ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 512.643.4
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-164-178

Поступила в редакцию 11.03.2017
Received 11.03.2017

К. Л. Якуто

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова, Витебск, Беларусь

О ЦЕЛОМ ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ $X^n = A$ ДЛЯ МАТРИЦ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ НАТУРАЛЬНЫХ n

Аннотация. Цель данной работы – исследовать возможность использования аналитических методов для нахождения целых положительных решений нелинейных матричных уравнений вида $X^n = A$, где A, X – матрицы третьего порядка, n – натуральное число. Элементы исходной матрицы A являются целыми положительными числами. Решаемое уравнение записывалось в виде системы, состоящей из девяти нелинейных уравнений, которая затем решалась аналитическими методами. Предложенная методика решения поставленной задачи предполагает нахождение внедиагональных элементов в общем случае для каждой возможной комбинации диагональных элементов матрицы X (если необходимо найти матрицу-корень X, диагональные элементы которой не являются нулевыми). Задача решалась в два этапа. Первый предусматривал нахождение произведений пар, симметричных относительно главной диагонали элементов. На втором этапе для каждой пары внедиагональных элементов матрицы X составлялась система уравнений, которая включала в себя два соответствующих уравнения для внедиагональных элементов исходной матрицы и уравнение, представляющее собой произведение вычисляемых элементов матрицы X. Решая полученные таким образом системы для всех трех пар внедиагональных элементов матрицы X, можно найти последние. Если все рассчитанные внедиагональные элементы представляют собой натуральные числа, то исходная матрица A имеет натуральную матрицу-корень X. В ходе проведенного исследования соблюдался принцип от простого к сложному, от частного к общему. В связи с этим в данной статье представлена лишь часть полученных результатов: рассматриваются только решения вида

$$X = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ d & 0 & f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}.$$

Было показано, что для решения задачи по нахождению целых положительных решений матричного уравнения $X^n = A$ для матриц третьего порядка в случае натуральных n можно использовать аналитические методы. Методику, представленную в статье, можно применять и для нахождения натуральных корней матриц третьего порядка и при больших n.

Ключевые слова: нелинейное матричное уравнение, аналитические методы, система нелинейных алгебраических уравнений, натуральные корни уравнения, диагональные элементы матрицы, внедиагональные элементы матрицы

Для цитирования. Якуто, К. Л. О целом положительном решении матричного уравнения $X^n = A$ для матриц третьего порядка в случае натуральных n / К. Л. Якуто // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 164–178. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-164-178

K. L. Yakuto

Vitebsk State University named after P. M. Masherov, Vitebsk, Belarus

POSITIVE INTEGER SOLUTION OF THE MATRIX EQUATION $X^n = A$ FOR THIRD-ORDER MATRICES IN THE CASE OF POSITIVE INTEGERS n

Abstract. The problem of the positive integer solution of the equation $X^n = A$ for different-order matrices is important to solve a large range of problems related to the modeling of economic and social processes. The need to solve similar problems also arises in areas such as management theory, dynamic programming technique for solving some differential equations. In this connection, it is interesting to question the existence of positive and positive integer solutions of the nonlinear equations of the form $X^n = A$ for different-order matrices in the case of the positive integer n. The purpose of this work is to explore the possibility of using analytical methods to obtain positive integer solutions of nonlinear matrix equations of the form $X^n = A$ where A, X are the third-order matrices, n is the positive integer. Elements of the original matrix A are integer and positive numbers. The present study found that when the root of the nth degree of the third-order matrix will have zero diagonal elements and nonzero and positive off-diagonal elements, the root of the nth degree of the third-order matrix will have two zero diagonal elements and nonzero positive off-diagonal elements. It was shown that to solve the problem of finding positive integer solutions of the matrix equation for third-order matrices in the case of the positive integer n, the analytical techniques can be used. The article presents the formulas that allow one to find the roots of positive integer matrices for $n = 3,\dots,5$. However, the methodology described in the article can be adopted to find the natural roots of the third-order matrices for large n.

Keywords: nonlinear matrix equation, analytical methods, nonlinear algebraic equations system, natural roots, matrix diagonal elements, matrix off-diagonal elements

For citation. Yakuto K. L. Positive integer solution of the matrix equation $X^n = A$ for third-order matrices in the case of positive integers n. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 164–178 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-164-178

Введение. Важное значение для решения широкого круга проблем, связанных с моделированием экономических, социальных процессов, имеет задача о нахождении целого положительного решения уравнения $X^n = A$ для матриц различных порядков [1, с. 189]. Необходимость решать подобные задачи также возникает в таких областях, как теория управления, динамическое программирование, методика решения некоторых дифференциальных уравнений. В связи с этим представляет интерес вопрос о наличии положительных и целых положительных решений нелинейного матричного уравнения вида $X^n = A$ для матриц различных порядков в случае целых положительных n.

К настоящему моменту разработано несколько алгоритмов для нахождения решений нелинейных матричных уравнений. Основными итерационными методами являются метод Ньютона [2] и метод Шура [3], но они имеют ряд недостатков, среди которых проблема выбора начального приближения, проблема сходимости и скорости сходимости итерационного процесса к решению. Кроме того, нелинейные матричные уравнения можно решать, используя метод разложения Жордана [4] и метод интерполяционных полиномов [5]. Однако особенностью данных подходов в условиях решаемой задачи является тот факт, что в результате решения мы получаем все возможные значения матрицы X, неоправданно тратя на это время. Предлагаемый нами метод не имеет указанных выше недостатков.

Целью настоящей работы является доказательство эффективности использования аналитических методов для решения задачи по нахождению целых положительных решений нелинейного матричного уравнения $X^n = A$ для матриц третьего порядка в случае целых положительных n.

Материал и методы. Изучались нелинейные матричные уравнения вида $X^n = A$, где A, X – матрицы третьего порядка, n – натуральное число. Элементы исходной матрицы A являются целыми и положительными числами. Методика проводимого исследования была подобна подходу, предложенному в [6, 7]: решаемое уравнение записывалось в виде системы, состоящей из девяти нелинейных уравнений, которая затем решалась аналитическими методами. В процессе проведения исследования использовался пакет символьной математики Maple 15.

