ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.988,519.63,519.65
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-149-163

Поступила в редакцию 05.04.2018
Received 05.04.2018

М. В. Игнатенко[1], Л. А. Янович[2]

[1]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
[2]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ЭРМИТА – БИРКГОФА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Аннотация. Рассматривается проблема построения и исследования обобщенных интерполяционных формул Эрмита – Биркгофа для дифференциальных операторов произвольного порядка в частных производных, заданных в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций многих переменных. Построение операторных многочленов основано на интерполяционных полиномах для скалярных функций относительно произвольной чебышевской системы, а также на обобщенных интерполяционных формулах Эрмита – Биркгофа, полученных авторами ранее для операторов общего вида в функциональных пространствах. Приведенные операторные формулы имеют различную структуру и содержат интегралы Стилтьеса и дифференциалы Гато интерполируемого оператора. Получено явное представление погрешности операторного интерполирования. Рассмотрены некоторые частные случаи обобщенных формул Эрмита – Биркгофа для дифференциальных операторов в частных производных. Представленные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях как основа построения приближенных методов решения некоторых нелинейных операторно-дифференциальных уравнений, встречающихся в математической физике.

Ключевые слова: операторный многочлен, операторное интерполирование, обобщенное интерполирование типа Эрмита – Биркгофа, дифференциальный оператор, дифференциал Гато, интеграл Стилтьеса, погрешность интерполяции

Для цитирования. Игнатенко, М. В. Обобщенные интерполяционные многочлены Эрмита – Биркгофа для дифференциальных операторов произвольного порядка в частных производных / М. В. Игнатенко, Л. А. Янович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 149–163. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-149-163

M. V. Ignatenko[1], L. A. Yanovich[2]

[1]Belarusian State University, Minsk, Belarus
[2]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

GENERALIZED INTERPOLATION HERMITE – BIRKHOFF POLYNOMIALS FOR ARBITRARY-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL OPERATORS

Abstract. This article is devoted to the problem of construction and research of the generalized Hermite – Birkhoff interpolation formulas for arbitrary-order partial differential operators given in the space of continuously differentiable functions of many variables. The construction of operator interpolation polynomials is based both on interpolation polynomials for scalar functions with respect to an arbitrary Chebyshev system, and on the generalized Hermite – Birkhoff interpolation formulas obtained earlier by the authors for general operators in functional spaces. The presented operator formulas contain the Stieltjes integrals and the Gateaux differentials of an interpolated operator. An explicit representation of the error of operator interpolation was obtained. Some special cases of the generalized Hermite – Birkhoff formulas for partial differential operators are considered. The obtained results can be used in theoretical research as the basis for constructing approximate methods for solution of some nonlinear operator-differential equations found in mathematical physics.

Keywords: operator polynomial, operator interpolation, generalized Hermite – Birkhoff interpolation, differential operator, Gateaux differential, Stieltjes integral, interpolation error

For citation. Ignatenko M. V., Yanovich L. A. Generalized interpolation Hermite – Birkhoff polynomials for arbitrary-order partial differential operators. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 149–163 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-149-163

Введение. Рассмотрим задачу применения обобщенных операторных интерполяционных формул Эрмита – Биркгофа, полученных авторами ранее в работе [1] для операторов общего вида в функциональных пространствах, к построению интерполяционных многочленов типа Эрмита – Биркгофа для одного частного случая – дифференциальных операторов произвольного фиксированного порядка в частных производных, заданных в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций многих переменных.

© Игнатенко М. В., Янович Л. А., 2018

Пусть $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$ – мультииндекс с неотрицательными составляющими $\{0\le\alpha_j\le m\}_{j=1}^m$ и точка $t=(t_1,t_2,...,t_m)\subseteq\mathbb{R}^m$. Через $D^\alpha x(t)$ обозначим производную функции $x(t)=x(t_1,t_2,...,t_m)$ порядка $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_m$ вида

$$D^\alpha x(t)=\frac{\partial^{|\alpha|}x(t_1,t_2,...,t_m)}{\partial t_1^{\alpha_1}\partial t_2^{\alpha_2}\cdots\partial t_m^{\alpha_m}},\quad D^0x(t)=x(t).$$

Для производных невысоких порядков будем использовать также обозначения $x'_{t_i}(t)=\dfrac{\partial x(t)}{\partial t_i}$, $x''_{t_i,t_j}(t)=\dfrac{\partial^2x(t)}{\partial t_i\partial t_j}$.

Рассмотрим дифференциальные операторы $F:C^{(m)}(T)\to Y$ фиксированного порядка m в частных производных:

$$F(x)=f\left(t,\left\{D^\alpha x(t)\right\}_{|\alpha|=0}^m\right),\tag{1}$$

где $C^{(m)}(T)$ – пространство функций $x(t)=x(t_1,t_2,...,t_m)$ непрерывно-дифференцируемых m раз на прямоугольнике $T=T_1\times T_2\times\cdots\times T_m\subseteq\mathbb{R}^m$; Y – некоторое функциональное пространство; функция $y=f(t,u_0,u_1,...,u_\mu)$ задана на прямоугольнике $\Omega=T\times U_0\times U_1\times\cdots\times U_\mu$, U_i – отрезки действительной оси $(i=0,1,...,\mu)$, $\mu=C_{2m}^m-1=\dfrac{(2m)!}{(m!)^2}-1$; $\left\{D^\alpha x(t)\right\}_{|\alpha|=0}^m=$ $=\left\{x(t),x'_{t_1}(t),x'_{t_2}(t),...,x'_{t_m}(t),x''_{t_1^2}(t),x''_{t_1,t_2}(t),...,x''_{t_m^2}(t),...,\dfrac{\partial^mx(t)}{\partial t_1^m},\dfrac{\partial^mx(t)}{\partial t_1^{m-1}\partial t_2},...,\dfrac{\partial^mx(t)}{\partial t_m^m}\right\}$. Далее предполагаем, что смешанные производные одинакового порядка, отличающиеся лишь последовательностью дифференцирования по одним и тем же переменным, совпадают, например, $x''_{t_1,t_2}(t_1,t_2)=x''_{t_2,t_1}(t_1,t_2)$ при $m=2$.

Формулы Эрмита – Биркгофа, содержащие дифференциалы Гато интерполируемого оператора. Пусть $I_{k,n}=(\varepsilon_{ij})_{i,j=0}^{k,n}$ – прямоугольная матрица размерности $(k+1)\times(n+1)$, элементы ε_{ij} $(i=0,1,\ldots,k;\ j=0,1,\ldots,n)$ которой 0 или 1; множество $N_{k,n}=\{(i,j):\varepsilon_{ij}=1,\ 0\le i\le k,\ 0\le j\le n\}$, $M_{k,n}=\{(i,j):\varepsilon_{ij}=1,\ 0\le i\le k,\ 1\le j\le n\}$; функции $H_{ij}^{(k)}(t)$ – фундаментальные интерполяционные многочлены, соответствующие задаче Эрмита – Биркгофа для случая скалярной чебышевской системы функций $\{\varphi_i(t)\}_{i=0}^r,\ r\in\mathbb{N}$; $D_\nu H_{ij}^{(k)}(t_p)=\delta_{ip}\delta_{\nu j}$, где $D_0f(t)=f(t)$, $D_\nu f(t)=\sum\limits_{j=0}^{\nu}a_{j\nu}f^{(j)}(t)$, $a_{j\nu}$ – заданные числа, δ_{ij} – символ Кронекера; $\sigma_k(t)=\sum\limits_{(i,0)\in N_{k,0}}H_{i0}^{(k)}(t)$ – некоторая постоянная или переменная на $T\subseteq\mathbb{R}$ величина. Заметим, что в верхнем индексе (k) обозначения $H_{ij}^{(k)}(t)$ указан номер последней строки в соответствующей матрице $I_{k,n}$.

Рассмотрим операторно-дифференциальные выражения

$$\tilde D_jF(x)\equiv\tilde D_jF[x;h_1h_2...h_j]=\sum_{\nu=1}^{j}a_{\nu j}\delta^\nu F[x;h_1h_2...h_j],\quad \tilde D_0F(x)=F(x),\tag{2}$$

где $\delta^\nu F[x;h_1h_2...h_j]=\delta^\nu F[x;\underbrace{1,1,...,1}_{\nu-},h_1h_2...h_j]$ – дифференциал Гато ν-го порядка оператора F в точке x, когда первые $(\nu-1)$ направления $h_i=h_i(t)\equiv1$ $(i=1,2,...,\nu-1)$, а последнее ν-е направление h_ν является произведением вида $h_\nu=h_1h_2...h_j$ $\left(h_\nu=h_\nu(t)\in C^{(m)}(T)\right)$.

