ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.216.73
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-193-209

Поступила в редакцию 13.03.2018
Received 13.03.2018

И. В. Качан

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ

Аннотация. Рассматриваются конечномерные стохастические дифференциальные уравнения с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста, большие 1/3, и со сносом. Данные разнородные составные компоненты уравнений объединены в единый процесс. Решения уравнений понимаются в интегральном смысле, а интегралы, в свою очередь, являются потраекторными интегралами Губинелли [1] и, таким образом, реализуют известный подход в теории грубых траекторий (rough path) [2]. Указаны условия, обеспечивающие существование и единственность решений рассматриваемых стохастических дифференциальных уравнений. Такие условия оказываются достаточными для получения результатов, касающихся непрерывной зависимости от начальных данных. В работе доказывается потраекторная непрерывная зависимость от начальных условий и правых частей решений рассматриваемых стохастических дифференциальных уравнений. Полученный результат не зависит от вероятностных свойств дробных броуновских движений и поэтому легко переносится на произвольные процессы, непрерывные по Гельдеру с показателем, большим 1/3. При этом возникающая в оценке константа получается экспоненциально зависящей от норм дробных броуновских движений. С учетом последнего факта и доказанного потраекторного результата впоследствии выводится логарифмическая непрерывная зависимость в среднем от начальных условий и правых частей решений рассматриваемых стохастических дифференциальных уравнений, представляющая собой основной результат настоящей статьи.

Ключевые слова: дробное броуновское движение, потраекторный интеграл Губинелли, стохастическое дифференциальное уравнение, интегральная непрерывность, устойчивость

Для цитирования. Качан, И. В. Непрерывная зависимость от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / И. В. Качан // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 193–209. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-193-209

I. V. Kachan

Belarusian State University, Minsk, Belarus

CONTINUOUS DEPENDENCE ON THE INITIAL DATA OF THE SOLUTIONS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FRACTIONAL BROWNIAN MOTIONS

Abstract. In the present acticle we consider finite-dimensional stochastic differential equations with fractional Brownian motions having different Hurst indices larger than 1/3 and a drift. These heterogeneous components of the equations are combined into a single process. The solutions of the equations are understood in the integral sense, and the integrals in turn are Gubinelli's rough path integrals [1] realizing the well-known approach of the rough paths theory [2]. The existence and uniqueness conditions of the solutions of these stochastic differential equations are specified. Such conditions are sufficient to obtain the results related the continuous dependence on the initial data. In this article, we have first proved a continuous dependence on the initial conditions and the right-hand sides of the solutions of the stochastic differential equations under consideration for almost all their trajectories. The result obtained does not depend on the probabilistic properties of fractional Brownian motions, and therefore it can be easily generalized to the case of arbitrary Holder-continuous processes with an exponent greater than 1/3. In this case, the constant arising in the estimates appears to be exponentially dependent on the norms of fractional Brownian motions. Taking into account the last fact and the proved result, an expected logarithmic continuous dependence on the initial conditions and the right-hand sides of the solutions of the stochastic differential equations considered is subsequently derived. This is the major result of this article.

Keywords: multivariate fractional Brownian motion, rough paths theory, Gubinelli's derivative, stochastic differential equation, integral continuity, stability

For citation. Kachan I. V. Continuous dependence on the initial data of the solutions of stochastic differential equations with fractional Brownian motions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 193–209 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-193-209

Введение. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение следующего вида:

$$dX_t = f(X_t)dB_t, \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

где $f = (f_0,\ldots,f_d)$, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 0,\ldots,d$, – достаточно гладкие функции с ограниченными производными, $B_t = (B_t^{(0)},\ldots,B_t^{(d)})^T$ $B_t^{(0)} = t$, , $B_t^{(i)}$, $i = 1,\ldots,d$, – независимые одномерные дробные броуновские движения с индексами Харста $H_i \in (1/3, 1)$. Наряду с уравнением (1) рассмотрим аналогичное уравнение с возмущенной правой частью

$$d\widetilde{X}_t = \widetilde{f}(\widetilde{X}_t)dB_t, \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

где $\widetilde{f} = (\widetilde{f}_0,\ldots,\widetilde{f}_d)$, $\widetilde{f}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 0,\ldots,d$, – также достаточно гладкие функции с ограниченными производными.