Результаты и их обсуждение. Пусть в общем случае

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} K & L & M \\ N & P & Q \\ R & S & T \end{pmatrix}.$$

Пусть необходимо выяснить, когда корень n-й степени матрицы третьего порядка будет иметь нулевые диагональные и отличные от нуля внедиагональные элементы, т. е.

$$\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ d & 0 & f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} K & L & M \\ N & P & Q \\ R & S & T \end{pmatrix}.$$

Л е м м а 1. *Чтобы найти целый положительный корень рассматриваемого вида уравнения* $X^4 = A$ *или показать, что таковой отсутствует, необходимо оценить возможные значения* $\gamma = fh : 1 \le \gamma \le \sqrt{P-5}$, *затем для каждого возможного значения* γ *найти значения переменных*

$$\alpha = bd = \frac{4\gamma^2(P-T)+(-K+P+T)\left(-K+P+T-2\gamma^2\right)}{4\gamma(-K+P+T)},$$

$$\beta = cg = \frac{-4\gamma^2(P-T)+(-K+P+T)\left(-K+P+T-2\gamma^2\right)}{4\gamma(-K+P+T)},$$

$$C = LN + \beta\gamma\left(\alpha^2-(2\alpha+\beta+\gamma)^2\right),\ B = MR + \alpha\gamma\left(\beta^2-(\alpha+2\beta+\gamma)^2\right),\ E = QS + \alpha\beta\left(\gamma^2-(\alpha+\beta+2\gamma)^2\right).$$

После этого, разрешив уравнения $\frac{L\alpha^2\gamma}{x}+N\beta x = C,\ \frac{R\alpha\gamma}{y}+M\beta^2 y = B,\ \frac{S\beta}{z}+Q\alpha\gamma^2 z = E$ *относительно переменных x, y, z соответственно, найти значения переменных b, c, f, используя формулы* $b=\sqrt[4]{\frac{x^3z}{y}},\ c=\sqrt[4]{\frac{x}{y^3z}},\ f=\sqrt[4]{\frac{1}{xyz^3}}$, *и значения переменных d, g, h, используя формулы* $d=\frac{\alpha}{b}$, $g=\frac{\beta}{c},\ h=\frac{\gamma}{f}$. *Если в результате вычислений все внедиагональные элементы матрицы X будут представлять собой целые положительные числа, то уравнение* $X^4 = A$ *имеет целый положительный корень, иначе такой корень отсутствует. Если установлено, что существует несколько целых положительных вариантов матрицы X, то рассматриваемое матричное уравнение имеет столько же целых положительных решений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В рассматриваемом случае система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} b^2d^2+2bcdg+bdfh+cfgh+c^2g^2=K,\\ 2bcdh+b^2fg+c^2gh+cfh^2=L,\\ 2bcfg+c^2dh+b^2df+bf^2h=M,\\ 2bdfg+cd^2h+cfg^2+f^2gh=N,\\ b^2d^2+2bdfh+bcdg+cfgh+f^2h^2=P,\\ 2cdfh+bcd^2+c^2dg+bf^2g=Q,\\ 2cdgh+bd^2h+dfh^2+bfg^2=R,\\ 2bfgh+b^2dg+bcg^2+cdh^2=S,\\ c^2g^2+2cgfh+bcdg+bdfh+f^2h^2=T. \end{cases} \tag{1}$$

Рассмотрим 1-е, 5-е и 9-е уравнения системы (1):

$$\begin{cases} b^2d^2+2bcdg+bdfh+cfgh+c^2g^2=K,\\ b^2d^2+2bdfh+bcdg+cfgh+f^2h^2=P,\\ c^2g^2+2cgfh+bcdg+bdfh+f^2h^2=T. \end{cases} \tag{2}$$

Решая систему (2), можно найти переменные α и β, которые в данном случае будут зависеть от переменной γ:

$$\alpha = \frac{4\gamma^2(P-T)+(-K+P+T)\left(-K+P+T-2\gamma^2\right)}{4\gamma(-K+P+T)},$$

$$\beta = \frac{-4\gamma^2\left(P-T\right)+\left(-K+P+T\right)\left(-K+P+T-2\gamma^2\right)}{4\gamma\left(-K+P+T\right)}.$$

Оценка для γ имеет вид $1 \le \gamma \le \sqrt{P-5}$.

Таким образом, произведения всех пар, симметричных относительно главной диагонали элементов, считаем известными. Перепишем 2-е и 4-е уравнения системы (1) в следующем виде:

$$\begin{cases} ch\left(2bd+cg+fh\right)=L-b^2fg, \\ fg\left(2bd+cg+fh\right)=N-cd^2h. \end{cases} \tag{3}$$

Перемножив уравнения системы (3), получим

$$Lcd^2h+Nb^2gh=C, \tag{4}$$

где $C = LN+\beta\gamma\left(\alpha^2-(2\alpha+\beta+\gamma)^2\right)$.

Перепишем 3-е и 7-е уравнения системы (1) в следующем виде:

$$\begin{cases} bf\left(bd+2cg+fh\right)=M-c^2dh, \\ dh\left(bd+2cg+fh\right)=R-bfg^2. \end{cases} \tag{5}$$

Перемножив уравнения системы (5), получим

$$Rc^2dh+Mbfg^2=B, \tag{6}$$

где $B = MR+\alpha\gamma\left(\beta^2-(\alpha+2\beta+\gamma)^2\right)$.

Перепишем 6-е и 8-е уравнения системы (1) в следующем виде:

$$\begin{cases} cd\left(bd+cg+2fh\right)=Q-bf^2g, \\ bg\left(bd+cg+2fh\right)=S-cdh^2. \end{cases} \tag{7}$$

Перемножив уравнения системы (7), получим

$$Qcdh^2+Sbf^2g=E, \tag{8}$$

где $E = QS+\alpha\beta\left(\gamma^2-(\alpha+\beta+2\gamma)^2\right)$.

Поскольку α, β, γ считаем известными, то *C, B, E* также можем считать известными.

Таким образом, имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} Lcd^2h+Nb^2gh=C, \\ Rc^2dh+Mbfg^2=B, \\ Qcdh^2+Sbf^2g=E, \\ bd=\alpha, \\ cg=\beta, \\ fh=\gamma. \end{cases} \tag{9}$$

Выразив переменные *d, g, h* из трех последних уравнений системы (9) и подставив полученные значения в первые три уравнения, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{L\alpha^2\gamma}{x} + N\beta x = C, \\ \dfrac{R\alpha\gamma}{y} + M\beta^2 y = B, \\ \dfrac{S\beta}{z} + Q\alpha\gamma^2 z = E, \end{cases} \tag{10}$$

где $x = \dfrac{b^2 f}{c}$, $y = \dfrac{bf}{c^2}$, $z = \dfrac{c}{bf^2}$.