Ранее в работе [1] для операторов $F(x)$ общего вида, заданных на функциональных пространствах непрерывных и гладких функций, были построены обобщенные интерполяционные операторные многочлены Эрмита – Биркгофа

$$B_{k,n}(F;x)=F(x_p)+\sum_{(i,0)\in N_{k,0}}\int_0^1\delta F\left[x_p+\tau(x_i-x_p);\frac{H_{i0}^{(k)}(x)}{\sigma_k(x)}(x_i-x_p)\right]d\tau+$$

$$+\sum_{(i,j)\in M_{k,n}}\tilde{D}_jF\left[x_i;\frac{H_{ij}^{(k)}(x)}{\sigma_k(x)}\sigma_k(x_i)\right], \tag{3}$$

где x_p – фиксированный узел, соответствующий элементу ε_{p0} множества $N_{k,0}$, для которых выполняются условия

$$B_{k,n}(F;x_i)=F(x_i),\,(i,0)\in N_{k,0};\;\;\tilde{D}_jB_{k,n}(F;x_i)=\tilde{D}_jF(x_i),\,(i,j)\in M_{k,n}. \tag{4}$$

Когда множество $N_{k,0}$ пустое, то $B_{k,n}(F;x)=\sum\limits_{(i,j)\in M_{k,n}}\tilde{D}_jF\left[x_i;H_{ij}^{(k)}(x)\right]$ и первая группа равенств в условиях (4) отсутствует.

Для погрешности $r_{k,n}(x)=F(x)-B_{k,n}(F;x)$, где $B_{k,n}(F;x)$ – интерполяционный полином (3), в работе [2] было указано явное представление:

$$r_{k,n}(x)=\sum_{(i,0)\in N_{k+1,0}}\int_0^1\delta F\left[x_p+\tau(x_i-x_p);\left\{\frac{H_{i0}^{(k+1)}(x)}{\sigma_{k+1}(x)}-\frac{H_{i0}^{(k)}(x)}{\sigma_k(x)}\right\}(x_i-x_p)\right]d\tau+$$

$$+\sum_{(i,j)\in M_{k+1,n+k}}\tilde{D}_jF\left[x_i;\frac{H_{ij}^{(m+1)}(x)}{\sigma_{k+1}(x)}\sigma_{k+1}(x_i)-\frac{H_{ij}^{(k)}(x)}{\sigma_k(x)}\sigma_k(x_i)\right], \tag{5}$$

где x_p, как и ранее, – фиксированный узел, соответствующий элементу ε_{p0} множества $N_{k,0}$; $x_{k+1}=x$; q – разность числа столбцов матриц $I_{k+1,n+q}$ и $I_{k,n}$; $H_{k+1,j}^{(k)}(x)\equiv 0$ $\left(j=0,1,2,...\right)$.

В данной работе для дифференциального оператора (1) на основе формул (3) и (5) получим интерполяционный многочлен и представление его погрешности.

Отметим, что дифференциальный оператор (1) зависит от одной функциональной переменной $x(t)$. Поэтому дифференциал Гато $\delta F[x;h]$ в точке $x = x(t)$ по направлению $h = h(t)$ $\left(x,h\in C^{(m)}(T)\right)$ для этого оператора вычисляется по правилу

$$\delta F[x;h]=\frac{\partial f}{\partial x(t)}h(t)+\frac{\partial f}{\partial x'_{t_1}(t)}h'_{t_1}(t)+\frac{\partial f}{\partial x'_{t_2}(t)}h'_{t_2}(t)+...+\frac{\partial f}{\partial x'_{t_m}(t)}h'_{t_m}(t)+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x''_{t_1^2}(t)}h''_{t_1^2}(t)+\frac{\partial f}{\partial x''_{t_1,t_2}(t)}h''_{t_1,t_2}(t)+...+\frac{\partial f}{\partial x''_{t_m^2}(t)}h''_{t_m^2}(t)+...+\frac{\partial f}{\partial\left(\dfrac{\partial^m x(t)}{\partial t_1^m}\right)}\frac{\partial^m h(t)}{\partial t_1^m}+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial\left(\dfrac{\partial^m x(t)}{\partial t_1^{m-1}\partial t_2}\right)}\frac{\partial^m h(t)}{\partial t_1^{m-1}\partial t_2}+...+\frac{\partial f}{\partial\left(\dfrac{\partial^m x(t)}{\partial t_m^m}\right)}\frac{\partial^m h(t)}{\partial t_m^m}\equiv\sum_{|\alpha|=0}^m\frac{\partial f\left(t,\left\{D^\beta x(t)\right\}_{|\beta|=0}^m\right)}{\partial\left(D^\alpha x(t)\right)}D^\alpha h(t),$$

где $\beta=\left(\beta_1,\beta_2,...,\beta_m\right)$ – мультииндекс, $|\beta|=\beta_1+\beta_2+...+\beta_m$.

Далее, дифференциал Гато второго порядка $\delta^2F[x;h_1,h_2]$ оператора F в точке $x = x(t)$ по направлениям $h_1=h_1(t)$, $h_2=h_2(t)$ $\left(x,h_1,h_2\in C^{(m)}(T)\right)$ равен

$$\delta^2 F[x;h_1,h_2]=\sum_{|\alpha|=0}^{m}\sum_{|\gamma|=0}^{m}\frac{\partial^2 f\left(t,\left\{D^\beta x(t)\right\}_{|\beta|=0}^{m}\right)}{\partial\left(D^\alpha x(t)\right)\partial\left(D^\gamma x(t)\right)}D^\alpha h_1(t)D^\gamma h_2(t).$$

Следовательно,

$$\delta^2 F[x;h]\equiv\delta^2 F[x;1,h]=\sum_{|\alpha|=0}^{m}\frac{\partial^2 f\left(t,\left\{D^\beta x(t)\right\}_{|\beta|=0}^{m}\right)}{\partial x(t)\partial\left(D^\alpha x(t)\right)}D^\alpha h(t).$$

В случае $\nu=3,4,\ldots$ аналогично получим, что для операторов (1) дифференциал Гато $\delta^\nu F[x;h_1,h_2,\ldots,h_\nu]$ порядка ν содержит произведение производных D^α от функций $h_1(t),\ h_2(t),\ldots,\ h_\nu(t)$ $\left(x(t),h_i(t)\in C^{(m)}(T);t\in T\right)$, а

$$\delta^\nu F[x;h]\equiv\delta^\nu F[x;\underbrace{1,1,\ldots,1}_{\nu-1},h]=\sum_{|\alpha|=0}^{m}\frac{\partial^\nu f\left(t,\left\{D^\beta x(t)\right\}_{|\beta|=0}^{m}\right)}{\partial x^{\nu-1}(t)\partial\left(D^\alpha x(t)\right)}D^\alpha h(t).$$

Обозначим $h_{1,j}=h_1h_2\ldots h_j$ $(j=2,3,\ldots).$ Тогда по определению

$$\tilde{D}_j F\left[x;h_{1,j}\right]=\sum_{\nu=1}^{j}\sum_{|\alpha|=0}^{m}a_{\nu j}\frac{\partial^\nu f\left(t,\left\{D^\beta x(t)\right\}_{|\beta|=0}^{m}\right)}{\partial x^{\nu-1}(t)\partial\left(D^\alpha x(t)\right)}D^\alpha h_{1,j}(t). \tag{6}$$

Следовательно, для операторов (1) формула (3) преобразуется к виду

$$B_{k,n}(F;x)=f\left(t,\left\{D^\alpha x_p(t)\right\}_{|\alpha|=0}^{m}\right)+$$

$$+\sum_{(i,0)\in N_{k,0}}\int_0^1\sum_{|\alpha|=0}^{m}\frac{\partial f\left(t,\left\{D^\beta \upsilon_i(t,\tau)\right\}_{|\beta|=0}^{m}\right)}{\partial\left(D^\alpha \upsilon_i(t,\tau)\right)}D^\alpha\left\{\frac{H_{i0}^{(k)}\left(x(t)\right)}{\sigma_k\left(x(t)\right)}\left(x_i(t)-x_p(t)\right)\right\}d\tau+$$

$$+\sum_{(i,j)\in M_{k,n}}\sum_{\nu=1}^{j}\sum_{|\alpha|=0}^{m}a_{\nu j}\frac{\partial^\nu f\left(t,\left\{D^\beta x_i(t)\right\}_{|\beta|=0}^{m}\right)}{\partial x_i^{\nu-1}(t)\partial\left(D^\alpha x_i(t)\right)}D^\alpha\left\{\frac{H_{ij}^{(k)}\left(x(t)\right)}{\sigma_k\left(x(t)\right)}\sigma_k\left(x_i(t)\right)\right\}, \tag{7}$$

где функция $\upsilon_i(t,\tau)=x_p(t)+\tau\left(x_i(t)-x_p(t)\right),$ $D^\alpha\upsilon_i\left(t,\tau\right)=\dfrac{\partial^{|\alpha|}\upsilon_i\left(t_1,t_2,\ldots,t_m,\tau\right)}{\partial t_1^{\alpha_1}\partial t_2^{\alpha_2}\cdots\partial t_m^{\alpha_m}},$ $\left(i,0\right)\in N_{k,0};$ x_p – фиксированный узел, соответствующий элементу ε_{p0} множества $N_{k,0}$.