Существуют различные подходы к определению интегралов по дробному броуновскому движению (см. напр., [1; 2, гл. 5; 3]). В работе М. Губинелли [1] впервые вводится понятие потраекторного интеграла для уравнений (1) общего вида, где в качестве $(B_t)_{t\in[0,T]}$ выступают функции, непрерывные по Гельдеру с показателем $\alpha > 1/3$. В монографии [2, гл. 4, 8] выводятся оценки простого вида для потраекторных интегралов. В этих же работах получены результаты, касающиеся интегральной непрерывности решений уравнений (1) общего вида, см. [1, предложение 8; 2, теорема 8.5]. В приложении к стохастическим дифференциальным уравнениям указанные результаты означают, что имеет место почти наверное потраекторная интегральная непрерывность решений уравнений вида (1) с дробным броуновским движением B_t, компоненты которого имеют один и тот же индекс Харста $H > 1/3$, в условиях существования указанных решений.

В [3] впервые исследуются уравнения смешанного типа, содержащие дробное броуновское движение B_t^H с индексом Харста $H > 1/2$ и стандартное броуновское движение W_t (являющееся частным случаем B_t^H при $H = 1/2$). Здесь интеграл по W_t рассматривается как стохастический интеграл Ито, а интеграл по B_t^H – как потраекторный интеграл Римана – Стилтьеса, введенный в [4]. Стоит отметить, что из выведенных в [3] оценок можно получить условия, обеспечивающие интегральную непрерывность решений уравнений смешанного типа. В [5] получены условия, гарантирующие (α, p)-асимптотическую устойчивость по вероятности и (α, p)-притяжение решений, [5, теоремы 1, 2]. Нетрудно заметить, что уравнения смешанного типа являются частным случаем уравнений (1).

Исследованию устойчивости уравнений вида (1) также посвящена статья [6]. В ней получены условия, обеспечивающие локальную почти наверное экспоненциальную устойчивость нулевого решения уравнения (1) на конечном отрезке $[0, T]$ с дробным броуновским движением B_t, компоненты которого имеют один и тот же индекс Харста $H > 1/2$.

Целью настоящей работы является доказательство непрерывной зависимости от начальных условий и правых частей решений уравнений (1), (2) с броуновским движением B_t, компоненты которого имеют различные индексы Харста $H_i > 1/3$, $i = 1,\ldots,d$, в условиях существования указанных решений.

Обозначения. Будем использовать обозначение $|\cdot|$ для евклидовой нормы, U_1, U_2 – для нормированных векторных пространств над полем $\mathbb{R}$. Пространство функций, непрерывных по Гельдеру с показателем $\alpha\in(0, 1]$, будем обозначать следующим образом:

$$C^{\alpha}([0,T],U_1) = \left\{ Y : [0,T] \to U_1 \mid \|Y\|_{\alpha} = \sup_{s,t\in[0,T],s\neq t} \frac{|Y_t - Y_s|_{U_1}}{|t-s|^{\alpha}} < \infty \right\}.$$

Выделим также класс $C_2^{\alpha}([0,T]^2, U_2)$ функций двух переменных $R(s, t) = R_{s,t}$, принимающих значения в U_2, для которых существует константа C такая, что $|R_{s,t}| \le C|t - s|^{\alpha}$ для всех $(s, t) \in [0, T]^2$. Наименьшую такую константу будем обозначать $\|R\|_{\alpha} = \sup_{s,t\in[0,T],s\neq t} \dfrac{|R_{s,t}|_{U_2}}{|t-s|^{\alpha}}$.