Зная x, y, z, можно найти переменные b, c, f:

$$b = \sqrt[4]{\frac{x^3 z}{y}}, \quad c = \sqrt[4]{\frac{x}{y^3 z}}, \quad f = \sqrt[4]{\frac{1}{xyz^3}}.$$

Т е о р е м а 1. *Необходимым условием существования корня четвертой степени с нулевыми диагональными и целыми положительными внедиагональными элементами у матрицы A является существование хотя бы одного общего делителя у диагональных элементов матрицы A.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем систему уравнений (2) в следующем виде:

$$\begin{cases} (\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma) = K, \\ (\alpha+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma) = P, \\ (\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma) = T. \end{cases} \tag{2$'$}$$

Из системы (2′) следует, что диагональные элементы матрицы A имеют общий делитель. Поскольку необходимым условием существования корня четвертой степени с нулевыми диагональными и целыми положительными внедиагональными элементами у матрицы A является целочисленность и положительность всех элементов тройки (α, β, γ), то общий делитель является натуральным числом.

А л г о р и т м 1. Нахождение корня (корней) четвертой степени с нулевыми диагональными и целыми положительными внедиагональными элементами у матрицы A, если такой корень (или корни) существует (существуют).

Шаг 1. Выяснить, имеют ли диагональные элементы матрицы A хотя бы один общий делитель. Если такой делитель отсутствует, то матрица A не имеет ни одного корня четвертой степени рассматриваемого вида. Если такой делитель (делители) существует (существуют), то перейти к шагу 2.

Шаг 2. Используя приведенную в лемме 1 оценку, определить возможные значения переменной γ.

Шаг 3. Найти для каждого возможного значения γ значения переменных α и β. Если у всех троек (α, β, γ) хотя бы одна из переменных не является натуральным числом, то матрица A не имеет ни одного корня четвертой степени рассматриваемого вида. Если все переменные хотя бы одной из троек являются натуральными числами, то необходимо перейти к шагу 4.

Шаг 4. Для всех троек, все переменные которых являются натуральными числами, необходимо найти переменные C, B, E по формулам, представленным в лемме 1.

Шаг 5. Разрешив систему (10), найти переменные $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$.

Шаг 6. По формулам связи троек (x, y, z) и (b, c, f) найти переменные b, c, f. Зная соответствующие тройке (x, y, z) произведения, найти переменные d, g, h. Если все переменные, являющиеся элементами матрицы X, представляют собой целые положительные числа, то система уравнений (1) разрешима в целых положительных числах, иначе можно сделать вывод, что матрица A не имеет ни одного корня четвертой степени рассматриваемого вида.

П р и м е р. Пусть матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 88 & 35 & 59 \\ 125 & 55 & 83 \\ 61 & 46 & 99 \end{pmatrix}.$$

Оценка для γ имеет вид $1 \le \gamma \le 7$. Используя формулы связи переменных α и γ, а также β и γ, получим, что лишь в случае, когда $\gamma = 3$, имеет место тройка $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 6, 3)$. При всех других значениях переменной γ переменные α и β не представляют собой натуральные числа. Следовательно, в дальнейшем проводить расчеты необходимо только с данными значениями переменных α, β, γ. Далее для решения системы уравнений (10) необходимо вычислить C, B, E. В рассматриваемом примере для тройки $(\alpha,\beta,\gamma) = (2,6,3)$, $C = 1405$, $B = 2081$, $E = 1574$. Решая 1-е уравнение системы (10), получим $x_1 = 1{,}5$; $x_2 = 0{,}37(3)$. Решая 2-е уравнение системы (10), получим $y_1 = 0{,}75$, $y_2 = 0{,}23$. Решая 3-е уравнение системы (10), получим $z_1 = 0{,}83$, $z_2 = 0{,}(2)$. Вычислив значения переменных b, c, f, для тройки (x_1, y_1, z_2), получим $b = 1$, $c = 2$, $f = 3$. Исходя из того, что произведения всех трех пар диагональных элементов матрицы X, симметричных относительно главной диагонали, известны, можно найти значения переменных d, g, h: $b = 2$, $g = 3$, $h = 1$. Таким образом, искомая матрица X имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Л е м м а 2. *Чтобы найти целый положительный корень рассматриваемого вида уравнения* $X^5 = A$ *или показать, что таковой отсутствует, необходимо оценить возможные значения* $\gamma = fh : 1 \le \gamma \le \sqrt{M - 10}$, *затем для каждого возможного значения* γ *найти значения переменных*

$$\alpha = bd = \frac{\gamma\left(2KP - 3PT + 2P^2\right)}{-3KP + 2PT + 2P^2}, \quad \beta = cg = \frac{\gamma\left(2KP + 2PT - 3P^2\right)}{-3KP + 2PT + 2P^2},$$

$$C = LN + \alpha\left(\beta^2\gamma^2 - (\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 3\beta\gamma + \beta^2 + \gamma^2)^2\right),$$

$$B = MR + \beta\left(\alpha^2\gamma^2 - (\beta^2 + 2\beta\gamma + 2\alpha\beta + 3\alpha\gamma + \alpha^2 + \gamma^2)^2\right),$$

$$E = QS + \gamma\left(\alpha^2\beta^2 - (\gamma^2 + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma + 3\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2)^2\right).$$

После этого, разрешив уравнения

$$\frac{M\alpha^2\gamma^2}{y} + R\beta y = B, \quad \frac{L\beta^2}{x} + N\alpha\gamma^2 x = C, \quad \frac{S\alpha^2\gamma}{z} + Q\beta^2 z = E$$

относительно переменных x, y, z *соответственно, найти значения переменных* b, c, f, *используя формулы*

$$b = \sqrt[5]{x^3y^2z^2}, \quad c = \sqrt[5]{\frac{x^2y^3}{z^2}}, \quad f = \sqrt[5]{\frac{y^2}{x^2z^3}},$$