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 1. *Обобщенный операторный многочлен* (7) *является интерполяционным для заданного на множестве* $C^{(m)}\left(T\right)$ *оператора* $F(x)$ *вида* (1), *и для него имеют место условия* (4).

Воспользуемся правилом (5) для представления погрешности интерполирования оператора (1) полиномом (7).

С л е д с т в и е 1. *Для погрешности интерполирования* $r_{k,n}(x)=F(x)-B_{k,n}(F;x)$ *дифференциального оператора* $F(x)$ *вида* (1) *полиномом* $B_{k,n}(F;x)$, *заданным равенством* (7), *имеет место представление*

$$r_{k,n}(x)=\sum_{(i,0)\in N_{k+1,0}}\int_0^1\sum_{|\alpha|=0}^{m}\frac{\partial f\left(t,\left\{D^{\beta}\upsilon_i(t,\tau)\right\}_{|\beta|=0}^{m}\right)}{\partial\left(D^{\alpha}\upsilon_i(t,\tau)\right)}D^{\alpha}\left\{\left(\frac{H_{i0}^{(k+1)}\left(x(t)\right)}{\sigma_{k+1}\left(x(t)\right)}-\frac{H_{i0}^{(k)}\left(x(t)\right)}{\sigma_k\left(x(t)\right)}\right)\left(x_i(t)-x_p(t)\right)\right\}d\tau+$$

$$+\sum_{(i,j)\in M_{k+1,n+q}}\sum_{\nu=1}^{j}\sum_{|\alpha|=0}^{m}a_{\nu j}\frac{\partial^{\nu}f\left(t,\left\{D^{\beta}x_i(t)\right\}(t)\right)}{\partial x_i^{\nu-1}(t)\partial\left(D^{\alpha}x_i(t)\right)}D^{\alpha}\left\{\frac{H_{ij}^{(k+1)}\left(x(t)\right)}{\sigma_{k+1}\left(x(t)\right)}\sigma_{k+1}(x_i(t))-\frac{H_{ij}^{(k)}\left(x(t)\right)}{\sigma_k\left(x(t)\right)}\sigma_k\left(x_i(t)\right)\right\},$$

где $x_{k+1}=x$; q – *разность числа столбцов матриц* $I_{k+1,n+q}$ *и* $I_{k,n}$; $H_{k+1,j}^{(k)}(x)\equiv 0$ $(j=0,1,2,\ldots)$.

Формулы лагранжева и эрмитова типа с узлами второй кратности для рассматриваемого дифференциального оператора вида (1) в частных производных, а также явные представления погрешности интерполирования получены в работе [3].

Многочлены Эрмита – Биркгофа, содержащие дифференциалы Гато и интеграл Стилтьеса интерполируемого оператора. Ранее в работе [1] были построены обобщенные интерполяционные операторные многочлены, которые заданы на множествах функций одной переменной и содержат дифференциалы Гато и интегралы Стилтьеса интерполируемого оператора. В частности, если числовая функция

$$\chi_1(\tau_1,t_1)=\begin{cases}1, & \tau_1\ge t_1;\\ 0, & \tau_1<t_1,\end{cases}\tag{8}$$

где $0<\tau_1<1$, $t_1\in\mathbb{R}$, $\chi_1(0,t_1)\equiv 0$, а $\chi_1(1,t_1)\equiv 1$, то для операторного многочлена

$$B_{k,n}(F;x)=F(x_p)+\sum_{(i,0)\in N_{k,0}}\int_0^1\frac{H_{i0}^{(k)}\left[x(\tau_1)\right]}{\sigma_k\left[x(\tau_1)\right]}d_{\tau_1}F\left[x_p(\cdot)+\chi_1(\tau_1,\cdot)\left(x_i(\cdot)-x_p(\cdot)\right)\right]+$$

$$+\sum_{(i,j)\in M_{k,n}}\tilde{D}_jF\left[x_i;\frac{H_{ij}^{(k)}(x)}{\sigma_k(x)}\sigma_k(x_i)\right],\tag{9}$$

где x_p – фиксированный узел, соответствующий элементу ε_{p0} матрицы $I_{m,n}$, также выполняются интерполяционные условия (4). Когда множество $N_{k,0}$ пустое, то, как и ранее,

$$B_{k,n}(F;x)=\sum_{(i,j)\in M_{k,n}}\tilde{D}_jF\left[x_i;H_{ij}^{(k)}(x)\right]$$

и первая группа равенств в условиях (4) отсутствует.

В работе [2] для погрешности $r_{k,n}(x)=F(x)-B_{k,n}(F;x)$, где $B_{k,n}(F;x)$ – интерполяционный полином (9), получено следующее представление:

$$r_{k,n}(x)=\sum_{(i,0)\in N_{k+1,0}}\int_0^1\left\{\frac{H_{i0}^{(k+1)}\left[x(\tau_1)\right]}{\sigma_{k+1}\left[x(\tau_1)\right]}-\frac{H_{i0}^{(k)}\left[x(\tau_1)\right]}{\sigma_k\left[x(\tau_1)\right]}\right\}d_{\tau_1}F\left[x_p(\cdot)+\gamma(\tau,\cdot)\left(x_i(\cdot)-x_p(\cdot)\right)\right]+$$

$$+\sum_{(i,j)\in M_{k+1,n+q}}\tilde{D}_jF\left[x_i;\frac{H_{ij}^{(k+1)}(x)}{\sigma_{k+1}(x)}\sigma_{k+1}(x_i)-\frac{H_{ij}^{(k)}(x)}{\sigma_k(x)}\sigma_k(x_i)\right],\tag{10}$$

где x_p – фиксированный узел, соответствующий элементу ε_{p0} множества $N_{k,0}$, $x_{k+1}=x$, q – разность числа столбцов матриц $I_{k+1,n+q}$ и $I_{k,n}$, $H_{k+1,j}^{(k)}(x)\equiv 0$ $(j=0,1,2,\ldots)$.

В этой работе обобщим формулы (9) и (10) на случай функций многих переменных $\tau=(\tau_1,\tau_2,...,\tau_m)\in[0,1]^m$ и $t=(t_1,t_2,...,t_m)\in\mathbb{R}^m$. Введем числовую функцию

$$\chi(\tau,t)\equiv\chi(\tau_1,\tau_2,...,\tau_m,t_1,t_2,...,t_m)=\prod_{i=1}^{m}\chi_1(\tau_i,t_i),$$

где $\chi_1(\tau_i,t_i)$ задается по правилу (8). Учитывая определение $\chi_1(\tau_i,t_i)$, для $\chi(\tau,t)$ имеем

$$\chi(\tau,t)=\begin{cases}1, & \tau_i\ge t_i\ ,\ i=1,2,...,m;\\ 0, & \tau_j<t_j,\ j\in\{1,2,...,m\},\end{cases}$$

где $0<\tau_1,\tau_2,...,\tau_m<1$, $\chi(\underbrace{0,0,...,0}_{m},t)\equiv 0$, а $\chi(\underbrace{1,1,...,1}_{m},t)\equiv 1$.

Т е о р е м а 2. *Для операторного многочлена*

$$B_{k,n}(F;x)=F(x_p)+\sum_{(i,0)\in N_{k,0}}\int\limits_{[0,1]^m}\frac{H_{i0}^{(k)}[x(\tau)]}{\sigma_k[x(\tau)]}d_\tau F\left[x_p(\cdot)+\chi(\tau,\cdot)\left(x_i(\cdot)-x_p(\cdot)\right)\right]+$$

$$+\sum_{(i,j)\in M_{k,n}}\tilde{D}_jF\left[x_i;\frac{H_{ij}^{(k)}(x)}{\sigma_k(x)}\sigma_k(x_i)\right],\qquad(11)$$

где x_p *– фиксированный узел, соответствующий элементу* ε_{p0} *матрицы* $I_{m,n}$, *выполняются интерполяционные условия* (4). *Когда множество* $N_{k,0}$ *пустое, то*

$$B_{k,n}(F;x)=\sum_{(i,j)\in M_{k,n}}\tilde{D}_jF\left[x_i;H_{ij}^{(k)}(x)\right]$$

