4)}}{a^{(3)}}\right), \ k = 2,4,6,... . \end{cases}$$

Из формулы (18) видно, что для каждого k = 1,2,3,…, если функция f принадлежит $C^2(\overline{Q})\left(w_p \in C^3(\overline{Q})\right)$, функция $v_p^{(k)}$ является непрерывно дифференцируемой до четвертого порядка включительно на множестве $\overline{\Omega}^{(k)}$ и удовлетворяет уравнению (1). Частное решение v_p уравнения (1) на множестве $\overline{Q}$ определим с помощью функций

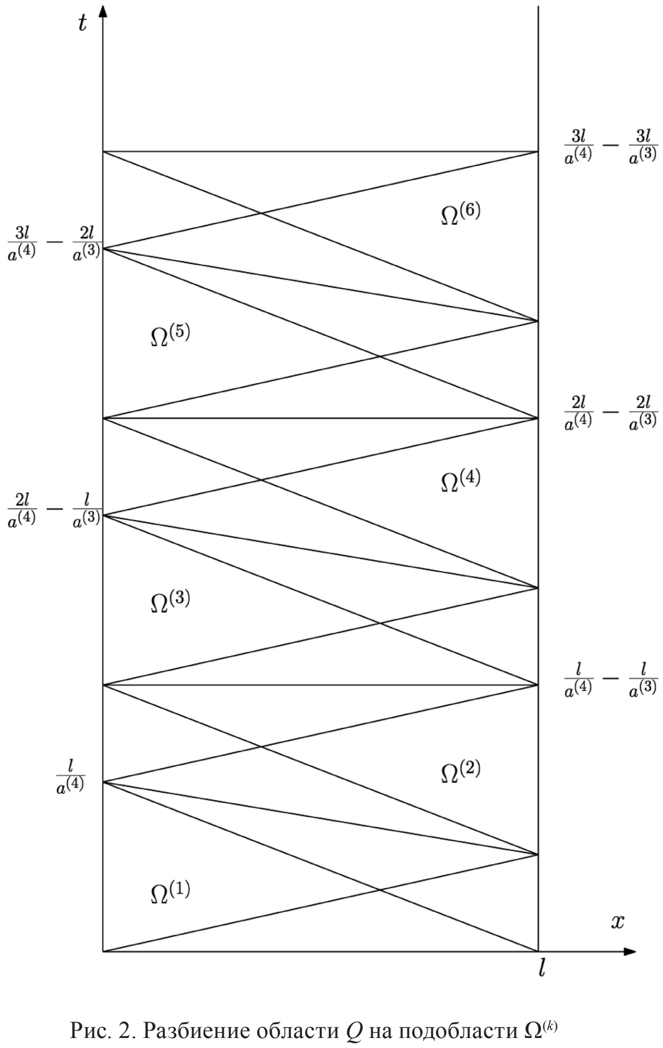

Рис. 2. Разбиение области Q на подобласти $\Omega^{(k)}$

Fig. 2. Partition of the domain Q into the subdomains $\Omega^{(k)}$

$$v_p(t,x)=v_p^{(k)}(t,x),\ (t,x)\in\bar{\Omega}^{(k)},\ k\in\mathbb{N}. \tag{19}$$

Требуем выполнения условия гладкости v_p на $\bar{Q}$. За счет выбора функций $f^{(i,k)}$ и f из класса $C^2(\bar{Q})$ частное решение (1) должно быть из класса $C^4(\bar{Q})$. Это можно сделать следующим образом. При соответствующем выборе функций $f^{(i,1)},\ i=3,4,$

$$v_p^{(1)}(0,x)=\partial_t v_p^{(1)}(0,x)=\partial_t^2 v_p^{(1)}(0,x)=\partial_t^3 v_p^{(1)}(0,x)=0,\ \partial_t^4 v_p^{(1)}(0,x)=f(0,x). \tag{20}$$

Далее за счет функций $f^{(i,2)},\ i=3,4,$ при $t=\dfrac{l}{a^{(4)}}-\dfrac{a^{(3)}+a^{(4)}}{a^{(3)}a^{(4)}}x$ достигается выполнение условий Коши для функции $v_p^{(2)}$, т. е.

$$\begin{gathered}
v_p^{(2)}\left(\frac{l}{a^{(4)}}-\frac{a^{(3)}+a^{(4)}}{a^{(3)}a^{(4)}}x,x\right)=v_p^{(1)}\left(\frac{l}{a^{(4)}}-\frac{a^{(3)}+a^{(4)}}{a^{(3)}a^{(4)}}x,x\right),\\
\partial_t v_p^{(2)}\left(\frac{l}{a^{(4)}}-\frac{a^{(3)}+a^{(4)}}{a^{(3)}a^{(4)}}x,x\right)=\partial_t v_p^{(1)}\left(\frac{l}{a^{(4)}}-\frac{a^{(3)}+a^{(4)}}{a^{(3)}a^{(4)}}x,x\right).
\end{gathered} \tag{21}$$

Отсюда и из уравнений (11), (17) следуют равенства для вторых, третьих и четвертых производных

$$\partial_t^j v_p^{(2)}\left(\frac{l}{a^{(4)}}-\frac{a^{(3)}+a^{(4)}}{a^{(3)}a^{(4)}}x,x\right)=\partial_t^j v_p^{(1)}\left(\frac{l}{a^{(4)}}-\frac{a^{(3)}+a^{(4)}}{a^{(3)}a^{(4)}}x,x\right),\ j=2,3,4. \tag{22}$$

Из равенств (21), (22) и предположения $f\in C^2(\bar{Q})$ следует, что $v_p(t,x)\in C^4\left(\overline{Q^{(1)}}\cup\overline{Q^{(2)}}\right)$. За счет других функций $f^{(i,k)},\ i=3,4,\ k=3,4,...,$ из класса C^4 требуем, чтобы для примыкающих друг к другу функций $v_p^{(k+1)}$ и $v_p^{(k)}$ значения самих функций и их производных первого, второго, третьего и четвертого порядков совпадали на общих границах, представляющих собой отрезки $x+\dfrac{a^{(3)}a^{(4)}}{a^{(3)}+a^{(4)}}t=\left(\dfrac{k+1}{2}\dfrac{l}{a^{(4)}}-\dfrac{k-1}{2}\dfrac{l}{a^{(3)}}\right)\dfrac{a^{(3)}a^{(4)}}{a^{(3)}+a^{(4)}},\ k=3,5,7,9,...,\ x\in[0,l]$, и $t=\dfrac{k}{2}\left(\dfrac{l}{a^{(4)}}-\dfrac{l}{a^{(3)}}\right)$, $k=2,4,6,...,\ x\in[0,l]$.