Отметим, что для функции $Y \in C^\alpha([0,T], U_1)$ можно определить приращения $Y_{s,t} = Y_t - Y_s$, $(s, t) \in [0,T]^2$, принадлежащие $C_2^\alpha([0,T]^2, U_1)$. Поэтому мы будем также использовать обозначение $Y_{s,t}$ для соответствующих приращений функции одной переменной Y_t.

Будем использовать символ I для обозначения отрезков вещественной прямой: $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$. Длины таких отрезков также будем обозначать $|I| = b - a$. Через $\|\cdot\|_{\alpha;I}$ обозначим норму Гельдера с показателем α на отрезке $I \subset [0,T]$, а через $\|\cdot\|_{\alpha;I,\delta}$ – норму Гельдера с показателем α, взятую по подотрезкам отрезка I длины не более δ, т. е.

$$\|Y\|_{\alpha;I} = \sup_{\substack{s,t\in I\\ s\neq t}} \frac{|Y_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}, \quad \|Y\|_{\alpha;I,\delta} = \sup_{\substack{s,t\in I\\ 0<|t-s|\leq\delta}} \frac{|Y_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}$$

для функций $Y \in C^\alpha([0,T], U_1)$ или $Y \in C_2^\alpha([0,T]^2, U_2)$. Очевидно,

$$\|\cdot\|_{\alpha;I,\delta} \leq \|\cdot\|_{\alpha;I} \leq \|\cdot\|_{\alpha;[0,T],|I|} \leq \|\cdot\|_{\alpha;[0,T]}$$

для любых $I \subset [0,T]$, $\delta \in (0, |I|]$. Для краткости будем опускать индекс $[0,T]$ для норм, связанных с исходным отрезком интегрирования, полагая $\|\cdot\|_\alpha := \|\cdot\|_{\alpha;[0,T]}$, $\|\cdot\|_{\alpha,\delta} := \|\cdot\|_{\alpha;[0,T],\delta}$.

Через $\mathfrak{L}(U_1, U_2)$ будем обозначать пространство линейных ограниченных операторов, действующих из U_1 в U_2. Через $C_b^k(U_1, U_2)$ будем обозначать множество функций $\varphi : U_1 \to U_2$, имеющих непрерывные и ограниченные производные до порядка k включительно. Пусть

$$\|\varphi\|_{C_b^k} = \sum_{j=0}^k \|D^j\varphi\|_\infty,$$

где $\|\cdot\|_\infty$ – максимум-норма: $\|D^j\varphi\|_\infty = \max_{x\in U_1}|D^j\varphi(x)|$, $j = 0,\ldots,k$; $D^0\varphi = \varphi$, D – оператор дифференцирования.

Необходимые определения. Прежде чем определить решение уравнения (1), приведем некоторые необходимые сведения из теории интегрирования Губинелли [1; 2, гл. 4].

Пусть V, W – конечномерные банаховы пространства над полем $\mathbb{R}$, $\alpha \in (1/3, 1/2]$.

Определение 1. Для заданной функции $Z \in C^\alpha([0,T], W)$ будем говорить, что $Y \in C^\alpha([0,T], \mathfrak{L}(W,V))$ управляется Z, если существует $Y' \in C^\alpha([0,T], \mathfrak{L}(W, \mathfrak{L}(W,V)))$ (называемое производной Губинелли Y) такое, что остаток $R^Y_{s,t} = Y_{s,t} - Y'_s Z_{s,t}$ удовлетворяет $\|R^Y\|_{2\alpha} < \infty$. Множество всех (Y, Y') таких, что Y управляется Z, будем обозначать $\mathfrak{D}_Z^{2\alpha}([0,T], \mathfrak{L}(W,V))$.