и первая группа равенств в условиях (4) *отсутствует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $x=x_q$ (здесь индексу q соответствует первый индекс элемента $\varepsilon_{p0}=1$ матрицы $I_{k,n}$) значение $\sigma_k(x_q)=1$ и справедливы равенства $\tilde{D}_0\frac{H_{i0}^{(k)}(x_q)}{\sigma_k(x_q)}=\delta_{iq}$ для $(i,0)\in N_{k,0}$ и $\tilde{D}_0\frac{H_{ij}^{(k)}(x_q)\sigma_k(x_i)}{\sigma_k(x_q)}=\delta_{iq}\delta_{0j}\sigma_k(x_i)=0$ для $(i,j)\in M_{k,n}$. Поэтому в узлах x_q, где $(q,0)\in N_{k,0}$, имеем

$$B_{k,n}(x_q)=F(x_p)+\int\limits_{[0,1]^m}d_\tau F\left[x_p(\cdot)+\chi(\tau,\cdot)\left(x_q(\cdot)-x_p(\cdot)\right)\right]=F(x_q).$$

Заметим, если порядок дифференцирования $s\ge 1$, $q=0,1,...,k$, то для производной $\frac{d^s}{dx^s}\sigma_k(x)$ выполняются равенства $\frac{d^s}{dx^s}\sigma_k(x_q)=\sum_{(i,0)\in N_{k,0}}\delta_{iq}\delta_{0s}=0$. Учитывая это, несложно убедиться также в справедливости равенства

$$D_s\left[\frac{H_{ij}^{(k)}(x_q)}{\sigma_k(x_q)}\right]=\frac{D_s\left[H_{ij}^{(k)}(x_q)\right]}{\sigma_k(x_q)},$$

где, как и ранее, $D_sf(t)=\sum_{j=0}^{s}a_{js}f^{(j)}(t)$, a_{js} – заданные числа. При $(q,j)\in M_{k,n}$, т. е. для $j\ge 1$, с учетом (2) получим $\tilde{D}_jB_{k,n}(x_q)=\sum_{\nu=1}^{j}a_{\nu j}\delta^{\nu}B_{k,n}[x_q;h_1h_2...h_j]$. Поэтому

$$\tilde{D}_s\left[\frac{H_{ij}^{(k)}(x_q)\sigma_k(x_i)}{\sigma_k(x_q)}\right]=D_s\left[H_{ij}^{(k)}(x_q)\right]\frac{\sigma_k(x_i)}{\sigma_k(x_q)}h_1(t)h_2(t)...h_s(t)$$

для $s\geq 1$. Так как значение $D_s\left[H_{ij}^{(k)}(x_q)\right]=\delta_{iq}\delta_{sj}$, то из всех слагаемых в (11), содержащих выражения $\dfrac{H_{ij}^{(k)}(x)\sigma_k(x_i)}{\sigma_k(x)}$, останутся только те, для которых $i = q$ и $s = j$. Отсюда следует вторая группа равенств в (4). Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. *Для погрешности* $r_{k,n}(x)=F(x)-B_{k,n}(F;x)$, *где* $B_{k,n}(F;x)$ *– интерполяционный полином* (11), *справедливо следующее представление*:

$$r_{k,n}(x)=\sum_{(i,0)\in N_{k+1,0}}\int\limits_{[0,1]^m}\left\{\frac{H_{i0}^{(k+1)}\left[x(\tau)\right]}{\sigma_{k+1}\left[x(\tau)\right]}-\frac{H_{i0}^{(k)}\left[x(\tau)\right]}{\sigma_k\left[x(\tau)\right]}\right\}d_\tau F\left[x_p(\cdot)+\gamma(\tau,\cdot)\left(x_i(\cdot)-x_p(\cdot)\right)\right]+$$

$$+\sum_{(i,j)\in M_{k+1,n+q}}\tilde{D}_jF\left[x_i;\frac{H_{ij}^{(k+1)}(x)}{\sigma_{k+1}(x)}\sigma_{k+1}(x_i)-\frac{H_{ij}^{(k)}(x)}{\sigma_k(x)}\sigma_k(x_i)\right], \tag{12}$$

где x_p *– фиксированный узел, соответствующий элементу* ε_{p0} *множества* $N_{m,0}$, $x_{k+1}=x$, q *– разность числа столбцов матриц* $I_{k+1,n+q}$ *и* $I_{k,n}$, $H_{k+1,j}^{(k)}(x)\equiv 0$ $(j=0,1,2,...)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, в случае $(\nu,0)\in N_{k,0}$ погрешность $r_{k,n}(x_\nu)=0$. Учитывая, что $M_{k,n}\equiv M_{k,n+q}$ $(q=0,1,2,...)$, при $\nu=k+1$ получим

$$r_{k,n}(x_{k+1})=\sum_{(i,0)\in N_{k+1,0}}\int\limits_{[0,1]^m}\frac{H_{i0}^{(k+1)}\left[x_{k+1}(\tau)\right]}{\sigma_{k+1}\left[x_{k+1}(\tau)\right]}d_\tau F\left[x_p(\cdot)+\chi(\tau,\cdot)\left(x_i(\cdot)-x_p(\cdot)\right)\right]+$$

$$+\sum_{(i,j)\in M_{k+1,n+q}}\tilde{D}_jF\left[x_i;\frac{H_{ij}^{(k+1)}(x_{k+1})}{\sigma_{k+1}(x_{k+1})}\sigma_{k+1}(x_i)\right]-$$

$$-\sum_{(i,0)\in N_{k+1,0}}\int\limits_{[0,1]^m}\frac{H_{i0}^{(k)}\left[x_{k+1}(\tau)\right]}{\sigma_k\left[x_{k+1}(\tau)\right]}d_\tau F\left[x_p(\cdot)+\chi(\tau,\cdot)\left(x_i(\cdot)-x_p(\cdot)\right)\right]-$$

$$-\sum_{(i,j)\in M_{k+1,n+q}}\tilde{D}_jF\left[x_i;-\frac{H_{ij}^{(k)}(x_{k+1})}{\sigma_k(x_{k+1})}\sigma_k(x_i)\right]=$$

$$=F(x_{k+1})-\sum_{(i,0)\in N_{k,0}}\int\limits_{[0,1]^m}\frac{H_{i0}^{(k)}\left[x_{k+1}(\tau)\right]}{\sigma_k\left[x_{k+1}(\tau)\right]}d_\tau F\left[x_p(\cdot)+\chi(\tau,\cdot)\left(x_i(\cdot)-x_p(\cdot)\right)\right]-$$

$$-\sum_{(i,j)\in M_{k,n}}\tilde{D}_jF\left[x_i;\frac{H_{ij}^{(k)}(x_{k+1})}{\sigma_k(x_{k+1})}\sigma_m(x_i)\right]=F(x_{k+1})-B_{k,n}(F;x_{k+1}).$$

Таким образом, теорема 3 доказана.

Воспользуемся формулами (11) и (12) для построения интерполяционного многочлена и представления его погрешности в случае дифференциального оператора в частных производных вида (1). С учетом равенства (6) формула (11) для оператора (1) преобразуется к виду

$$B_{k,n}(F;x)=f\left(t,\left\{D^{\alpha}x_p(t)\right\}_{|\alpha|=0}^{m}\right)+\sum_{(i,0)\in N_{k,0}}\int_{[0,1]^m}\frac{H_{i0}^{(k)}\left[x(\tau)\right]}{\sigma_k\left[x(\tau)\right]}d_{\tau}f\left(t,\left\{D^{\alpha}\xi_i(t,\tau)\right\}_{|\alpha|=0}^{m}\right)+$$

$$+\sum_{(i,j)\in M_{k,n}}\sum_{\nu=1}^{j}\sum_{|\alpha|=0}^{m}a_{\nu j}\frac{\partial^{\nu}f\left(t,\left\{D^{\beta}x_i(t)\right\}_{|\beta|=0}^{m}\right)}{\partial x_i^{\nu-1}(t)\partial\left(D^{\alpha}x_i(t)\right)}D^{\alpha}\left\{\frac{H_{ij}^{(k)}\left(x(t)\right)}{\sigma_k\left(x(t)\right)}\sigma_k\left(x_i(t)\right)\right\}, \tag{13}$$

где функция $\xi_i(t,\tau)=x_p(t)+\chi(\tau,t)\left(x_i(t)-x_p(t)\right)$, $D^{\alpha}\xi_i\left(t,\tau\right)=\dfrac{\partial^{|\alpha|}\xi_i\left(t_1,t_2,...,t_m,\tau\right)}{\partial t_1^{\alpha 1}\partial t_2^{\alpha 2}\cdots\partial t_m^{\alpha m}}$, $\left(i,0\right)\in N_{k,0}$; x_p – фиксированный узел, соответствующий элементу ε_{p0} множества $N_{k,0}$. Итак, доказана

Т е о р е м а 4. *Обобщенный операторный многочлен* (13) *является интерполяционным для заданного на множестве* $C^{(m)}\left(T\right)$ *дифференциального оператора* $F(x)$ *вида* (1), *и для него справедливы равенства* (4).

Воспользуемся формулой (12) для представления погрешности интерполирования оператора (1) полиномом (13).