Т е о р е м а 2. *Пусть правая часть уравнения* (1) $f\in C^2(\bar{Q})$. *Тогда функция* v_p, *определяемая формулами* (12), (18), (19) *при соответствующем выборе функций* $f^{(i,k)},\ i=1,2,3,4,\ k\in\mathbb{N}$, *принадлежит классу* $C^4(\bar{Q})$, *является решением уравнения* (1) *и удовлетворяет условиям* (20).

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из предыдущих рассуждений.

Решение задачи (1)–(3). Удовлетворяя решение (4) условиям Коши (2), получаем систему

$$\begin{gathered}
g_1(x)+g_2(x)+g_3(x)+g_4(x)=\varphi_0(x),\\
a^{(1)}g_1(x)+a^{(2)}g_2(x)+a^{(3)}g_3(x)+a^{(4)}g_4(x)=\int_0^x\varphi_1(y)dy+C_1,\\
\left(a^{(1)}\right)^2g_1(x)+\left(a^{(2)}\right)^2g_2(x)+\left(a^{(3)}\right)^2g_3(x)+\left(a^{(4)}\right)^2g_4(x)=\int_0^x(x-y)\varphi_2(y)dy+C_2x+C_3,\\
\left(a^{(1)}\right)^3g_1(x)+\left(a^{(2)}\right)^3g_2(x)+\left(a^{(3)}\right)^3g_3(x)+\left(a^{(4)}\right)^3g_4(x)=\frac{1}{2}\int_0^x(x-y)^2\varphi_3(y)dy+C_4x^2+C_5x+C_6.
\end{gathered} \tag{23}$$

Решая систему (23), получим

$$g_1(z)=g_1^{(0)}(z)=\frac{1}{\left(a^{(1)}-a^{(2)}\right)\left(a^{(1)}-a^{(3)}\right)\left(a^{(1)}-a^{(4)}\right)}\times$$
$$\times\Bigg(-\left(a^{(2)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)\int_0^z(z-\xi)\varphi_2(\xi)d\xi+\frac{1}{2}\int_0^z(z-\xi)^2\varphi_2(\xi)d\xi+C_6-$$
$$-\left(a^{(2)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)C_3+\left(a^{(2)}a^{(3)}+a^{(2)}a^{(4)}+a^{(3)}a^{(4)}\right)C_1-a^{(2)}a^{(3)}a^{(4)}\varphi_0(z)+$$
$$+C_4z^2+C_5z+\left(a^{(2)}a^{(3)}+a^{(2)}a^{(4)}+a^{(3)}a^{(4)}\right)\int_0^z\varphi_1(\xi)d\xi-\left(a^{(2)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)C_2z\Bigg),\qquad(24)$$

$$g_2(z)=g_2^{(0)}(z)=\frac{1}{\left(a^{(1)}-a^{(2)}\right)\left(a^{(2)}-a^{(3)}\right)\left(a^{(2)}-a^{(4)}\right)}\times$$
$$\times\Bigg(\left(a^{(1)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)\int_0^z(z-\xi)\varphi_2(\xi)d\xi-\frac{1}{2}\int_0^z(z-\xi)^2\varphi_2(\xi)d\xi-C_6+$$
$$+\left(a^{(1)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)C_3-\left(a^{(1)}a^{(3)}+a^{(1)}a^{(4)}+a^{(3)}a^{(4)}\right)C_1-a^{(1)}a^{(3)}a^{(4)}\varphi_0(z)-$$
$$-\left(a^{(1)}a^{(3)}+a^{(1)}a^{(4)}+a^{(3)}a^{(4)}\right)\int_0^z\varphi_1(\xi)d\xi+\left(a^{(1)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)C_2z-C_4z^2-C_5z\Bigg),\qquad(25)$$

$$g_3(z)=g_3^{(0)}(z)=\frac{1}{\left(a^{(1)}-a^{(3)}\right)\left(a^{(2)}-a^{(3)}\right)\left(a^{(3)}-a^{(4)}\right)}\times$$
$$\times\Bigg(-\left(a^{(1)}+a^{(2)}+a^{(4)}\right)\int_0^z(z-\xi)\varphi_2(\xi)d\xi+\frac{1}{2}\int_0^z(z-\xi)^2\varphi_2(\xi)d\xi+C_6-$$
$$-\left(a^{(1)}+a^{(2)}+a^{(4)}\right)C_3+\left(a^{(1)}a^{(2)}+a^{(1)}a^{(4)}+a^{(2)}a^{(4)}\right)C_1-a^{(1)}a^{(2)}a^{(4)}\varphi_0(z)+$$
$$+C_4z^2+C_5z+\left(a^{(1)}a^{(2)}+a^{(1)}a^{(4)}+a^{(2)}a^{(4)}\right)\int_0^z\varphi_1(\xi)d\xi-\left(a^{(1)}+a^{(2)}+a^{(4)}\right)C_2z\Bigg),\qquad(26)$$