и значения переменных d, g, h, *используя формулы*

$$d=\frac{\alpha}{b},\ g=\frac{\beta}{c},\ h=\frac{\gamma}{f}.$$

Если в результате вычислений все внедиагональные элементы матрицы X будут представлять собой целые положительные числа, то уравнение $X^5 = A$ имеет целый положительный корень, иначе такой корень отсутствует. Если установлено, что существует несколько целых положительных вариантов матрицы X, то рассматриваемое матричное уравнение имеет столько же целых положительных решений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В рассматриваемом случае система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} 2b^2dfg+2c^2dgh+2bcd^2h+2bcfg^2+cdfh^2+bf^2gh=K, \\ b^3d^2+2b^2cdg+2b^2dfh+3bcfgh+bc^2g^2+bf^2h^2+c^2dh^2=L, \\ c^3g^2+2c^2fgh+2bc^2dg+3bcdfh+b^2cd^2+b^2f^2g+cf^2h^2=M, \\ b^2d^3+2bcd^2g+2bd^2fh+3cdfgh+df^2h^2+c^2dg^2+bf^2g^2=N, \\ 2bcd^2h+2b^2dfg+2cdfh^2+2bf^2gh+bcfg^2+c^2dgh=P, \\ f^3h^2+2cf^2gh+2bdf^2h+3bcdfg+c^2d^2h+c^2fg^2+b^2d^2f=Q, \\ c^2g^3+2bcdg^2+2cfg^2h+3bdfgh+b^2d^2g+cd^2h^2+f^2gh^2=R, \\ f^2h^3+2bdfh^2+2cfgh^2+3bcdgh+b^2d^2h+c^2g^2h+b^2fg^2=S, \\ 2cdfh^2+2bcfg^2+2c^2dgh+2bf^2gh+bcd^2h+b^2dfg=T. \end{cases} \tag{11}$$

Рассмотрим 1-е, 5-е и 9-е уравнения системы (11):

$$\begin{cases} 2b^2dfg+2c^2dgh+2bcd^2h+2bcfg^2+cdfh^2+bf^2gh=K, \\ 2bcd^2h+2b^2dfg+2cdfh^2+2bf^2gh+bcfg^2+c^2dgh=P, \\ 2cdfh^2+2bcfg^2+2c^2dgh+2bf^2gh+bcd^2h+b^2dfg=T. \end{cases} \tag{12}$$

Решая систему (12), можно найти переменные α и β, которые в данном случае будут зависеть от переменной γ:

$$\alpha=\frac{\gamma\left(2KP-3PT+2P^2\right)}{-3KP+2PT+2P^2},\ \ \beta=\frac{\gamma\left(2KP+2PT-3P^2\right)}{-3KP+2PT+2P^2}.$$

Оценка для γ имеет вид $1\le\gamma\le\sqrt{M-10}$.

Таким образом, произведения всех пар, симметричных относительно главной диагонали элементов, считаем известными.

Действуя аналогично предложенному выше в лемме 1, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{L\beta^2}{x}+N\alpha\gamma^2x=C, \\ \dfrac{M\alpha^2\gamma^2}{y}+R\beta y=B, \\ \dfrac{S\alpha^2\gamma}{z}+Q\beta^2z=E, \end{cases} \tag{13}$$

где $x=\dfrac{c^2}{bf^2},\ y=\dfrac{b^2f^2}{c},\ z=\dfrac{b^2f}{c^2}.$

Зная x, y, z, можно найти переменные b, c, f:

$$b = \sqrt[5]{x^3 y^2 z^2}, \;\; c = \sqrt[5]{\frac{x^2 y^3}{z^2}}, \; f = \sqrt[5]{\frac{y^2}{x^2 z^3}}.$$

Т е о р е м а 2. *Необходимым условием существования корня пятой степени с нулевыми диагональными и целыми положительными внедиагональными элементами у матрицы A является существование хотя бы одного общего делителя у диагональных элементов матрицы A.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем систему уравнений (12) в следующем виде:

$$\begin{cases} (\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma) = K, \\ (\alpha+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma) = P, \\ (\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma) = T. \end{cases} \tag{12′}$$

Из системы (12′) следует, что диагональные элементы матрицы A имеют общий делитель. Поскольку необходимым условием существования корня пятой степени с нулевыми диагональными и целыми положительными внедиагональными элементами у матрицы A является целочисленность и положительность всех элементов тройки (α, β, γ), то общий делитель является натуральным числом.

Алгоритм нахождения корня (корней) пятой степени с нулевыми диагональными и целыми положительными внедиагональными элементами у матрицы A аналогичен алгоритму нахождения корня (корней) четвертой степени с нулевыми диагональными и целыми положительными внедиагональными элементами.

Необходимо выяснить, когда корень n-й степени матрицы третьего порядка будет иметь два нулевых диагональных и отличные от нуля внедиагональные элементы, т. е.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} K & L & M \\ N & P & Q \\ R & S & T \end{pmatrix}.$$

Л е м м а 3. *Чтобы найти целый положительный корень рассматриваемого вида уравнения $X^3 = A$ или показать, что таковой отсутствует, необходимо оценить возможные значения переменной a: $1 \le a \le \sqrt[3]{K-6}$ и $\gamma = fh : 1 \le \gamma \le L-4$, затем для каждого возможного значения пары переменных (a, γ) найти значения переменных*

$$\alpha = bd = \frac{k+P-2T}{3a}, \;\; \beta = cg = \frac{k-2P+T}{3a},$$

$$I = a^2 + bd + cg + fh, \; H = bd + cg + fh, \; U = \frac{LN + I^2 bd - a^2 cgfh}{I},$$

$$V = \frac{MR + I^2 cg - a^2 bdfh}{I}, \;\; W = \frac{QS + H^2 fh - a^2 bdcg}{H},$$

где $k = K - a^3$. После этого найти значения переменных b, c, f, используя формулы

$$b = \frac{U \pm \sqrt{U^2 - 4LN\alpha}}{2N}, \;\; c = \frac{V \pm \sqrt{V^2 - 4MR\beta}}{2R}, \;\; f = \frac{W \pm \sqrt{W^2 - 4QS\gamma}}{2S},$$

и значения переменных d, g, h, используя формулы

$$d = \frac{\alpha}{b}, \;\; g = \frac{\beta}{c}, \;\; h = \frac{\gamma}{f}.$$

Если в результате вычислений все внедиагональные элементы матрицы X будут представлять собой целые положительные числа, то уравнение $X^3 = A$ имеет целый положительный корень, иначе такой корень отсутствует. Если установлено, что существует несколько целых положительных вариантов матрицы X, то рассматриваемое матричное уравнение имеет столько же целых положительных решений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В рассматриваемом случае система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} a^3 + 2a\left(bd + cg\right) + cdh + bfg = K, b\left(a^2 + bd + cg + fh\right) + ach = L, c\left(a^2 + bd + cg + gh\right) + abf = M, \\ a^2 d + afg + bd^2 + cdg + dfh = N, abd + cdh + bfg = P, acd + cfg + bdf + f^2 h = Q, \\ a^2 g + adh + bdg + cg^2 + fgh = R, abg + cgh + bdh + fh^2 = S, acg + cdh + bfg = T. \end{cases} \tag{14}$$

Рассмотрим 1-е, 5-е и 9-е уравнения системы (14):

$$\begin{cases} 2abd + 2acg + cdh + bfg = k, \\ abd + cdh + bfg = P, \\ acg + cdh + bfg = T, \end{cases} \tag{15}$$

где $k = K - a^3$.