С л е д с т в и е 2. *Для погрешности интерполирования* $r_{k,n}(x)=F(x)-B_{k,n}(F;x)$ *дифференциального оператора* $F(x)$ *вида* (1) *полиномом* $B_{k,n}(F;x)$, *заданным по правилу* (13), *имеет место представление*

$$r_{k,n}(x)=\sum_{(i,0)\in N_{k+1,0}}\int_{[0,1]^m}\left\{\frac{H_{i0}^{(k+1)}\left[x(\tau)\right]}{\sigma_{k+1}\left[x(\tau)\right]}-\frac{H_{i0}^{(k)}\left[x(\tau)\right]}{\sigma_k\left[x(\tau)\right]}\right\}\times$$

$$\times d_{\tau}f\left(t,\left\{D^{\alpha}\xi_i(t,\tau)\right\}_{|\alpha|=0}^{m}\right)+\sum_{(i,j)\in M_{k+1,n+q}}\sum_{\nu=1}^{j}\sum_{|\alpha|=0}^{m}a_{\nu j}\frac{\partial^{\nu}f\left(t,\left\{D^{\beta}x_i(t)\right\}_{|\beta|=0}^{m}\right)}{\partial x_i^{\nu-1}(t)\partial\left(D^{\alpha}x_i(t)\right)}\times$$

$$\times D^{\alpha}\left\{\frac{H_{ij}^{(k+1)}\left(x(t)\right)}{\sigma_{k+1}\left(x(t)\right)}\sigma_{k+1}\left(x_i(t)\right)-\frac{H_{ij}^{(k)}\left(x(t)\right)}{\sigma_k\left(x(t)\right)}\sigma_k\left(x_i(t)\right)\right\}, \tag{14}$$

где $x_{k+1}=x$; q – *разность числа столбцов матриц* $I_{k+1,n+q}$ *и* $I_{k,n}$; *многочлен* $H_{k+1,j}^{(k)}(x)\equiv 0$ $\left(j=0,1,2,...\right)$.

В частности, если через $l_{k,i}(x)$ обозначить фундаментальные многочлены, соответствующие задаче Лагранжа для узлов $x_0,x_1,...,x_k$ относительно чебышевской системы функций $\left\{\varphi_q(t)\right\}_{q=0}^{k}$, для которых справедливы равенства $l_{k,i}(x_j)=\delta_{ij}$ $(i,j=0,1,...,k)$, то при $p=0$ формула (11) принимает достаточно простую форму:

$$B_{k,0}(F;x)=F(x_0)+\sum_{i=1}^{k}\int_{[0,1]^m}\frac{l_{k,i}\left[x(\tau)\right]}{\sigma_k\left[x(\tau)\right]}d_{\tau}F\left[x_0(\cdot)+\chi(\tau,\cdot)\left(x_i(\cdot)-x_0(\cdot)\right)\right], \tag{15}$$

где $\sigma_k(x)=\sum_{i=0}^{k}l_{k,i}(x)$.

Интерполяционный многочлен (15) для дифференциального оператора (1) преобразуется к виду

$$B_{k,0}(F;x)=f\left(t,\left\{D^{\alpha}x_0(t)\right\}_{|\alpha|=0}^{m}\right)+\sum_{i=1}^{k}\int_{[0,1]^m}\frac{l_{k,i}\left[x(\tau)\right]}{\sigma_k\left[x(\tau)\right]}d_{\tau}f\left(t,\left\{D^{\alpha}\xi_i(t,\tau)\right\}_{|\alpha|=0}^{m}\right), \tag{16}$$

где функция $\xi_i(t,\tau)=x_0(t)+\chi(\tau,t)\left(x_i(t)-x_0(t)\right)$, а ее производная $D^{\alpha}\xi_i\left(t,\tau\right)=\dfrac{\partial^{|\alpha|}\xi_i\left(t_1,t_2,...,t_m,\tau\right)}{\partial t_1^{\alpha 1}\partial t_2^{\alpha 2}\cdots\partial t_m^{\alpha m}}$ $\left(i=1,2,...,k\right)$.

Как частный случай формулы (14), погрешность интерполирования $r_{k,0}(x)=F(x)-B_{k,0}(F;x)$ дифференциального оператора $F(x)$ вида (1) многочленом $B_{k,0}(F;x)$, заданным по правилу (16), имеет представление

$$r_{k,0}(x)=\sum_{i=1}^{k+1}\int\limits_{[0,1]^m}\left\{\frac{l_{k+1,i}\left[x(\tau)\right]}{\sigma_{k+1}\left[x(\tau)\right]}-\frac{l_{k,i}\left[x(\tau)\right]}{\sigma_{k}\left[x(\tau)\right]}\right\}d_{\tau}f\left(t,\left\{D^{\alpha}\xi_i\left(t,\tau\right)\right\}_{|\alpha|=0}^{m}\right),$$

где $x_{k+1}=x,\ l_{k,k+1}(x)\equiv 0.$

Далее, если через $h_{k,i}(x)$ и $q_{k,i}(x)$ обозначить фундаментальные многочлены, соответствующие задаче Эрмита в случае двукратных узлов $x_0,x_1,...,x_k$ относительно чебышевской системы функций $\left\{\varphi_q(t)\right\}_{q=0}^{2k+1}$, для которых справедливы равенства $h_{k,i}(x_j)=q'_{k,i}(x_j)=\delta_{ij},\ h'_{k,i}(x_j)=q_{k,i}(x_j)=0$ $(i,j=0,1,...,k),$ то в случае $\tilde{D}_1F(x)=\delta F[x;h]$ и $p=0$ формула (11) принимает сравнительно простую форму:

$$B_{k,1}(F;x)=F(x_0)+\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{[0,1]^m}\frac{h_{k,i}\left[x(\tau)\right]}{\sigma_k\left[x(\tau)\right]}d_{\tau}F\left[x_0(\cdot)+\chi(\tau,\cdot)\left(x_i(\cdot)-x_0(\cdot)\right)\right]+$$
$$+\sum_{i=0}^{k}\delta F\left[x_i;\frac{q_{k,i}\left(x(t)\right)}{\sigma_k\left(x(t)\right)}\sigma_k\left(x_i(t)\right)\right], \tag{17}$$

где сумма $\sigma_k(x)=\sum_{i=0}^{k}h_{k,i}(x).$

Для дифференциального оператора (1) интерполяционный многочлен (17) преобразуется к виду

$$B_{k,1}(F;x)=f\left(t,\left\{D^{\alpha}x_0(t)\right\}_{|\alpha|=0}^{m}\right)+\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{[0,1]^m}\frac{h_{k,i}\left[x(\tau)\right]}{\sigma_k\left[x(\tau)\right]}d_{\tau}f\left(t,\left\{D^{\alpha}\xi_i(t,\tau)\right\}_{|\alpha|=0}^{m}\right)+$$
$$+\sum_{i=0}^{k}\sum_{|\alpha|=0}^{m}\frac{\partial f\left(t,\left\{D^{\beta}x_i(t)\right\}_{|\beta|=0}^{m}\right)}{\partial\left(D^{\alpha}x_i(t)\right)}D^{\alpha}\left\{\frac{q_{k,i}\left(x(t)\right)}{\sigma_k\left(x(t)\right)}\sigma_k\left(x_i(t)\right)\right\}, \tag{18}$$

где, как и ранее, функция $\xi_i(t,\tau)=x_0(t)+\chi(\tau,t)\left(x_i(t)-x_0(t)\right),$ а ее производная $D^{\alpha}\xi_i\left(t,\tau\right)=$ $=\dfrac{\partial^{|\alpha|}\xi_i\left(t_1,t_2,...,t_m,\tau\right)}{\partial t_1^{\alpha_1}\partial t_2^{\alpha_2}\cdots\partial t_m^{\alpha_m}}\ \left(i=1,2,...,k\right).$

Для погрешности интерполирования $r_{k,1}(x)=F(x)-B_{k,1}(F;x)$ многочленом (18), как частного случая правила (14), справедливо следующее представление:

$$r_{k,1}(x)=\sum_{i=1}^{k+1}\int\limits_{[0,1]^m}\left\{\frac{h_{k+1,i}\left[x(\tau)\right]}{\sigma_{k+1}\left[x(\tau)\right]}-\frac{h_{k,i}\left[x(\tau)\right]}{\sigma_k\left[x(\tau)\right]}\right\}d_{\tau}f\left(t,\left\{D^{\alpha}\xi_i\left(t,\tau\right)\right\}_{|\alpha|=0}^{m}\right)+$$
$$+\sum_{i=0}^{k+1}\sum_{|\alpha|=0}^{m}\frac{\partial f\left(t,\left\{D^{\beta}x_i(t)\right\}_{|\beta|=0}^{m}\right)}{\partial\left(D^{\alpha}x_i(t)\right)}D^{\alpha}\left\{\frac{q_{k+1,i}\left(x(t)\right)}{\sigma_{k+1}\left(x(t)\right)}\sigma_{k+1}\left(x_i(t)\right)-\frac{q_{k,i}\left(x(t)\right)}{\sigma_k\left(x(t)\right)}\sigma_k\left(x_i(t)\right)\right\},$$