$$g_4(z)=g_4^{(0)}(z)=\frac{1}{\left(a^{(1)}-a^{(4)}\right)\left(a^{(2)}-a^{(4)}\right)\left(a^{(3)}-a^{(4)}\right)}\times$$
$$\times\Bigg(\left(a^{(1)}+a^{(2)}+a^{(3)}\right)\int_0^z(z-\xi)\varphi_2(\xi)d\xi-\frac{1}{2}\int_0^z(z-\xi)^2\varphi_2(\xi)d\xi-C_6+$$
$$+\left(a^{(1)}+a^{(2)}+a^{(3)}\right)C_3-\left(a^{(1)}a^{(2)}+a^{(1)}a^{(3)}+a^{(2)}a^{(3)}\right)C_1-a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)}\varphi_0(z)-$$
$$-C_4z^2-C_5z-\left(a^{(1)}a^{(2)}+a^{(1)}a^{(3)}+a^{(2)}a^{(3)}\right)\int_0^z\varphi_1(\xi)d\xi+\left(a^{(1)}+a^{(2)}+a^{(3)}\right)C_2z\Bigg)\qquad(27)$$

для $z\in[0,l]$, где C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6 – произвольные постоянные.

Для других значений аргумента z функции $g_j(z)$, $j=\overline{1,4}$, определяются поэтапно, удовлетворяя искомое решение (4) граничным условиям (3). Удовлетворяя условию (3), получаем систему уравнений

$$
\begin{gathered}
g_1\left(a^{(1)}t\right)+g_3\left(a^{(3)}t\right)-g_2\left(l+a^{(2)}t\right)-g_4\left(l+a^{(4)}t\right)=v_p\left(t,l\right)-v_p\left(t,0\right)- \\
-g_2\left(a^{(2)}t\right)-g_4\left(a^{(4)}t\right)+g_1\left(l+a^{(1)}t\right)+g_3\left(l+a^{(3)}t\right), \\
\frac{g_1\left(a^{(1)}t\right)}{a^{(1)}}+\frac{g_3\left(a^{(3)}t\right)}{a^{(3)}}-\frac{g_2\left(l+a^{(2)}t\right)}{a^{(2)}}-\frac{g_4\left(l+a^{(4)}t\right)}{a^{(4)}}=\tilde{C}_1-\frac{g_2\left(a^{(2)}t\right)}{a^{(2)}}+ \\
+\int_0^t\left(\partial_x v_p\left(\xi,l\right)-\partial_x v_p\left(\xi,0\right)\right)d\xi-\frac{g_4\left(a^{(4)}t\right)}{a^{(4)}}+\frac{g_1\left(l+a^{(1)}t\right)}{a^{(1)}}+\frac{g_3\left(l+a^{(3)}t\right)}{a^{(3)}}, \\
\frac{g_1\left(a^{(1)}t\right)}{\left(a^{(1)}\right)^2}+\frac{g_3\left(a^{(3)}t\right)}{\left(a^{(3)}\right)^2}-\frac{g_2\left(l+a^{(2)}t\right)}{\left(a^{(2)}\right)^2}-\frac{g_4\left(l+a^{(4)}t\right)}{\left(a^{(4)}\right)^2}=\tilde{C}_2t+\tilde{C}_3-\frac{g_2\left(a^{(2)}t\right)}{\left(a^{(2)}\right)^2}+ \\
+\int_0^t\left(t-\xi\right)\left(\partial_x^2 v_p\left(\xi,l\right)-\partial_x^2 v_p\left(\xi,0\right)\right)d\xi-\frac{g_4\left(a^{(4)}t\right)}{\left(a^{(4)}\right)^2}+\frac{g_1\left(l+a^{(1)}t\right)}{\left(a^{(1)}\right)^2}+\frac{g_3\left(l+a^{(3)}t\right)}{\left(a^{(3)}\right)^2}, \\
\frac{g_1\left(a^{(1)}t\right)}{\left(a^{(1)}\right)^3}+\frac{g_3\left(a^{(3)}t\right)}{\left(a^{(3)}\right)^3}-\frac{g_2\left(l+a^{(2)}t\right)}{\left(a^{(2)}\right)^3}-\frac{g_4\left(l+a^{(4)}t\right)}{\left(a^{(4)}\right)^3}=\tilde{C}_4t^2+\tilde{C}_5t+\tilde{C}_6-\frac{g_2\left(a^{(2)}t\right)}{\left(a^{(2)}\right)^3}+ \\
+\int_0^t\frac{\left(t-\xi\right)^2}{2}\left(\partial_x^3 v_p\left(\xi,l\right)-\partial_x^3 v_p\left(\xi,0\right)\right)d\xi-\frac{g_4\left(a^{(4)}t\right)}{\left(a^{(4)}\right)^3}+\frac{g_1\left(l+a^{(1)}t\right)}{\left(a^{(1)}\right)^3}+\frac{g_3\left(l+a^{(3)}t\right)}{\left(a^{(3)}\right)^3},
\end{gathered} \tag{28}
$$

где

$$\tilde{C}_1=\frac{g_1^{(0)}\left(0\right)-g_1^{(0)}\left(l\right)}{a^{(1)}}+\frac{g_2^{(0)}\left(0\right)-g_2^{(0)}\left(l\right)}{a^{(2)}}+\frac{g_3^{(0)}\left(0\right)-g_3^{(0)}\left(l\right)}{a^{(3)}}+\frac{g_4^{(0)}\left(0\right)-g_4^{(0)}\left(l\right)}{a^{(4)}},$$

$$\tilde{C}_2=\frac{dg_1^{(0)}\left(0\right)-dg_1^{(0)}\left(l\right)}{a^{(1)}}+\frac{dg_2^{(0)}\left(0\right)-dg_2^{(0)}\left(l\right)}{a^{(2)}}+\frac{dg_3^{(0)}\left(0\right)-dg_3^{(0)}\left(l\right)}{a^{(3)}}+\frac{dg_4^{(0)}\left(0\right)-dg_4^{(0)}\left(l\right)}{a^{(4)}},$$