Решая систему (15), получим $bd = \dfrac{k + P - 2T}{3a}$, $cg = \dfrac{k - 2P + T}{3a}$.

Таким образом, известны все пары произведений, симметричных относительно главной диагонали элементов матрицы X.

Перемножив соответствующие уравнения системы (14) и подставив вместо переменных d, g, h соответственно $\dfrac{\alpha}{b}, \dfrac{\beta}{c}, \dfrac{\gamma}{f}$, как сделано выше для системы (1), получим

$$\begin{cases} b = \dfrac{U \pm \sqrt{U^2 - 4LN\alpha}}{2N}, \\ c = \dfrac{V \pm \sqrt{V^2 - 4MR\beta}}{2R}, \\ f = \dfrac{W \pm \sqrt{W^2 - 4QS\gamma}}{2S}, \end{cases} \tag{16}$$

найдем значения переменных d, g, h, используя формулы $d = \dfrac{\alpha}{b}$, $g = \dfrac{\beta}{c}$, $h = \dfrac{\gamma}{f}$.

А л г о р и т м 2. Нахождение корня (корней) третьей степени с нулевыми диагональными и целыми положительными внедиагональными элементами у матрицы A, если такой корень (или корни) существует (существуют).

Шаг 1. Используя приведенную в лемме 3 оценку, определить возможные значения переменной a.

Шаг 2. Используя приведенную в лемме 3 оценку, определить возможные значения переменной γ.

Шаг 3. (Для каждого из возможных значений переменной a.) Найти для каждого возможного значения γ значения переменных α и β. Если у всех троек (α, β, γ) хотя бы одна из переменных не является натуральным числом, то матрица A не имеет ни одного корня третьей степени рассматриваемого вида. Если все переменные хотя бы одной из троек являются натуральными числами, то необходимо перейти к шагу 4.

Шаг 4. Для всех троек, все переменные которых являются натуральными числами, необходимо найти переменные *U, V, W* по формулам, представленным в лемме 3.

Шаг 5. Разрешив уравнения системы (16), найти соответственно переменные b_1, b_2, c_1, c_2, f_1, f_2.

Шаг 6. Зная произведения α, β, γ, найти переменные *d*, *g*, *h*. Если все переменные, являющиеся элементами матрицы *X*, представляют собой целые положительные числа, то система уравнений (14) разрешима в целых положительных числах, иначе можно сделать вывод, что матрица *A* не имеет ни одного корня третьей степени рассматриваемого вида.

Л е м м а 4. *Чтобы найти целый положительный корень рассматриваемого вида уравнения* $X^4 = A$ *или показать, что таковой отсутствует, необходимо оценить возможные значения переменной a:* $1 \le a \le \sqrt[4]{K-16}$ *и* $\gamma = fh : 1 \le \gamma \le \sqrt{P-8}$, *затем для каждого возможного значения пары переменных (a, γ) найти значения переменных*

$$\alpha = \frac{a^2\left(I+P-T\right)+\gamma\left(I-P+T\right)}{2\left(a^4-\gamma^2\right)},\ \beta = \frac{a^2\left(I-P+T\right)+\gamma\left(I+P-T\right)}{2\left(a^4-\gamma^2\right)},\ \ I = \frac{k-P-T+2\gamma^2}{2},$$

$$\delta = bfg + cdh = \frac{T - a^2cg - bcdg - bdfh - c^2g^2 - 2cgfh - f^2h^2}{a},$$

$$U = \frac{LN + bdX_1^2 - cgfhY_1^2 - b^2d^2cgfh - Y_1\left(\delta^2 - 2bdcgfh\right)}{X_1},\ X_1 = a^3 + 2abd + 2acg + afh,$$

$$Y_1 = a^2 + 2bd + cg + fh,$$

$$V = \frac{MR + cgX_2^2 - bdfhY_2^2 - bdc^2g^2fh - Y_2\left(\delta^2 - 2bdcgfh\right)}{X_2},\ X_2 = a^3 + 2abd + 2acg + afh,$$

$$Y_2 = a^2 + bd + 2cg + fh,$$

$$W = \frac{QS + fhX_3^2 - bdcgY_3^2 - bdcgf^2h^2 - Y_3\left(\delta^2 - 2bdcgfh\right)}{X_3},\ X\ \ = abd + acg\ \ Y_3 = a^2 + bd + cg + 2fh,$$

где $k = K - a^4$. *После этого найти значения переменных b, c, f, используя формулы*

$$b = \frac{U \pm \sqrt{U^2 - 4LN\alpha}}{2N},\ \ c = \frac{V \pm \sqrt{V^2 - 4MR\beta}}{2R},\ \ f = \frac{W \pm \sqrt{W^2 - 4QS\gamma}}{2S},$$

и значения переменных d, g, h, используя формулы

$$d = \frac{\alpha}{b},\ \ g = \frac{\beta}{c},\ \ h = \frac{\gamma}{f}.$$

Если в результате вычислений все внедиагональные элементы матрицы X будут представлять собой целые положительные числа, то уравнение $X^4 = A$ *имеет целый положительный корень, иначе такой корень отсутствует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В рассматриваемом случае система уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} a^4+3a^2bd+3a^2cg+2abfg+2acdh+b^2d^2+2bcdg+bdfh+cfgh+c^2g^2=K, \\ a^3b+a^2ch+2ab^2d+2abcg+abfh+2bcdh+b^2fg+c^2gh+cfh^2=L, \\ a^3c+a^2bf+2abcd+2ac^2g+acfh+2bcfg+c^2dh+b^2df+bf^2h=M, \\ a^3d+a^2fg+2abd^2+2acdg+adfh+2bdfg+cd^2h+cfg^2+f^2gh=N, \\ a^2bd+abfg+acdh+b^2d^2+2bdfh+bcdg+cfgh+f^2h^2=P, \\ a^2cd+abdf+acfg+2cdfh+bcd^2+c^2dg+bf^2g=Q, \\ a^3g+a^2dh+2abdg+2acg^2+afgh+2cdgh+bd^2h+dfh^2+bfg^2=R, \\ a^2bg+abdh+acgh+2bfgh+b^2dg+bcg^2+cdh^2=S, \\ a^2cg+abfg+acdh+c^2g^2+2cgfh+bcdg+bdfh+f^2h^2=T. \end{cases} \quad (17)$$

Рассмотрим 1-е, 5-е и 9-е уравнения системы (17):

$$\begin{cases} 3a^2bd+3a^2cg+2abfg+2acdh+b^2d^2+2bcdg+bdfh+cfgh+c^2g^2=k, \\ a^2bd+abfg+acdh+b^2d^2+2bdfh+bcdg+cfgh+f^2h^2=P, \\ a^2cg+abfg+acdh+c^2g^2+2cgfh+bcdg+bdfh+f^2h^2=T, \end{cases} \quad (18)$$

где $k=K-a^4$.