где $x_{k+1}=x,\ h_{k,k+1}(x)=q_{k,k+1}(x)\equiv 0.$

Частные случаи обобщенных формул Эрмита – Биркгофа. Если множество $N_{k,0}=\{(0,0)\}$, то $\sigma_k\left(x(t)\right)=H_{00}^{(k)}\left(x(t)\right)$. В этом случае вторая группа слагаемых в правой части формул (7) и (13) будет отсутствовать и соответствующие интерполяционные многочлены $B_{k,n}(x)$ для оператора (1) примут одинаковый вид:

$$B_{k,n}(x)=f\left(t,\left\{D^{\alpha}x_0(t)\right\}_{|\alpha|=0}^{m}\right)+$$

$$+\sum_{(i,j)\in M_{k,n}}\sum_{\nu=1}^{j}\sum_{|\alpha|=0}^{m}a_{\nu j}\frac{\partial^{\nu}f\left(t,\left\{D^{\beta}x_i(t)\right\}_{|\beta|=0}^{m}\right)}{\partial x_i^{\nu-1}(t)\partial\left(D^{\alpha}x_i(t)\right)}D^{\alpha}\left\{\frac{H_{ij}^{(k)}\left(x(t)\right)H_{00}^{(k)}\left(x_i(t)\right)}{H_{00}^{(k)}\left(x(t)\right)}\right\}, \tag{19}$$

где x_0 – фиксированный узел, соответствующий ненулевому элементу ε_{00} матрицы $I_{k,n}$.

Рассмотрим частный случай формулы (19). В качестве чебышевской системы $\{\varphi_k(u)\}_{k=0}^{2}$ выберем экспоненциальную на $\mathbb{R}$ систему функций $\{e^u,e^{2u},e^{3u}\}$, а в качестве D_j – операторы дифференцирования: $D_j\varphi(u)=\varphi^{(j)}(u)$ и, соответственно, $\tilde{D}_jF(x)=\delta^jF[x;h_1h_2...h_j]$, $j=1,2$. Пусть матрица

$$I_{1,2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

Тогда для многочлена Эрмита – Биркгофа вида (19), удовлетворяющего условиям

$$B_{1,2}(x_0)=F(x_0);\delta B_{1,2}[x_1;h_1]=\delta F[x_1;h_1],\delta^2B_{1,2}[x_1;h_1h_2]=\delta^2F[x_1;h_1h_2],$$

справедливо представление

$$B_{1,2}(x)=f\left(t,\left\{D^{\alpha}x_0(t)\right\}_{|\alpha|=0}^{m}\right)+\sum_{j=1}^{2}\sum_{|\alpha|=0}^{m}\frac{\partial^{j}f\left(t,\left\{D^{\beta}x_1(t)\right\}_{|\beta|=0}^{m}\right)}{\partial x^{j-1}(t)\partial\left(D^{\alpha}x_1(t)\right)}D^{\alpha}\left\{\frac{H_{1j}^{(1)}\left(x(t)\right)H_{00}^{(1)}\left(x_1(t)\right)}{H_{00}^{(1)}\left(x(t)\right)}\right\},$$

где фундаментальные многочлены интерполирования $H_{00}^{(1)}(x)$, $H_{11}^{(1)}(x)$ и $H_{12}^{(1)}(x)$ задаются равенствами

$$H_{00}^{(1)}(x)=Ke^{x-x_0}(e^{2x}+3e^{2x_1}-3e^{x+x_1}),$$

$$H_{11}^{(1)}(x)=\frac{K}{2}e^{x-2x_1}(e^x-e^{x_0})\left(e^{x+x_0}+9e^{2x_1}-4e^{x_1}(e^x+e^{x_0})\right),$$

$$H_{12}^{(1)}(x)=-\frac{K}{2}e^{x-2x_1}(e^x-e^{x_0})\left(e^{x+x_0}+3e^{2x_1}-2e^{x_1}(e^x+e^{x_0})\right),$$

$$K=(e^{2x_0}+3e^{2x_1}-3e^{x_0+x_1})^{-1}.$$

Рассмотрим еще один частный случай формулы (19). В качестве чебышевской системы $\{\varphi_k(u)\}_{k=0}^{2}$ выберем тригонометрическую на $[0,2\pi]$ систему функций $\{1,\sin u,\cos u\}$. Пусть и в этом случае $D_j\varphi(u)=\varphi^{(j)}(u)$, оператор $\tilde{D}_jF(x)=\delta^jF[x;h_1h_2...h_j]$ $(j=2,3)$, а матрица

$$I_{1,3}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

Тогда для интерполяционного многочлена Эрмита – Биркгофа $B_{1,3}(x)$ вида (19), удовлетворяющего условиям

$$B_{1,3}(x_0)=F(x_0);\ \delta^2 B_{1,3}[x_1;h_1h_2]=\delta^2 F[x_1;h_1h_2],\ \delta^3 B_{1,3}[x_1;h_1h_2h_3]=\delta^3 F[x_1;h_1h_2h_3], \tag{20}$$

справедливо представление

$$B_{1,3}(x)=F(x_0)+\sum_{j=2}^{3}\delta^j F\left[x_1;H_{1j}^{(1)}(x)\right]=$$

$$=f\left(t,\left\{D^\alpha x_0(t)\right\}_{|\alpha|=0}^{m}\right)+\sum_{j=2}^{3}\sum_{|\alpha|=0}^{m}\frac{\partial^j f\left(t,\left\{D^\beta x_1(t)\right\}_{|\beta|=0}^{m}\right)}{\partial x^{j-1}(t)\partial\left(D^\alpha x_1(t)\right)}D^\alpha H_{1j}^{(1)}\left(x(t)\right), \tag{21}$$

где $H_{12}^{(1)}(x)=\cos(x_0-x_1)-\cos(x-x_1)$, $H_{13}^{(1)}(x)=\sin(x_0-x_1)-\sin(x-x_1)$.

П р и м е р 1. Рассмотрим дифференциальный оператор порядка m в частных производных

$$F(x)=\varphi(t)+a(t)x(t)+b(t)x^p(t)+\sum_{|\alpha|=1}^{m}c_\alpha(t)D^\alpha x(t), \tag{22}$$

где p – фиксированное целое неотрицательное число, а $\varphi(t), a(t), b(t), c_\alpha(t)$ – произвольно заданные функции переменной $t=(t_1,t_2,...,t_m)$. Для оператора (22) построим интерполяционный многочлен $B_{1,3}(x)$ вида (21).

Сначала вычислим дифференциалы Гато, входящие в формулу (21). Поскольку дифференциал первого порядка $\delta F[x;h_1]=\left\{a(t)+pb(t)x^{p-1}(t)\right\}h_1(t)+\sum_{|\alpha|=1}^{m}c_\alpha(t)D^\alpha h_1(t)$, то дифференциалы Гато второго и третьего порядка задаются формулами $\delta^2 F[x;h_1h_2]=p(p-1)b(t)x^{p-2}(t)h_1(t)h_2(t)$ и $\delta^3 F[x;h_1h_2h_3]=p(p-1)(p-2)b(t)x^{p-3}(t)h_1(t)h_2(t)h_3(t)$. Следовательно,

$$B_{1,3}(x)=F(x_0)+\delta^2 F\left[x_1;H_{12}^{(1)}(x)\right]+\delta^3 F\left[x_1;H_{13}^{(1)}(x)\right]=$$

$$=\varphi(t)+a(t)x_0(t)+b(t)x_0^p(t)+\sum_{|\alpha|=1}^{m}c_\alpha(t)D^\alpha x_0(t)+p(p-1)b(t)x_1^{p-2}(t)H_{12}^{(1)}\left(x(t)\right)+$$

$$+p(p-1)(p-2)b(t)x_1^{p-3}(t)H_{13}^{(1)}\left(x(t)\right). \tag{23}$$

Проверим выполнение интерполяционных условий (20). Так как $H_{12}^{(1)}(x_0)=0$ и $H_{13}^{(1)}(x_0)=0$, то $B_{1,3}(x_0)=F(x_0)$. Далее, с учетом равенств $\left[H_{12}^{(1)}(x_1)\right]''=1$, $\left[H_{13}^{(1)}(x_1)\right]''=0$, $\left[H_{12}^{(1)}(x_1)\right]'''=0$, $\left[H_{13}^{(1)}(x_1)\right]'''=1$, получим, что для оператора (22) и интерполяционной формулы (23) выполняются равенства

$$\delta^2 B_{1,3}[x_1;h_1h_2]=\left\{p(p-1)b(t)x_1^{p-2}(t)\right\}h_1(t)h_2(t)\equiv\delta^2 F[x_1;h_1h_2],$$

$$\delta^3 B_{1,3}[x_1;h_1h_2h_3]=\left\{p(p-1)(p-2)b(t)x_1^{p-3}(t)\right\}h_1(t)h_2(t)h_3(t)\equiv\delta^3 F[x_1;h_1h_2h_3].$$

Таким образом, для оператора $B_{1,3}(x)$ вида (23) справедливы интерполяционные условия (20).