$$\tilde{C}_3=\frac{g_1^{(0)}\left(0\right)-g_1^{(0)}\left(l\right)}{\left(a^{(1)}\right)^2}+\frac{g_2^{(0)}\left(0\right)-g_2^{(0)}\left(l\right)}{\left(a^{(2)}\right)^2}+\frac{g_3^{(0)}\left(0\right)-g_3^{(0)}\left(l\right)}{\left(a^{(3)}\right)^2}+\frac{g_4^{(0)}\left(0\right)-g_4^{(0)}\left(l\right)}{\left(a^{(4)}\right)^2},$$

$$\tilde{C}_4=\frac{d^2g_1^{(0)}\left(0\right)-d^2g_1^{(0)}\left(l\right)}{2a^{(1)}}+\frac{d^2g_2^{(0)}\left(0\right)-d^2g_2^{(0)}\left(l\right)}{2a^{(2)}}+\frac{d^2g_3^{(0)}\left(0\right)-d^2g_3^{(0)}\left(l\right)}{2a^{(3)}}+\frac{d^2g_4^{(0)}\left(0\right)-d^2g_4^{(0)}\left(l\right)}{2a^{(4)}},$$

$$\tilde{C}_5=\frac{dg_1^{(0)}\left(0\right)-dg_1^{(0)}\left(l\right)}{\left(a^{(1)}\right)^2}+\frac{dg_2^{(0)}\left(0\right)-dg_2^{(0)}\left(l\right)}{\left(a^{(2)}\right)^2}+\frac{dg_3^{(0)}\left(0\right)-dg_3^{(0)}\left(l\right)}{\left(a^{(3)}\right)^2}+\frac{dg_4^{(0)}\left(0\right)-dg_4^{(0)}\left(l\right)}{\left(a^{(4)}\right)^2},$$

$$\tilde{C}_6=\frac{g_1^{(0)}\left(0\right)-g_1^{(0)}\left(l\right)}{\left(a^{(1)}\right)^3}+\frac{g_2^{(0)}\left(0\right)-g_2^{(0)}\left(l\right)}{\left(a^{(2)}\right)^3}+\frac{g_3^{(0)}\left(0\right)-g_3^{(0)}\left(l\right)}{\left(a^{(3)}\right)^3}+\frac{g_4^{(0)}\left(0\right)-g_4^{(0)}\left(l\right)}{\left(a^{(4)}\right)^3}.$$

Решая систему (28) для $g_1\left(a^{(1)}t\right), g_3\left(a^{(3)}t\right), g_2\left(l+a^{(2)}t\right), g_4\left(l+a^{(4)}t\right)$, получим

$$g_1^{(k+1)}(z)=\frac{\mathbb{M}^{(1)}}{2\left(a^{(1)}-a^{(2)}\right)\left(a^{(1)}-a^{(3)}\right)\left(a^{(1)}-a^{(4)}\right)},\quad z\in\left[-(k+1)l,-kl\right], \tag{29}$$

$$g_2^{(k+1)}(z)=\frac{-\mathbb{M}^{(2)}}{2\left(a^{(2)}-a^{(1)}\right)\left(a^{(2)}-a^{(3)}\right)\left(a^{(2)}-a^{(4)}\right)},\quad z\in\left[kl,(k+1)l\right], \tag{30}$$

$$g_3^{(k+1)}(z)=\frac{-\mathbb{M}^{(3)}}{2\left(a^{(3)}-a^{(1)}\right)\left(a^{(3)}-a^{(2)}\right)\left(a^{(3)}-a^{(4)}\right)},\quad z\in\left[-(k+1)l,-kl\right], \tag{31}$$

$$g_4^{(k+1)}(z)=\frac{-\mathbb{M}^{(4)}}{2\left(a^{(4)}-a^{(1)}\right)\left(a^{(4)}-a^{(2)}\right)\left(a^{(4)}-a^{(3)}\right)},\quad z\in\left[kl,(k+1)l\right], \tag{32}$$

где

$$\mathbb{M}^{(1)}=2\left(\left(a^{(1)}-a^{(2)}\right)\left(a^{(1)}-a^{(3)}\right)\left(a^{(1)}-a^{(4)}\right)\right)g_1^{(k)}(z+l)-2C_4l^2-4C_4lz-2C_5l-$$

$$-2\left(a^{(3)}a^{(4)}+a^{(2)}a^{(3)}+a^{(2)}a^{(4)}\right)\left(\int_0^l\varphi_1(\xi)d\xi+\left(a^{(1)}\right)^3J\left(\frac{z}{a^{(1)}}\right)\right)+$$

$$+2z\left(\left(a^{(1)}\right)^2-a^{(2)}a^{(3)}-a^{(2)}a^{(4)}-a^{(3)}a^{(4)}\right)\left(\varphi_1(l)-\varphi_1(0)\right)+2\left(a^{(2)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)C_2l+$$

$$+z^2\left(a^{(1)}+a^{(2)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)\left(\varphi_2(l)-\varphi_2(0)\right)+2\left(\left(a^{(1)}\right)^3+a^{(2)}a^{(3)}a^{(4)}\right)\left(\varphi_0(l)-\varphi_0(0)\right)+$$

$$+2z\left(\left(a^{(1)}\right)^2a^{(2)}+\left(a^{(1)}\right)^2a^{(3)}+\left(a^{(1)}\right)^2a^{(4)}-a^{(2)}a^{(3)}a^{(4)}\right)\left(d\varphi_0(0)-d\varphi_0(l)\right)+$$