Определение 2. Для заданной функции $Z : [0,T] \to W$ будем говорить, что функция $\mathbb{Z} : [0,T]^2 \to W \otimes W$ является процессом второго порядка над Z, если она удовлетворяет следующему тождеству Чена:

$$\mathbb{Z}_{s,t} - \mathbb{Z}_{s,u} - \mathbb{Z}_{u,t} = Z_{s,u} \otimes Z_{u,t}$$

для любой тройки $(s,u,t) \in [0,T]^3$.

Определение 3. Пусть $(Y, Y') \in \mathfrak{D}_Z^{2\alpha}([0,T], \mathfrak{L}(W,V))$. Потраекторным интегралом Губинелли Y по Z будем называть предел интегральных сумм

$$\int_0^T Y dZ = \lim_{|P|\to 0} \sum_{t_i, t_{i+1}\in P} (Y_{t_i} Z_{t_i,t_{i+1}} + Y'_{t_i} \mathbb{Z}_{t_i,t_{i+1}}),$$

где $|P| = \max |t_i - t_{i+1}|$ – диаметр разбиения $P = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_l = T\}$, $\mathbb{Z} : [0,T]^2 \to W \otimes W$ – процесс второго порядка над Z, а предел понимается не зависящим от разбиений P.

З а м е ч а н и е 1. Слагаемое $Y'_{t_i}\mathbb{Z}_{t_i,t_{i+1}}$ записано корректно в том смысле, что имеет место изометрия $\mathfrak{L}\big(W,\mathfrak{L}(W,V)\big)\cong\mathfrak{L}(W\otimes W,V)$. Действительно, мы можем понимать указанное выше произведение как действие билинейной формы на множитель, являющийся тензорным произведением двух векторов. Более точно, если

$$\mathbb{Z}=z\otimes z=(z_jz_k),\quad Y'=(y'_{ijk}),\quad i=1,2,\ldots,\dim V,\quad j,k=1,2,\ldots,\dim W,$$

то

$$Y'\mathbb{Z}=\left(\sum_{j,k=1}^{\dim W}y'_{ijk}z_jz_k\right)_{i=1}^{\dim V}.$$

Таким образом, потраекторный интеграл Губинелли $\int_0^T YdZ$ принимает значения в V.

В дальнейшем будем считать, что $V=\mathbb{R}^n$, $W=\mathbb{R}^{d+1}$.

Пусть $(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})$ – вероятностное пространство, на котором заданы компоненты $B_t^{(i)}$, i = 1,…,d, дробного броуновского движения B_t и случайного процесса X_t. Введем обозначение: $H_{\min}=\min\limits_{i=0,\ldots,d}H_i$. Выберем и зафиксируем $H\in$ (1/3, 1/2] такое, что $H<H_{\min}$. Пусть ξ, $\tilde{\xi}$ – случайные величины, заданные на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})$ и принимающие значения в $\mathbb{R}^n$. Будем писать кратко «п.н.», подразумевая под этим сокращением «почти наверное». Для дробного броуновского движения B_t процесс второго порядка над ним можно определить явным образом.

О п р е д е л е н и е 4. Процессом второго порядка над B будем называть случайный процесс $\mathbb{B}:[0;T]^2\times\Omega\to\mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$, $\mathbb{B}_{s,t}=\left(\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)}\right)_{i,j=0}^{d}$, определенный следующими равенствами:

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)}\overset{L^2}{=}\lim_{|P|\to0}\int_P B_{s,r}^{(i)}dB_r^{(j)},\ \int_P B_{s,r}^{(i)}dB_r^{(j)}=\sum_{t_k,t_{k+1}\in P}B_{s,t_k}^{(i)}B_{t_k,t_{k+1}}^{(j)},\quad 1\le i<j\le d,$$

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(0,j)}=\int_s^t B_{s,r}^{(j)}dr\overset{\text{п.н.}}{=}\lim_{|P|\to0}\sum_{t_k,t_{k+1}\in P}B_{s,t_k}^{(j)}(t_{k+1}-t_k),\quad 1\le j\le d,$$