Пусть далее $I_{k,k}$– квадратная диагональная матрица размерности $(k+1)\times(k+1)$ и рассматривается интерполяционная задача Абеля – Гончарова. В этом частном случае интерполяционной задачи Эрмита – Биркгофа множество $N_{k,0}$ состоит из нулевой пары (0,0), множество $M_{k,k}$ – из элементов (q,q) $(q = 1,2,\ldots,k)$, сумма $\sigma_k\left(x(t)\right) = H_{00}^{(k)}\left(x(t)\right)$ и формула (19) принимает вид

$$B_{k,k}(x) = f\left(t, \left\{D^\alpha x_0(t)\right\}_{|\alpha|=0}^{m}\right) +$$

$$+\sum_{q=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{q}\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_{\nu q}\frac{\partial^\nu f\left(t, \left\{D^\beta x_q(t)\right\}_{|\beta|=0}^{m}\right)}{\partial x_q^{\nu-1}(t)\partial\left(D^\alpha x_q(t)\right)} D^\alpha\left\{\frac{H_{qq}^{(k)}\left(x(t)\right)H_{00}^{(k)}\left(x_q(t)\right)}{H_{00}^{(k)}\left(x(t)\right)}\right\}. \quad (24)$$

Здесь функции $H_{qq}^{(k)}(t)$ $(q = 0,1,\ldots,k)$ – фундаментальные интерполяционные многочлены, соответствующие задаче Абеля – Гончарова для случая произвольной чебышевской системы функций, для которых выполняются условия $D_j H_{qq}^{(k)}(t_j) = \delta_{qj}$ $(q, j = 0,1,\ldots,k)$.

Операторный многочлен $B_{k,k}(x)$ вида (24) удовлетворяет интерполяционным условиям

$$B_{k,k}(x_0) = F(x_0);\ \tilde{D}_q B_{k,k}(x_q) = \tilde{D}_q F(x_q),\ q = 1,2,\ldots,k.$$

Для погрешности $r_{k,k}(x) = F(x) - B_{k,k}(x)$, где $B_{k,k}(x)$ – интерполяционный полином вида (24), имеет место представление

$$r_{k,k}(x) = \tilde{D}_{k+1}F\left[x; H_{k+1,\,k+1}^{(k+1)}(x)\right] = \sum_{\nu=1}^{k+1}\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_{\nu j}\frac{\partial^\nu f\left(t, \left\{D^\beta x(t)\right\}_{|\beta|=0}^{m}\right)}{\partial x^{\nu-1}(t)\partial\left(D^\alpha x(t)\right)} D^\alpha H_{k+1,\,k+1}^{(k+1)}\left(x(t)\right).$$

Через $\tilde{D}_{k+1}F[x;h]$, как и ранее, обозначен оператор вида (2), когда направления $h_\nu(t) \equiv 1$ для $\nu = 1,2,\ldots,k$, а $h_{k+1}(t) = h(t)$.

Если $D_j\varphi(t) = \varphi^{(j)}(t)$, а $\tilde{D}_j F(x) = \delta^j F[x; h_1 h_2 \ldots h_j]$, $j = 1,2,\ldots,k$, то интерполяционная формула (24) примет вид

$$B_{k,k}(x) = f\left(t, \left\{D^\alpha x_0(t)\right\}_{|\alpha|=0}^{m}\right) +$$

$$+\sum_{q=1}^{k}\sum_{|\alpha|=0}^{m} \frac{\partial^q f\left(t, \left\{D^\beta x_q(t)\right\}_{|\beta|=0}^{m}\right)}{\partial x_q^{q-1}(t)\partial\left(D^\alpha x_q(t)\right)} D^\alpha\left\{\frac{H_{qq}^{(k)}\left(x(t)\right)H_{00}^{(k)}\left(x_q(t)\right)}{H_{00}^{(k)}\left(x(t)\right)}\right\}. \quad (25)$$

Операторный многочлен $B_{k,k}(x)$, заданный формулой (25), удовлетворяет интерполяционным условиям

$$B_{k,k}(x_0) = F(x_0),\ \delta^q B_{k,k}[x_q; h_1 h_2 \ldots h_q] = \delta^q F[x_q; h_1 h_2 \ldots h_q],\ q = 1,2,\ldots,k. \quad (26)$$

Для погрешности $r_{k,k}(x) = F(x) - B_{k,k}(x)$, где $B_{k,k}(x)$ – интерполяционный полином вида (25), справедливо представление

$$r_{k,k}(x)=\delta^{k+1}F\left[x;H_{k+1,\,k+1}^{(k+1)}(x)\right]=\sum_{|\alpha|=0}^{m}\frac{\partial^{k+1}f\left(t,\left\{D^{\beta}x(t)\right\}_{|\beta|=0}^{m}\right)}{\partial x^{k}(t)\partial\left(D^{\alpha}x(t)\right)}D^{\alpha}H_{k+1,\,k+1}^{(k+1)}\left(x(t)\right).$$

Здесь, как и ранее, $\delta^{k+1}F[x;h]$ означает, что направления $h_{\nu}(t)\equiv 1$ для $\nu=1,2,...,k,$ а $h_{k+1}(t)=h(t).$

Отметим, что явный вид алгебраических фундаментальных многочленов $H_{qq}^{(k)}(t),$ удовлетворяющих условиям $D_jH_{qq}^{(k)}(t_j)=\delta_{qj}$ $(q,j=0,1,...,k),$ приведен в монографии [4], в которой достаточно полно исследована задача Абеля – Гончарова для функций скалярного аргумента.

П р и м е р 2. Построим интерполяционный многочлен $B_{k,k}(x)$ вида (25), как и раньше, для дифференциального оператора порядка m в частных производных, заданного формулой (22). Для этого вычислим дифференциалы Гато порядка $q=2,3,...,k$ рассматриваемого оператора. Так как

$$\delta F\left[x_1;H_{11}^{(k)}\right]=\left\{a(t)+pb(t)x_1^{p-1}(t)\right\}H_{11}^{(k)}\left(x(t)\right)+\sum_{|\alpha|=1}^{m}c_{\alpha}(t)D^{\alpha}H_{11}^{(k)}\left(x(t)\right),$$

$$\delta^2F\left[x_2;H_{22}^{(k)}\right]=p(p-1)b(t)x_2^{p-2}(t)H_{22}^{(k)}\left(x(t)\right),$$

$$\delta^3F\left[x_3;H_{33}^{(k)}\right]=p(p-1)(p-2)b(t)x_3^{p-3}(t)H_{33}^{(k)}\left(x(t)\right),$$

то, очевидно, что

$$\delta^qF\left[x_q;H_{qq}^{(k)}(x)\right]=\frac{p!}{(p-q)!}b(t)x_q^{p-q}(t)H_{qq}^{(k)}\left(x(t)\right)\ \left(q=2,3,...,k\right).$$

Следовательно, формула (25) для оператора (22) примет вид

$$B_{k,k}(x)=F(x_0)+\sum_{q=1}^{k}\delta^qF\left[x_q;H_{qq}^{(k)}(x)\right]=\varphi(t)+a(t)x_0(t)+b(t)x_0^p(t)+\sum_{|\alpha|=1}^{m}c_{\alpha}(t)D^{\alpha}x_0(t)+$$

$$+a(t)H_{11}^{(k)}\left(x(t)\right)+\sum_{|\alpha|=1}^{m}c_{\alpha}(t)D^{\alpha}H_{11}^{(k)}\left(x(t)\right)+\frac{p!}{(p-q)!}b(t)\sum_{q=1}^{k}x_q^{p-q}(t)H_{qq}^{(k)}\left(x(t)\right).\qquad(27)$$

Проверим выполнение интерполяционных условий (26). Так как $H_{qq}^{(k)}(x_0)=0$ при всех $q=1,2,...,k,$ то $B_{1,3}(x_0)=F(x_0).$ Далее, с учетом равенств $\left[H_{qq}^{(k)}(t_j)\right]^{(j)}=\delta_{qj}$ $(q,j=0,1,...,k),$ получим, что

$$\delta B_{k,k}[x_1;h_1]=\left\{a(t)+pb(t)x_1^{p-1}(t)\right\}h_1\left(x(t)\right)+\sum_{|\alpha|=1}^{m}c_{\alpha}(t)D^{\alpha}h_1\left(x(t)\right)\equiv\delta F[x_1;h_1],$$

$$\delta^qB_{k,k}[x_q;h_1h_2...h_q]=\frac{p!}{(p-q)!}b\left(t\right)x_q^{p-q}(t)h_1\left(x(t)\right)h_2\left(x(t)\right)...h_q\left(x(t)\right)\equiv\delta^qF[x_q;h_1h_2...h_q],\ q=2,3,...,k.$$

Итак, для оператора $B_{k,k}(x)$ вида (27) справедливы интерполяционные условия (26).