$$+z^2\left(a^{(1)}a^{(2)}+a^{(1)}a^{(3)}+a^{(2)}a^{(3)}+a^{(1)}a^{(4)}+a^{(2)}a^{(4)}+a^{(3)}a^{(4)}\right)\left(d\varphi_1(0)-d\varphi_1(l)\right)+$$

$$+z^2\left(a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)}+a^{(1)}a^{(2)}a^{(4)}+a^{(1)}a^{(3)}a^{(4)}+a^{(2)}a^{(3)}a^{(4)}\right)\left(d^2\varphi_0(l)-d^2\varphi_0(0)\right)+$$

$$+2\left(a^{(1)}\right)^3\left(K\left(\frac{z}{a^{(1)}}\right)-\left(a^{(2)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)H\left(\frac{z}{a^{(1)}}\right)-a^{(2)}a^{(3)}a^{(4)}L\left(\frac{z}{a^{(1)}}\right)\right)+$$

$$+2\left(a^{(2)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)\int_0^l(z+l-\xi)\varphi_2(\xi)d\xi-\int_0^l(z+l-\xi)^2\varphi_3(\xi)d\xi,$$

$$\mathbb{M}^{(2)}=2\left(a^{(2)}-a^{(1)}\right)\left(a^{(2)}-a^{(3)}\right)\left(a^{(2)}-a^{(4)}\right)g_2^{(k)}(z-l)+2C_4l^2-4C_4lz-2C_5l-$$

$$-2\left(a^{(1)}a^{(3)}+a^{(1)}a^{(4)}+a^{(3)}a^{(4)}\right)\left(\int_0^l\varphi_1(\xi)d\xi-\left(a^{(2)}\right)^3J\left(\frac{z-l}{a^{(2)}}\right)\right)+2(z-l)\times$$

$$\times\left(\left(a^{(2)}\right)^2-a^{(1)}a^{(3)}-a^{(1)}a^{(4)}-a^{(3)}a^{(4)}\right)\left(\varphi_1(l)-\varphi_1(0)\right)+(z-l)^2\left(a^{(1)}+a^{(2)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)\times$$

$$\times\left(\varphi_2(l)-\varphi_2(0)\right)+2\left(\left(a^{(2)}\right)^3+a^{(1)}a^{(3)}a^{(4)}\right)\left(\varphi_0(l)-\varphi_0(0)\right)-2\left(a^{(1)}+a^{(2)}+a^{(4)}\right)C_2l+$$

$$+2(z-l)\left(\left(a^{(2)}\right)^2a^{(3)}+\left(a^{(2)}\right)^2a^{(4)}+\left(a^{(2)}\right)^2a^{(1)}-a^{(1)}a^{(3)}a^{(4)}\right)\left(d\varphi_0(0)-d\varphi_0(l)\right)+$$

$$+(z-l)^2\left(a^{(1)}a^{(2)}+a^{(1)}a^{(3)}+a^{(2)}a^{(3)}+a^{(1)}a^{(4)}+a^{(2)}a^{(4)}+a^{(3)}a^{(4)}\right)\left(d\varphi_1(0)-d\varphi_1(l)\right)-$$

$$-(z-l)^2\left(a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)}+a^{(1)}a^{(2)}a^{(4)}+a^{(1)}a^{(3)}a^{(4)}+a^{(2)}a^{(3)}a^{(4)}\right)\left(d^2\varphi_0(0)-d^2\varphi_0(l)\right)+$$

$$+2\left(a^{(2)}\right)^3\left(K\left(\frac{z-l}{a^{(2)}}\right)-\left(a^{(1)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)H\left(\frac{z-l}{a^{(2)}}\right)-a^{(1)}a^{(3)}a^{(4)}L\left(\frac{z-l}{a^{(2)}}\right)\right)+$$

$$+2\left(a^{(1)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)\int_0^l(z-\xi)\varphi_2(\xi)\,d\xi-\int_0^l(z-\xi)^2\varphi_3(\xi)\,d\xi,$$

$$\mathbb{M}^{(3)}=2\left(a^{(3)}-a^{(1)}\right)\left(a^{(3)}-a^{(2)}\right)\left(a^{(3)}-a^{(4)}\right)g_3^{(k)}(z+l)+2C_4l^2+4C_4lz+2C_5l+$$

$$+2\left(a^{(2)}a^{(4)}+a^{(1)}a^{(2)}+a^{(1)}a^{(4)}\right)\left(\int_0^l\varphi_1(\xi)\,d\xi-\left(a^{(3)}\right)^3J\left(\frac{z}{a^{(1)}}\right)\right)+$$

$$+2z\left(a^{(1)}a^{(2)}-\left(a^{(3)}\right)^2+a^{(1)}a^{(4)}+a^{(2)}a^{(4)}\right)\left(\varphi_1(l)-\varphi_1(0)\right)-2\left(a^{(1)}+a^{(2)}+a^{(4)}\right)C_2l-$$

$$-z^2\left(a^{(1)}+a^{(2)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)\left(\varphi_2(l)-\varphi_2(0)\right)+2\left(\left(a^{(3)}\right)^3+a^{(1)}a^{(2)}a^{(4)}\right)\left(\varphi_0(0)-\varphi_0(l)\right)+$$

$$+2z\left(\left(a^{(3)}\right)^2a^{(1)}+\left(a^{(3)}\right)^2a^{(2)}+\left(a^{(3)}\right)^2a^{(4)}-a^{(1)}a^{(2)}a^{(4)}\right)\left(d\varphi_0(l)-d\varphi_0(0)\right)+$$

$$+z^2\left(a^{(1)}a^{(2)}+a^{(1)}a^{(3)}+a^{(2)}a^{(3)}+a^{(1)}a^{(4)}+a^{(2)}a^{(4)}+a^{(3)}a^{(4)}\right)\left(d\varphi_1(l)-d\varphi_1(0)\right)+$$