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(i,i)}=\frac{1}{2}\left(B_{s,t}^{(i)}\right)^2,\quad 0\le i\le d,\qquad \mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)}=-\mathbb{B}_{s,t}^{(j,i)}+B_{s,t}^{(i)}B_{s,t}^{(j)},\quad 0\le j<i\le d,$$

для всех пар $(s,t)\in[0,T]^2$, где $P=\{0=t_0<t_1<\ldots<t_l=T\}$ – произвольное разбиение отрезка $[s,t]$, $|P|=\max|t_k-t_{k+1}|$. Здесь также используются обозначения $\overset{L^2}{=}$, $\overset{\text{п.н.}}{=}$ для того, чтобы показать, что соответствующие пределы понимаются в смысле $L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})$ и п.н. соответственно.

З а м е ч а н и е 2. Следует пояснить корректность данного определения. Интегралы, входящие в $\mathbb{B}_{s,t}^{(0,j)}$, являются потраекторными интегралами Янга, соответствующие интегральные суммы сходятся п.н., поскольку сумма показателей Гельдера функции $B_{s,\cdot}^{(j)}$ и тождественной функции больше 1. Интегральные суммы $\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)}$ имеют конечный предел в L_2 ввиду [2, предложение 10.3], поскольку ковариационные функции процессов $B_t^{(i)}$, $B_t^{(j)}$ имеют конечную ρ-вариацию, $\rho=1/2H<2$ (см. [6, с. 417, предложение 2.2]). В справедливости тождества Чена для $\mathbb{B}$ можно убедиться непосредственной проверкой.

З а м е ч а н и е 3. Как следует из [2, теорема 10.4], имеет место конечность моментов $\mathbb{E}\|\mathbb{B}\|_{2H}^q$ любого порядка $q\ge1$.

О п р е д е л е н и е 5. Решением уравнения (1) будем называть случайный процесс X_t такой, что $(X,X')\in\mathfrak{D}_B^{2H}([0,T],\mathbb{R}^n)$ п.н. и почти наверное удовлетворяющий интегральному уравнению

$$X_t=X_0+\int_0^t f(X_s)dB_s,\quad t\in[0,T],$$

где интеграл понимается как потраекторный интеграл Губинелли. Будем говорить, что решение X_t уравнения (1) с начальным условием $X_0=\xi$ единственно, если для любого другого решения Y_t уравнения (1) с начальным условием $Y_0=\xi$ выполняется равенство $\mathbb{P}(X_t=Y_t\ \forall t\in[0,T])=1$.

Тривиальное обобщение теоремы 8.4 из [2] показывает, что достаточным условием существования и единственности решения уравнения (1) с начальным условием $X_0 = \xi$ является принадлежность $f \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$. Поэтому будем предполагать далее, что $f, \widetilde{f} \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$. Причем f будем считать фиксированной, а $\widetilde{f}$ – изменяющейся в малой окрестности f в пространстве $C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$.

Вспомогательные утверждения. Приведем ряд утверждений, которые будем использовать в дальнейшем для проведения оценок.

Пусть $Y \in C^\alpha([0,T],U_1)$, $I \subset [0,T]$. Следующие предложения касаются свойств гельдеровских норм.

Предложение 1. *Если* $\|Y\|_{\alpha;I,\delta} \le M$, $\delta \le |I|$, *то* $\|Y\|_{\alpha;I} \le M\left(1 \vee 2\delta^{-(1-\alpha)}\,|I|^{1-\alpha}\right)$.

Доказательство дословно повторяет доказательство утверждения 4.24 на с. 77 в [2].