В заключение отметим, что результаты, полученные в работе, могут быть использованы в качестве основы для построения приближенных методов решения некоторых нелинейных операторно-дифференциальных уравнений с частными производными, встречающихся в том числе в различных областях математической физики. Ряд интерполяционных формул, представляющих решение задачи Лагранжа и Эрмита с узлами второй кратности, а также обобщенной проблемы Эрмита – Биркгофа, для нелинейных обыкновенных дифференциальных операторов приведен в работах [2, 5]. Статьи [6–11] посвящены построению интерполяционных многочленов Эрмита – Биркгофа различной структуры для операторов в функциональных пространствах. Исследование регулярности интерполирования типа Эрмита – Биркгофа, различные постановки этой задачи и некоторые ее применения имеются в монографии [12] и работах [13, 14]. Достаточно полная теория операторного интерполирования изложена в [15, 16].

Список использованных источников

1. Янович, Л. А. Обобщенная интерполяционная задача Эрмита – Биркгофа для операторов / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: сб. науч. тр. 5-й междунар. конф. – Минск, Ин-т математики НАН Беларуси, 2010. – Т. 1. – С. 140–147.
2. Янович, Л. А. К теории интерполирования Эрмита – Биркгофа нелинейных обыкновенных дифференциальных операторов / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 7–23.
3. Игнатенко, М. В. К теории интерполирования дифференциальных операторов произвольного порядка в частных производных / М. В. Игнатенко // Тр. Ин-та математики Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 25, № 2. – С. 11–20.
4. Евграфов, М. А. Интерполяционная задача Абеля – Гончарова / М. А. Евграфов. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 128 с.
5. Янович, Л. А. Об одном классе интерполяционных многочленов для нелинейных обыкновенных дифференциальных операторов / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Мат. моделирование. – 2014. – Т. 26, № 11. – С. 90–96.
6. Янович, Л. А. Обобщенная интерполяционная задача Абеля – Гончарова / Л. А. Янович, В. В. Дорошко // Вестн. фонда фундам. исслед. – 1999. – № 4. – С. 34–44.
7. Янович, Л. А. Формулы операторного интерполирования, основанные на интерполяционных многочленах для числовых функций / Л. А. Янович, В. В. Дорошко // Вычислительная математика и математические проблемы механики: тр. Укр. мат. конгресса. – Киев, 2002. – С. 137–145.
8. Янович, Л. А. Об одном классе формул операторного интерполирования Эрмита – Биркгофа в пространстве дифференцируемых функций / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2005. – № 2. – С.11–16.
9. Янович, Л. А. Интерполяционные операторные многочлены Эрмита – Биркгофа в пространстве гладких функций / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 5. – С. 15–21.
10. Янович, Л. А. Специальный случай интерполяционной задачи Эрмита – Биркгофа для операторов в пространстве гладких функций / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Актуальные проблемы анализа: сб. науч. тр. – Гродно: ГрГУ, 2009. – С. 198–215.
11. Худяков, А. П. Интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа относительно алгебраической и тригонометрической систем функций с одним специальным узлом / А. П. Худяков, А. А. Трофимук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 14–28.
12. Shi, Y. G. Theory of Birkhoff Interpolation / Y. G. Shi. – New York: Nova Science Publishers, 2003. – 253 p.
13. Nazarzadeh, A. Another case of incidence matrix for bivariate Birkhoff interpolation / A. Nazarzadeh, Kh. Rahsepar Fard, A. Mahmoodi // J. Numerical & Applied Mathematics. – 2016. – № 2 (122). – P. 55–70.
14. Zhao, T. G. On Two Birkhoff-Type Interpolations with First- and Second-Order Derivative / T. G. Zhao, Y. J. Li // J. Appl. Math. Phys. – 2016. – Vol. 4, № 7. – P. 1269–1274. https://doi.org/10.4236/jamp.2016.47133
15. Makarov, V. L. Methods of Operator Interpolation / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, L. A. Yanovich. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2010. – 516 с. – (Праці Ін-ту математики НАН України. – Vol. 83: Математика та її застосування).
16. Янович, Л. А. Основы теории интерполирования функций матричных переменных / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко. – Минск: Беларус. навука, 2016. – 281 с.

References

1. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. Generalized interpolation problem of Hermite – Birkhoff for operators. *Analiticheskie metody analiza i differentsial'nykh uravnenii: Sbornik nauchnykh trudov 5-i mezhdunarodnoi konferentsii* [Analytical methods of analysis and differential equations]: Collection of Scientific Papersof the 5-th International Conference]. Minsk, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 2010, vol. 1, pp. 140–147 (in Russian).
2. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. On the theory of Hermite – Birkhoff interpolation of nonlinear ordinary differential operators. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navyk = Proceeding of the National Academy of Sciences of Belarus, Physics and Mathematics Series*, 2017, no. 2, pp. 7–23 (in Russian).
3. Ignatenko M. V. To the interpolation theory of arbitrary order partial differential operators. *Trudy Instituta matematiki Natsional'noy akademii nauk Belarusi = Proceeding of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 25, no. 2, pp. 11–20 (in Russian).

4. Evgrafov M. A. *Abel – Goncharov interpolation problem*. Moscow, State Publishing House of Technical and Theretical Literature, 1954. 127 p. (in Russian).

5. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. On a class of interpolation polynomials for nonlinear ordinary differential operators. *Matematicheskoe Modelirovanie = Mathematical Models and Computer Simulations*, 2014, vol. 26, no. 11, pp. 90–96.

6. Yanovich L. A., Doroshko V. V. Generalized interpolation problem of Abel – Goncharov. *Vestnik fonda fundamental'nykh issledovanii = Vestnik of the Foundation for Fundamental Research*, 1999, vol. 4, pp. 34–44 (in Russian).

7. Yanovich L. A., Doroshko V. V. Formulas of operator interpolation based on interpolation polynomials for scalar functions. *Vychislitel'naya matematika i matematicheskie problemy mekhaniki: Trudy Ukrainskogo matematicheskogo kongressa* [Computational Mathematics and Mathematical Problems in Mechanics: Proceedings of the Ukrainian Mathematical Congress]. Kiev, 2002, pp. 137–145 (in Russian).

8. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. On a class of Hermite-Birkhoff operator interpolation formulas in the space of differentiable functions. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navyk = Proceeding of the National Academy of Sciences of Belarus, Physics and Mathematics Series*, 2005, no. 2, pp. 11–16 (in Russian).

9. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. Interpolation operator polynomials of Hermite – Birkhoff in the space of smooth functions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2009, vol. 53, no. 5, pp. 15–21 (in Russian).

10. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. A special case of the Hermite-Birkhoff interpolation problem for operators in the space of smooth functions. *Aktual'nyye problemy analiza. Sbornik nauchnykh trudov* [Actual problems of analysis. Collection of Sceintific Papers]. Grodno, Grodno State University, 2009, pp. 198–215 (in Russian).

11. Khudyakov A. P., Trofimuk A. A. The Hermite-Birkhoff interpolation formulas for algebraic and trigonometric systems of functions with one special node. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navyk = Proceeding of the National Academy of Sciences of Belarus, Physics and Mathematics Series*, 2017, no. 1, pp. 14–28 (in Russian).

12. Shi Y. G. *Theory of Birkhoff Interpolation*. New York, Nova Science Publishers, 2003. 253 p.

13. Nazarzadeh A., Rahsepar Fard Kh., Mahmoodi A. Another case of incidence matrix for bivariate Birkhoff interpolation. *Zhurnal obchislyuval'noï ta prikladnoï matematiki = Journal of Numerical & Applied Mathematics*, 2016, no. 2 (122), pp. 55–70.

14. Zhao T. G., Li Y. J. On Two Birkhoff-Type Interpolations with First- and Second-Order Derivative. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2016, vol. 4, no. 7, pp. 1269–1274. https://doi.org/10.4236/jamp.2016.47133

15. Makarov V. L., Khlobystov V. V., Yanovich L. A. Methods of Operator Interpolation. *Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. Vol. 83: Mathematics and its applications*. Kiev, 2010. 516 p.

16. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. *Bases of the theory of interpolation of functions of matrix variables*. Minsk, Belarusian science, 2016. 281 p. (in Russian).

Информация об авторах

Игнатенко Марина Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ignatenkomv@bsu.by. https://orcid.org/0000-0002-8029-1842

Янович Леонид Александрович – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: yanovich@im.bas-net.by

Information about the authors

Marina V. Ignatenko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of Web-Technologies and Computer Simulation Department, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ignatenkomv@bsu.by. https://orcid.org/0000-0002-8029-1842

Leonid A. Yanovich – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yanovich@im.bas-net.by