$$+2\left(a^{(3)}\right)^3\left(K\left(\frac{z}{a^{(3)}}\right)-\left(a^{(1)}+a^{(2)}+a^{(4)}\right)H\left(\frac{z}{a^{(3)}}\right)-a^{(1)}a^{(2)}a^{(4)}L\left(\frac{z}{a^{(3)}}\right)\right)-$$

$$-2\left(a^{(1)}+a^{(2)}+a^{(4)}\right)\int_0^l(z+l-\xi)\varphi_2(\xi)\,d\xi+\int_0^l(z+l-\xi)^2\varphi_3(\xi)\,d\xi,$$

$$\mathbb{M}^{(4)}=2\left(a^{(2)}-a^{(1)}\right)\left(a^{(2)}-a^{(3)}\right)\left(a^{(2)}-a^{(4)}\right)g_4^{(k)}(z-l)+2C_4l^2-4C_4lz-2C_5l-$$

$$-2\left(a^{(2)}a^{(3)}+a^{(1)}a^{(2)}+a^{(1)}a^{(3)}\right)\left(\int_0^l\varphi_1(\xi)\,d\xi-\left(a^{(4)}\right)^3J\left(\frac{z-l}{a^{(4)}}\right)\right)+$$

$$+2(z-l)\left(\left(a^{(4)}\right)^2-a^{(1)}a^{(2)}-a^{(1)}a^{(3)}-a^{(2)}a^{(3)}\right)\left(\varphi_1(l)-\varphi_1(0)\right)+(z-l)^2\left(a^{(1)}+a^{(2)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)\times$$

$$\times\left(\varphi_2(l)-\varphi_2(0)\right)+2\left(\left(a^{(4)}\right)^3+a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)}\right)\left(\varphi_0(l)-\varphi_0(0)\right)+2\left(a^{(1)}+a^{(2)}+a^{(3)}\right)C_2l+$$

$$+2(l-z)\left(\left(a^{(4)}\right)^2a^{(1)}+\left(a^{(4)}\right)^2a^{(2)}+\left(a^{(4)}\right)^2a^{(3)}-a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)}\right)\left(d\varphi_0(0)-d\varphi_0(l)\right)+$$

$$+(z-l)^2\left(a^{(1)}a^{(2)}+a^{(1)}a^{(3)}+a^{(2)}a^{(3)}+a^{(1)}a^{(4)}+a^{(2)}a^{(4)}+a^{(3)}a^{(4)}\right)\left(d\varphi_1(0)-d\varphi_1(l)\right)-$$

$$-\left(z-l\right)^2\left(a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)}+a^{(1)}a^{(2)}a^{(4)}+a^{(1)}a^{(3)}a^{(4)}+a^{(2)}a^{(3)}a^{(4)}\right)\left(d^2\varphi_0\left(0\right)-d^2\varphi_0\left(l\right)\right)+$$

$$+2\left(a^{(4)}\right)^3\left(K\left(\frac{z-l}{a^{(4)}}\right)-\left(a^{(1)}+a^{(2)}+a^{(3)}\right)H\left(\frac{z-l}{a^{(4)}}\right)-a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)}L\left(\frac{z-l}{a^{(4)}}\right)\right)+$$

$$+2\left(a^{(1)}+a^{(2)}+a^{(3)}\right)\int_0^l\left(z-\xi\right)\varphi_2\left(\xi\right)d\xi-\int_0^l\left(z-\xi\right)^2\varphi_3\left(\xi\right)d\xi,$$

$$K\left(t\right)=v_p\left(t,l\right)-v_p\left(t,0\right),\ \ H\left(t\right)=\int_0^t\left(\partial_x v_p\left(\xi,l\right)-\partial_x v_p\left(\xi,0\right)\right)d\xi,$$

$$J\left(t\right)=\int_0^t\left(\partial_x^2 v_p\left(\xi,l\right)-\partial_x^2 v_p\left(\xi,0\right)\right)d\xi,\ \ L\left(t\right)=\int_0^t\left(\partial_x^3 v_p\left(\xi,l\right)-\partial_x^3 v_p\left(\xi,0\right)\right)d\xi.$$

Чтобы функции g_2,g_4 принадлежали классу $C^4\left(\left[0,+\infty\right)\right)$, а g_1,g_3 – классу $C^4\left(\left(-\infty,l\right]\right)$, кроме требований на гладкость заданных функций задачи (3) должны выполняться равенства для $k=0,1,2,3,\ldots$ в общих точках соприкосновения

$$\begin{gathered}
d^p g_1^{(k+1)}\left(-kl\right)=d^p g_1^{(k)}\left(-kl\right),\quad p=\overline{0,4},\\
d^p g_2^{(k+1)}\left(l+kl\right)=d^p g_2^{(k)}\left(l+kl\right),\quad p=\overline{0,4},\\
d^p g_3^{(k+1)}\left(-kl\right)=d^p g_3^{(k)}\left(-kl\right),\quad p=\overline{0,4},\\
d^p g_4^{(k+1)}\left(l+kl\right)=d^p g_4^{(k)}\left(l+kl\right),\quad p=\overline{0,4}.
\end{gathered}\tag{33}$$