Предложение 2. *Пусть* $t_j = (j\cdot\delta)\wedge T$, $I_j = [t_j, t_{j+1}] \subset [0, T]$, $j = 0, 1,\dots$. *Тогда* $\|Y\|_{H;\delta} \le 2^{1-H}\vee_{j=0}^{[T/\delta]}\|Y\|_{H;I_j}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $s, t \in [0, T]$ такие, что $0 < |t - s| \le \delta$, $s < t$. Если $s, t \in I_j$ для некоторого j, то, очевидно, $|Y_{s,t}| \le \|Y\|_{H;I_j}|t-s|^H \le |t-s|^H \vee_{j=0}^{[T/\delta]}\|Y\|_{H;I_j}$. Иначе $s \in I_{j-1}$, $t \in I_j$. В таком случае

$$|Y_{s,t}| \le |Y_{s,t_j}| + |Y_{t_j,t}| \le \|Y\|_{H;I_{j-1}}|t_j - s|^H + \|Y\|_{H;I_j}|t-t_j|^H \le$$
$$\le \left(|t-t_j|^H + |t_j - s|^H\right)\bigvee_{j=0}^{[T/\delta]}\|Y\|_{H;I_j} \le 2^{1-H}|t-s|^H\bigvee_{j=0}^{[T/\delta]}\|Y\|_{H;I_j},$$

где в последнем переходе было применено неравенство Иенсена для вогнутой функции $\varphi(t) = t^H$, $t > 0$, $H\in(0,1)$. Так как $1 - H > 0$, то $2^{1-H} > 1$, и в любом из рассмотренных случаев

$$|Y_{s,t}| \le 2^{1-H}|t-s|^H\bigvee_{j=0}^{[T/\delta]}\|Y\|_{H;I_j}$$

для $|t - s| \le \delta$. Из последнего неравенства следует требуемое утверждение.

В технических выкладках будет полезно следующее элементарное предложение.

Предложение 3. *Пусть* $\mathrm{u},\widetilde{\mathrm{u}} \in \mathbf{U}$, $\mathrm{v},\widetilde{\mathrm{v}} \in \mathbf{V}$, $u,\widetilde{u} \in U\times V^{\otimes k}$, $v,\widetilde{v} \in V^{\otimes k}$ *– тензоры,* **U, V**, *U, V – нормированные векторные пространства над полем* $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда справедливы неравенства*

$$|\mathrm{uv} - \widetilde{u}\widetilde{v}| \le |\mathrm{u}|\left|\mathrm{v}-\widetilde{v}\right| + |\widetilde{v}|\left|\mathrm{u}-\widetilde{u}\right|,$$
$$|uv - \widetilde{u}\widetilde{v}| \le |u|\left|v-\widetilde{v}\right| + |\widetilde{v}|\left|u-\widetilde{u}\right|.$$

Далее будет существенно использоваться следующее предложение [1, предложение 1; 2, теорема 4.10].

Предложение 4. *Пусть функция* $Z \in C^\alpha(I, W)$ *такова, что* $\|\mathbb{Z}\|_{2\alpha;I} < \infty$ *и* $(Y,Y') \in \mathfrak{D}_Z^{2\alpha}\left(I,\mathfrak{L}(W,V)\right)$, $I = [0,T]$. *Тогда существует константа* $C > 0$, *зависящая лишь от* α *и* $|I| = T$, *такая, что для любых* $s,t \in I$ *выполняется неравенство*

$$\left|\int_s^t Y_r\,dZ_r - Y_s Z_{s,t} - Y_s'\mathbb{Z}_{s,t}\right| \le C\left(\|Z\|_{\alpha;I}\left\|R^Y\right\|_{2\alpha;I} + \|\mathbb{Z}\|_{2\alpha;I}\|Y'\|_{\alpha;I}\right)|t-s|^{3\alpha}.$$

Причем константа $C = C(\alpha, |I|)$ *может быть выбрана не зависящей от* $|I|=T$, *если* $T \in (0,1]$.