Составим новую систему уравнений, первое из уравнений которой будет представлять собой разность 1-го уравнения системы (18) и суммы 2-го и 3-го уравнений той же системы; второе – разность 2-го и 3-го уравнений той же системы:

$$\begin{cases} k-P-T=2a^2bd+2a^2cg-2bdfh-2cgfh-2f^2h^2, \\ P-T=a^2bd-a^2cg+b^2d^2-c^2g^2+bdfh-cgfh. \end{cases} \quad (19)$$

Решая данную систему, находим, что

$$\alpha=\frac{a^2(I+P-T)+\gamma(I-P+T)}{2\left(a^4-\gamma^2\right)},\ \beta=\frac{a^2(I-P+T)+\gamma(I+P-T)}{2\left(a^4-\gamma^2\right)},\ I=\frac{k-P-T+2\gamma^2}{2}.$$

Таким образом, известны все пары произведений симметричных относительно главной диагонали элементов матрицы X.

Перемножив соответствующие уравнения системы (17) и подставив вместо переменных d, g, h соответственно $\frac{\alpha}{b}, \frac{\beta}{c}, \frac{\gamma}{f}$, как сделано выше для системы (1), получим

$$\begin{cases} b=\dfrac{U\pm\sqrt{U^2-4LN\alpha}}{2N}, \\ c=\dfrac{V\pm\sqrt{V^2-4MR\beta}}{2R}, \\ f=\dfrac{W\pm\sqrt{W^2-4QS\gamma}}{2S}, \end{cases} \quad (20)$$

найдем значения переменных d, g, h, используя формулы $d=\frac{\alpha}{b},\ g=\frac{\beta}{c},\ h=\frac{\gamma}{f}$.

При перемножении уравнений возникает необходимость нахождения суммы квадратов $(bfg)^2+(cdh)^2$. Из 9-го уравнения системы (17), можно найти сумму bfg *и* cdh: $\delta = bfg+cdh = \dfrac{T-a^2cg-bcdg-bdfh-c^2g^2-2cgfh-f^2h^2}{a}$. Учитывая, что $(bfg)(cdh)=\alpha\beta\gamma$, можно найти сумму квадратов $(bfg)^2+(cdh)^2$.

А л г о р и т м 3. Нахождение корня (корней) четвертой степени с нулевыми диагональными и целыми положительными внедиагональными элементами у матрицы A, если такой корень (или корни) существует (существуют).

Шаг 1. Используя приведенную в лемме 4 оценку, определить возможные значения переменной a.

Шаг 2. Используя приведенную в лемме 4 оценку, определить возможные значения переменной γ.

Шаг 3. (Для каждого из возможных значений переменной a.) Найти для каждого возможного значения γ значения переменных α и β. Если у всех троек (α, β, γ) хотя бы одна из переменных не является натуральным числом, то матрица A не имеет ни одного корня четвертой степени рассматриваемого вида. Если все переменные хотя бы одной из троек являются натуральными числами, то необходимо перейти к шагу 4.

Шаг 4. Для всех троек, все переменные которых являются натуральными числами, необходимо найти переменные $U, V, W, X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3, \delta$ по формулам, представленным в лемме 5.

Шаг 5. Разрешив уравнения системы (20), найти соответственно переменные $b_1, b_2, c_1, c_2, f_1, f_2$.

Шаг 6. Зная произведения α, β, γ, найти переменные d, g, h. Если все переменные, являющиеся элементами матрицы X, представляют собой целые положительные числа, то система уравнений (17) разрешима в целых положительных числах, иначе можно сделать вывод, что матрица A не имеет ни одного корня четвертой степени рассматриваемого вида.

Л е м м а 5. *Чтобы найти целый положительный корень рассматриваемого вида уравнения $X^5 = A$ или показать, что таковой отсутствует, необходимо оценить возможные значения переменной a: $1 \le a \le \sqrt[5]{K-40}$, $\alpha = bd$: $1 \le \alpha \le \sqrt{\dfrac{P-18}{2}}$ и $\beta = cg$: $1 \le \beta \le \sqrt{\dfrac{T-18}{2}}$, затем для каждого возможного значения тройки переменных (a, α, β) решить уравнение второго порядка $\varphi\gamma^2+\rho\gamma+\mu=0$, где $\varphi = 2a(\alpha-\beta)$, $\rho = 3a^3(\alpha-\beta)+4a(\alpha^2-\beta^2)+2(T-P)$, $\mu = a^5(\alpha-\beta)+3a^3(\alpha^2-\beta^2)+2a(\alpha^3+2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2-2\beta^3)+a^2(P-T)+\alpha(2T-P)+\beta(T-2P)$ и найти значения переменных*

$$\psi = bfg+cdh = \frac{T-a^3\beta-2a\alpha\beta-a\alpha\gamma-2a\beta^2-2a\beta\gamma}{a^2+\alpha+2\beta+2\gamma},$$

$$U = \frac{LN+\alpha X_1^2-\beta\gamma Y_1^2-\alpha\beta^2\gamma^2-4a^2\alpha^2\beta\gamma-Y_1\beta\gamma\psi-2aY_1\left(\psi^2-2\alpha\beta\gamma\right)-2a\psi\left(\psi^2-3\alpha\beta\gamma\right)}{X_1},$$

$$X_1 = a^4+3a^2\alpha+3a^2\beta+a^2\gamma+\alpha^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+\beta^2+3\beta\gamma+\gamma^2,\ Y_1 = a^3+4a\alpha+2a\beta+a\gamma,$$

$$V = \frac{MR+\beta X_2^2-\alpha\gamma Y_2^2-\alpha^2\beta\gamma^2-4a^2\alpha\beta^2\gamma-Y_2\alpha\gamma\psi-2aY_2\left(\psi^2-2\alpha\beta\gamma\right)-2a\psi\left(\psi^2-3\alpha\beta\gamma\right)}{X_2},$$

$$X_2 = a^4+3a^2\alpha+3a^2\beta+a^2\gamma+\alpha^2+2\alpha\beta+3\alpha\gamma+\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2,\ Y_2 = a^3+2a\alpha+4a\beta+a\gamma,$$

$$W = \frac{QS+\gamma X_3^2-\alpha\beta Y_3^2-\alpha^2\beta^2\gamma-a^2\alpha\beta\gamma^2-Y_3\alpha\beta\psi-aY_3\left(\psi^2-2\alpha\beta\gamma\right)-a\psi\left(\psi^2-3\alpha\beta\gamma\right)}{X_3},$$

$$X_3 = a^2\alpha+a^2\beta+\alpha^2+3\alpha\beta+2\alpha\gamma+\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2,\ Y_3 = a^3+2a\alpha+2a\beta+2a\gamma.$$