Л е м м а 2. *Для любого номера* $k\in\{0,1,2,\ldots\}$ *значения функций* $g_1^{(k)}\left(z\right), g_2^{(k)}\left(z\right),\ g_3^{(k)}\left(z\right), g_4^{(k)}\left(z\right)$ *всегда можно представить в виде*

$$g_1^{(k)}\left(z\right)=\psi_1^{(k)}\left(z\right)+\frac{\left(a^{(2)}a^{(3)}+a^{(2)}a^{(4)}+a^{(3)}a^{(4)}\right)C_1-\left(a^{(2)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)\left(C_2z+C_3\right)+C_4z^2+C_5z+C_6}{\left(a^{(1)}-a^{(2)}\right)\left(a^{(1)}-a^{(3)}\right)\left(a^{(1)}-a^{(4)}\right)},$$

$$g_2^{(k)}\left(z\right)=\psi_2^{(k)}\left(z\right)+\frac{-\left(a^{(1)}a^{(3)}+a^{(1)}a^{(4)}+a^{(3)}a^{(4)}\right)C_1+\left(a^{(1)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)\left(C_2z+C_3\right)-C_4z^2-C_5z-C_6}{\left(a^{(1)}-a^{(2)}\right)\left(a^{(2)}-a^{(3)}\right)\left(a^{(2)}-a^{(4)}\right)},$$

$$g_3^{(k)}\left(z\right)=\psi_3^{(k)}\left(z\right)+\frac{-\left(a^{(1)}a^{(3)}+a^{(1)}a^{(4)}+a^{(3)}a^{(4)}\right)C_1+\left(a^{(1)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)\left(C_2z+C_3\right)-C_4z^2-C_5z-C_6}{\left(a^{(1)}-a^{(2)}\right)\left(a^{(2)}-a^{(3)}\right)\left(a^{(2)}-a^{(4)}\right)},$$

$$g_4^{(k)}\left(z\right)=\psi_4^{(k)}\left(z\right)+\frac{-\left(a^{(1)}a^{(3)}+a^{(1)}a^{(4)}+a^{(3)}a^{(4)}\right)C_1+\left(a^{(1)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)\left(C_2z+C_3\right)-C_4z^2-C_5z-C_6}{\left(a^{(1)}-a^{(2)}\right)\left(a^{(2)}-a^{(3)}\right)\left(a^{(2)}-a^{(4)}\right)},$$

где функции $\psi_i^{(k)}$, $i=\overline{1,4}$, *не зависят от констант* C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы докажем для функции $g_1^{(k)}\left(z\right)$ методом математической индукции. Для $k=0$ данное утверждение следует из формулы (24). Предположим, что лемма справедлива для всех $k=0,1,\ldots,n$. Докажем ее утверждение для функции $g_1^{(n+1)}\left(z\right)$. Согласно формуле (29) имеем

$$g_1^{(n+1)}\left(z\right)=\frac{1}{2\left(a^{(1)}-a^{(2)}\right)\left(a^{(1)}-a^{(3)}\right)\left(a^{(1)}-a^{(4)}\right)}\left(-\int_0^l\left(z+l-\xi\right)^2\varphi_3\left(\xi\right)d\xi+\right.$$

$$+2\left(\left(a^{(2)}a^{(3)}+a^{(2)}a^{(4)}+a^{(3)}a^{(4)}\right)C_1-\left(a^{(2)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)\left(C_2(z+l)+C_3\right)\right)+$$

$$
\begin{gathered}
+2C_4(z+l)^2+2C_5(z+l)+2C_6+2\left(a^{(1)}-a^{(2)}\right)\left(a^{(1)}-a^{(3)}\right)\left(a^{(1)}-a^{(4)}\right)\psi_1^{(n)}(z-l)- \\
-2C_4l^2-4C_4lz-2C_5l-2\left(a^{(3)}a^{(4)}+a^{(2)}a^{(3)}+a^{(2)}a^{(4)}\right)\left(\int_0^l\varphi_1(\xi)d\xi+\left(a^{(1)}\right)^3J\left(\frac{z}{a^{(1)}}\right)\right)+ \\
+2z\left(\left(a^{(1)}\right)^2-a^{(2)}a^{(3)}-a^{(2)}a^{(4)}-a^{(3)}a^{(4)}\right)\left(\varphi_1(l)-\varphi_1(0)\right)+2\left(a^{(2)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)C_2l+ \\
+z^2\left(a^{(1)}+a^{(2)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)\left(\varphi_2(l)-\varphi_2(0)\right)+2\left(\left(a^{(1)}\right)^3+a^{(2)}a^{(3)}a^{(4)}\right)\left(\varphi_0(l)-\varphi_0(0)\right)+ \\
+2z\left(\left(a^{(1)}\right)^2a^{(2)}+\left(a^{(1)}\right)^2a^{(3)}+\left(a^{(1)}\right)^2a^{(4)}-a^{(2)}a^{(3)}a^{(4)}\right)\left(d\varphi_0(0)-d\varphi_0(l)\right)+ \\
+z^2\left(a^{(1)}a^{(2)}+a^{(1)}a^{(3)}+a^{(2)}a^{(3)}+a^{(1)}a^{(4)}+a^{(2)}a^{(4)}+a^{(3)}a^{(4)}\right)\left(d\varphi_1(0)-d\varphi_1(l)\right)+ \\
+z^2\left(a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)}+a^{(1)}a^{(2)}a^{(4)}+a^{(1)}a^{(3)}a^{(4)}+a^{(2)}a^{(3)}a^{(4)}\right)\left(d^2\varphi_0(l)-d^2\varphi_0(0)\right)+ \\
+2\left(a^{(1)}\right)^3\left(K\left(\frac{z}{a^{(1)}}\right)-\left(a^{(2)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)H\left(\frac{z}{a^{(1)}}\right)-a^{(2)}a^{(3)}a^{(4)}L\left(\frac{z}{a^{(1)}}\right)\right)+ \\
\left.+2\left(a^{(2)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)\int_0^l(z+l-\xi)\varphi_2(\xi)d\xi\right)=\psi_1^{(n+1)}(z)+ \\
+\frac{\left(a^{(2)}a^{(3)}+a^{(2)}a^{(4)}+a^{(3)}a^{(4)}\right)C_1-\left(a^{(2)}+a^{(3)}+a^{(4)}\right)\left(C_2z+C_3\right)+C_4z^2+C_5z+C_6}{\left(a^{(1)}-a^{(2)}\right)\left(a^{(1)}-a^{(3)}\right)\left(a^{(1)}-a^{(4)}\right)}.
\end{gathered}
$$

Аналогично доказываются представления леммы для значений $g_j^{(k)}(z)$, $j=2,3,4$.