После этого найти значения переменных b, c, f, используя формулы

$$b=\frac{U\pm\sqrt{U^2-4LN\alpha}}{2N},\ \ c=\frac{V\pm\sqrt{V^2-4MR\beta}}{2R},\ \ f=\frac{W\pm\sqrt{W^2-4QS\gamma}}{2S},$$

и значения переменных d, g, h, используя формулы

$$d=\frac{\alpha}{b},\ \ g=\frac{\beta}{c},\ \ h=\frac{\gamma}{f}.$$

Если в результате вычислений все внедиагональные элементы матрицы X будут представлять собой целые положительные числа, то уравнение $X^5 = A$ имеет целый положительный корень, иначе такой корень отсутствует. Если установлено, что существует несколько целых положительных вариантов матрицы X, то рассматриваемое матричное уравнение имеет столько же целых положительных решений.

Доказательство. В рассматриваемом случае система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} a^5+4a^3(\alpha+\beta)+3a\left(\alpha^2+\beta^2\right)+2a(3\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)+(bfg+cdh)\left(3a^2+2\alpha+2\beta+\gamma\right)=K,\\ bX_1+chY_1+c^2dh^2+2ab^2fg=L,\\ cX_2+bfY_2+2ac^2dh+b^2f^2g=M,\\ dX_1+fgY_1+bf^2g^2+2acd^2h=N,\\ a^3\alpha+2a\alpha^2+a(2\alpha\beta+2\alpha\gamma+\beta\gamma)+(bfg+cdh)\left(a^2+2\alpha+\beta+2\gamma\right)=P,\\ fX_3+cdY_3+abf^2g+c^2d^2h=Q,\\ gX_2+dhY_2+2abfg^2+cd^2h^2=R,\\ hX_3+bgY_3+acgh^2+b^2fg^2=S,\\ a^3\beta+2a\beta^2+a(2\alpha\beta+\alpha\gamma+2\beta\gamma)+(bfg+cdh)\left(a^2+\alpha+2\beta+2\gamma\right)=T. \end{cases} \tag{21}$$

Рассмотрим 5-е и 9-е уравнения системы (21):

$$\begin{cases} P=a^3\alpha+2a\alpha^2+a(2\alpha\beta+2\alpha\gamma+\beta\gamma)+(bfg+cdh)\left(a^2+2\alpha+\beta+2\gamma\right),\\ T=a^3\beta+2a\beta^2+a(2\alpha\beta+\alpha\gamma+2\beta\gamma)+(bfg+cdh)\left(a^2+\alpha+2\beta+2\gamma\right). \end{cases} \tag{22}$$

Выразив $(bfg+cdh)$ из 2-го уравнения системы (22) и подставив полученный результат в 1-е уравнение той же системы, получим уравнение относительно переменной γ, в котором α и β играют роль параметров:

$$\varphi\gamma^2+\rho\gamma+\mu=0, \tag{23}$$

где $\mu=a^5(\alpha-\beta)+3a^3\left(\alpha^2-\beta^2\right)+2a\left(\alpha^3+2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2-2\beta^3\right)+a^2(P-T)+\alpha(2T-P)+\beta(T-2P)$,

$\rho=3a^3(\alpha-\beta)+4a\left(\alpha^2-\beta^2\right)+2(T-P)$, $\varphi=2a(\alpha-\beta)$. Корни уравнения (23) имеют вид

$$\gamma=\frac{-\rho\pm\sqrt{\rho^2-4\varphi\mu}}{2\varphi}. \tag{24}$$

Таким образом, будем считать, что известны все пары произведений, симметричных относительно главной диагонали элементов матрицы X.

Перемножив соответствующие уравнения системы (21) и подставив вместо переменных d, g, h соответственно $\frac{\alpha}{b}, \frac{\beta}{c}, \frac{\gamma}{f}$, как сделано выше для системы (1), получим

$$\begin{cases} b = \dfrac{U \pm \sqrt{U^2 - 4LN\alpha}}{2N}, \\ c = \dfrac{V \pm \sqrt{V^2 - 4MR\beta}}{2R}, \\ f = \dfrac{W \pm \sqrt{W^2 - 4QS\gamma}}{2S}, \end{cases} \tag{25}$$

найдем значения переменных d, g, h, используя формулы $d = \frac{\alpha}{b}$, $g = \frac{\beta}{c}$, $h = \frac{\gamma}{f}$.

При перемножении уравнений возникает необходимость нахождения суммы квадратов $(bfg)^2 + (cdh)^2$ и суммы кубов $(bfg)^3 + (cdh)^3$. Из 9-го уравнения системы (21) можно найти сумму *bfg и cdh:* $\psi = bfg + cdh = \frac{T - a^3\beta - 2a\alpha\beta - a\alpha\gamma - 2a\beta^2 - 2a\beta\gamma}{a^2 + \alpha + 2\beta + 2\gamma}$. Учитывая, что $(bfg)(cdh) = \alpha\beta\gamma$, можно найти сумму квадратов $(bfg)^2 + (cdh)^2$ и сумму кубов $(bfg)^3 + (cdh)^3$.

Алгоритм 4. Нахождение корня (корней) пятой степени с нулевыми диагональными и целыми положительными внедиагональными элементами у матрицы A, если такой корень (или корни) существует (существуют).

Шаг 1. Используя приведенную в лемме 5 оценку, определить возможные значения переменной a.

Шаг 2. Используя приведенную в лемме 5 оценку, определить возможные значения переменных α и β.

Шаг 3. (Для каждого из возможных значений переменной a.) Найти для каждой возможной пары значений α и β значение переменной γ. Если у всех троек (α, β, γ) хотя бы одна из переменных не является натуральным числом, то матрица A не имеет ни одного корня пятой степени рассматриваемого вида. Если все переменные хотя бы одной из троек являются натуральными числами, то необходимо перейти к шагу 4.

Шаг 4. Для всех троек, все переменные которых являются натуральными числами, необходимо найти переменные $U, V, W, X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3, \delta$ по формулам, представленным в лемме 6.

Шаг 5. Разрешив уравнения системы (25), найти соответственно переменные $b_1, b_2, c_1, c_2, f_1, f_2$.

Шаг 6. Зная произведения α, β, γ, найти переменные d, g, h. Если все переменные, являющиеся элементами матрицы X, представляют собой целые положительные числа, то система уравнений (21) разрешима в целых положительных числах, иначе можно сделать вывод, что матрица A не имеет ни одного корня пятой степени рассматриваемого вида.

Очевидно также, что необходимым условием существования корней всех рассматриваемых в данной статье уравнений, если таковые имеют место, является целочисленность и положительность всех элементов тройки (α, β, γ).

Теорема 3. *Необходимым условием существования решений рассматриваемых видов уравнения $X^n = A$ является целочисленность корня соответствующей степени n определителя матрицы A, причем этот корень будет представлять собой определитель матрицы X.*

Доказательство. Исходя из постановки задачи очевидно, что определители обеих матриц X и $A \in Z$. Согласно теореме о связи определителей исходной матрицы A и матрицы-корня X корень n-й степени определителя матрицы A равен определителю матрицы X. Следовательно, необходимым условием существования решений рассматриваемых видов уравнения $X^n = A$ является целочисленность корня соответствующей степени n определителя матрицы A.

Заключение. В результате проведенного исследования было показано, что для решения задачи по нахождению целых положительных решений матричного уравнения $X^n = A$ для матриц третьего порядка в случае натуральных n можно использовать аналитические методы. Приведены формулы, позволяющие находить целые положительные корни матриц при $n = 3,\ldots,5$. Однако представленную методику можно использовать и для нахождения натуральных корней матриц третьего порядка и при больших n. Преимуществом данного подхода является поиск всех корней рассматриваемого вида, если таковые имеют место. Задача, связанная с выяснением условий существования и единственности целых положительных решений нелинейных уравнений для исходных матриц с также целыми положительными коэффициентами, является достаточно сложной. В связи с этим в статье приведены лишь теоремы, устанавливающие необходимые условия существования целых положительных решений.

В следующей работе будет рассматриваться методика нахождения решений вида $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}$ и $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, если таковые имеют место.

Список использованных источников

1. Буснюк, Н. Н. Математическое моделирование / Н. Н. Буснюк, А. А. Черняк. – Минск: Беларусь, 2014. – 214 с.

2. Higham, N. J. Newton's method for the matrix square root / N. J. Higham // Math. Computation. – 1986. – Vol. 46, № 174. – P. 537–549. https://doi.org/10.1090/s0025-5718-1986-0829624-5

3. Bjorck, A. A Schur method for the square root of a matrix / A. Bjorck, S. Hammarling // Linear Algebra and its Applications. – 1983. – Vol. 52/53. – P. 127–140. https://doi.org/10.1016/0024-3795(83)80010-x

4. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.

5. Якуто, К. Л. Функции от матриц / К. Л. Якуто // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XXI (68) Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, науч. сотрудников и аспирантов, Витебск, 11–12 февр. 2016 г.: в 2 т. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: И. М. Прищепа [и др.]. – Витебск, 2016. – Т. 1. – С. 36–38.

6. Якуто, К. Л. О положительном решении матричного уравнения $X^2 = A$ для матриц второго порядка / К. Л. Якуто // Молодость. Интеллект. Инициатива: материалы IV Междунар. науч.-практ. конф. студентов и магистрантов, Витебск, 29 апр. 2016 г. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: И. М. Прищепа [и др.]. – Витебск, 2016. – С. 24–25.

7. Якуто, К. Л. Уравнение $X^n = A$ для матриц третьего порядка / К. Л. Якуто // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XXII (69) Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, науч. сотрудников и аспирантов, Витебск, 9–10 февр. 2017 г.: в 2 т. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: И. М. Прищепа [и др.]. – Витебск, 2017. – Т. 1. – С. 45–47.

References

1. Busnuck N. N., Chernyak A. A. *Mathematical modeling.* Minsk, Belarus Publ., 2014. 214 p. (in Russian).

2. Higham N. J. Newton's method for the matrix square root. *Mathematics of Computation*, 1986, vol. 46, no. 174, pp. 537–549. https://doi.org/10.1090/s0025-5718-1986-0829624-5

3. Bjorck A., Hammarling S. A Schur method for the square root of a matrix. *Linear Algebra and its Applications*, 1983, vol. 52–53, pp. 127–140. https://doi.org/10.1016/0024-3795(83)80010-x

4. Gantmakher F. R. *Theory of Matrix*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 560 p. (in Russian).

5. Yakuto K. L. Matrix functions. *Materialy XXI (68) Regional'noi nauchno-prakticheskoi konferentsii prepodavatelei, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov "Nauka – obrazovaniyu, proizvodstvu, ekonomike". T. 1* [Materials of XXI (68) Regional science-practical conference of lecturers, researchers and postgraduates "Science – education, industry, economics". Vol. 1]. Vitebsk, 2016, pp. 36–38 (in Russian).

6. Yakuto K. L. About positive decision of matrix equation $X^2 = A$ for second-order matrices. *Materialy IV Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii studentov i magistrantov "Molodost'. Intellekt. Initsiativa"* [Materials of the 4th International science-practical conference of students and graduates "Youth. Intellect. Initiative"]. Vitebsk, 2016, pp. 24–25 (in Russian).

7. Yakuto K. L. Equation $X^n = A$ for the third order matrices. *Materialy XXII (69) Regional'noi nauchno-prakticheskoi konferentsii prepodavatelei, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov "Nauka – obrazovaniyu, proizvodstvu, ekonomike". T. 1* [Materials of XXII (69) Regional science-practical conference of lecturers, researchers and postgraduates "Science – education, industry, economics". Vol. 1]. Vitebsk, 2017, pp. 45–47 (in Russian).

Информация об авторе

Якуто Константин Леонидович – магистр физико-математических наук, аспирант, Витебский государственный университет им. П. М. Машерова (пр. Московский, 33, 210038, г. Витебск, Республика Беларусь). E-mail: k.yakuto@mail.ru

Information about the author

Konstantin L. Yakuto – Master of Physics and Mathematics, Postgraduate Student, Vitebsk State University named after P. M. Masherov (33, Moskovskiy Ave., 210038, Vitebsk, Republic of Belarus). E-mail: k.yakuto@mail.ru