С л е д с т в и е. *Для любых* $r,s,k,n\in\{0,1,2,...\}$ *сумма*

$$
g_1^{(r)}\left(x+a^{(1)}t\right)+g_2^{(s)}\left(x+a^{(2)}t\right)+g_3^{(k)}\left(x+a^{(3)}t\right)+g_4^{(n)}\left(x+a^{(4)}t\right)
$$

не зависит от C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из леммы 2.

Л е м м а 3. *Предположим, что функции* $\varphi_j\in C^{4-j}([0,l])$, $j=\overline{0,3}$, *и* $f\in C^2(\overline{Q})$. *Равенства* (33) *имеют место тогда и только тогда, когда они выполняются только для* $k=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул (29)–(32) получим

$$
\begin{gathered}
d^pg_1^{(k+1)}(-kl)-d^pg_1^{(k)}(-kl)=d^pg_1^{(k)}(l-kl)-d^pg_1^{(k-1)}(l-kl)= \\
=d^pg_1^{(k-1)}(2l-kl)-d^pg_1^{(k-2)}(2l-kl)=\ldots=d^pg_1^{(1)}(0)-d^pg_1^{(0)}(0),\quad p=\overline{0,4},
\end{gathered}
\tag{34}
$$

и

$$
\begin{gathered}
d^pg_2^{(k+1)}(l+kl)-d^pg_2^{(k)}(l+kl)=d^pg_2^{(k)}(kl)-d^pg_2^{(k-1)}(kl)= \\
=d^pg_2^{(k-1)}(kl-l)-d^pg_2^{(k-2)}(kl-l)=\ldots=d^pg_2^{(1)}(l)-d^pg_2^{(0)}(l),\quad p=\overline{0,4}.
\end{gathered}
\tag{35}
$$

Полученные равенства (34) и (35) доказывают утверждение леммы 3.

Т е о р е м а 3. *Предположим, что функции* $\varphi_j\in C^{4-j}([0,l])$, $j=\overline{0,3}$, *и* $f\equiv 0$. *В классе функций* $C^4(\overline{Q})$ *существует единственное классическое решение задачи* (1)–(3) *при выполнении условий гладкости на заданные функции тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования*

$$
d^i\varphi_j(0)=d^i\varphi_j(l),\ j=\overline{0,3},\ i=\overline{0,4-j}.
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из предыдущих рассуждений, лемм 2, 3 и следствия.

Т е о р е м а 4. *Предположим, что функции* $\varphi_j \in C^{4-j}([0,l])$, $j = \overline{0,3}$, *и* $f \in C^2(\overline{Q})$. *В классе функций* $C^4(\overline{Q})$ *существует единственное классическое решение задачи* (1)–(3) *при выполнении условий гладкости на заданные функции тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования*

$$d^i\varphi_j(0) = d^i\varphi_j(l),\ j = \overline{0,3},\ i = \overline{0,4-j},\ f(0,0) = f(0,l).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично следует из предыдущих рассуждений, лемм 2, 3, следствия и теоремы 2.

Заключение. Получены формулы классического решения смешанной задачи для строго гиперболического уравнения четвертого порядка с четырьмя различными семействами характеристик. Доказано, что эта задача имеет единственное решение только тогда, когда выполняются в угловых точках заданной области изменения независимых переменных условия согласования для заданных функций уравнения, условий Коши и граничных условий. Следует отметить, что эти условия являются необходимыми и достаточными.

Список использованных источников

1. Корзюк, В. И. Классические решения смешанных задач для одномерного биволнового уравнения / В. И. Корзюк, Нгуен Ван Винь // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 1. – С. 69–79.

2. Корзюк, В. И. Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного биволнового уравнения / В. И. Корзюк, Нгуен Ван Винь // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 3. – С. 16–29.

3. Корзюк, В. И. Решение задачи для нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка с двукратными характеристиками / В. И. Корзюк, Нгуен Ван Винь // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 38–52.

4. Korzyuk, V. I. Cauchy problem for some fourth-order nonstrictly hyperbolic equations / V. I. Korzyuk, N. V. Vinh // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. – 2016. – 7 (5). – P. 869–879. https://doi.org/10.17586/2220-8054-2016-7-5-869-879

5. Корзюк, В. И. Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 5. – С. 700–709.

References

1. Korzyuk V. I., N. V. Vinh. Classical solutions of mixed problem for one-dimensional biwave equation. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2016, no 1, pp. 69–79 (in Russian).

2. Korzyuk V. I., Nguen Van Vinh. Classical solution of a problem with an integral condition for the one-dimensional biwave equation. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2016, no 3, pp. 16–29 (in Russian).

3. Korzyuk V. I., Nguen Van Vinh. Solving the problem for the nonstrictly fourth order hyperbolic equation with double characteristics. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2017, no 1, pp. 38–52 (in Russian).

4. Korzyuk V. I., Vinh N. V. Cauchy problem for some fourth-order nonstrictly hyperbolic equations. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics,* 2016, 7 (5), pp. 869–879. https://doi.org/10.17586/2220-8054-2016-7-5-869-879

5. Korzyuk V. I, Kozlovskaya I. S. Solution of the Cauchy problem for a hyperbolic equation with constant coefficients in the case of two independent variables. *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 5, pp. 707–716. https://doi.org/10.1134/s0012266112050096

Информация об авторах

Виктор Иванович Корзюк – академик, профессор, доктор физико-математических наук, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь), Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by

Нгуен Ван Винь – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vinhnguyen0109@gmail.com

Information about the authors

Viktor I. Korzyuk – Academician, Professor, D. Sc. (Physics and Mathematics), Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus), Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by

Nguyen Van Vinh – Postgraduate Student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vinhnguyen0109@gmail.com