Замечание 4. В предложении 4 несущественен тот факт, что отрезок I имеет вид $[0, T]$. Для произвольного отрезка $I = [a, a + T]$ предложение также справедливо ввиду замены переменных $\overline{s} = s - a$, $\overline{t} = t - a$ $(s,t \in [a,a+T],\ \overline{s},\overline{t} \in [0,T])$ и замен функций $\overline{Y}_{\overline{s}} = Y_{a+\overline{s}}$, $\overline{Z}_{\overline{s}} = Z_{a+\overline{s}}$ (очевидно, указанные нормы и интегралы сохраняют свои значения).

П р е д л о ж е н и е 5. *Пусть X_t – решение уравнения. Тогда для любого $I \subset [0,T]$ длины $|I| \le 1$ п.н. справедливы неравенства*

$$\|X\|_{H;I} \le K\left(C_B \|f\|_{C_b^2} \vee \left(C_B \|f\|_{C_b^2} \right)^{1/H} \right), \tag{3}$$

$$\left\|R^X\right\|_{2H;I} \le \hat{K}\left(\left(C_B \|f\|_{C_b^2} \right)^2 \vee \left(C_B \|f\|_{C_b^2} \right)^{1+(1/H)} \right), \tag{4}$$

где $C_B = C_B\left(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}\right) = \|B\|_H + \sqrt{\|\mathbb{B}\|_{2H}}$ *, а константы* $K, \hat{K}$ *зависят лишь от H.*

Равенство (3) является простым следствием [2, предложение 8.3]. Поясним, как из [2, предложение 8.3] вывести равенство (4). Воспользуемся неравенствами из [2, предложение 8.3]:

$$\left\|R^X\right\|_{2H;\delta} \le c_1 \|f\|_{C_b^2}^2 \|\mathbb{B}\|_{2H} + \|X\|_{H;\delta}^2, \quad \|X\|_{H;\delta} \le c_0 \|f\|_{C_b^2} C_B,$$

справедливыми для достаточно малых $\delta \le c_2\left(C_B \|f\|_{C_b^2} \right)^{-1/H}$; здесь c_0, c_1, c_2 – некоторые константы, зависящие лишь от H. Комбинируя их, получим

$$\left\|R^X\right\|_{2H;\delta} \le \|f\|_{C_b^2}^2 \left(c_1 + c_0^2\right) C_B^2 = c_3\left(C_B \|f\|_{C_b^2} \right)^2,$$

где $c_3 = c_1 + c_0^2$. Применяя предложение 1, с учетом $|I| \le 1$, будем иметь

$$\left\|R^X\right\|_{2H;I} \le c_3\left(C_B \|f\|_{C_b^2} \right)^2 \left(1 \vee 2\delta^{H-1}\right) \le c_4\left(\left(C_B \|f\|_{C_b^2} \right)^2 \vee \left(C_B \|f\|_{C_b^2} \right)^{1+\frac{1}{H}} \right),$$

где $c_4 = c_3\left(1 \vee 2c_2^{H-1}\right)$ зависит лишь от H.

Промежуточные результаты. В данном разделе мы получим ряд вспомогательных лемм, на которые будут опираться доказательства результатов, связанных с непрерывной зависимостью решений уравнений (1), (2). Все неравенства в дальнейшем понимаются выполненными почти наверное.

Л е м м а 1. *Пусть X_t и $\widetilde{X}_t$ – решения уравнений* (1) *и* (2) *соответственно с правыми частями f, $\widetilde{f}$ из класса $C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, причем функция $\widetilde{f}$ такова, что $\left\|f - \widetilde{f}\right\|_{C_b^2} \le 1$. Тогда для любого отрезка $I = [u, v] \subset [0,T]$ длины $|I| \le 1$ и любых $s,t \in I$ п.н. имеет место следующее неравенство:*

$$\left|\int_s^t \left(f(\widetilde{X}_\tau) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau) \right) dB_\tau \right| \le C_f \left\|f - \widetilde{f}\right\|_{C_b^2} |t-s|^H,$$

где $C_f = C_f\left(H, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H} \right)$ *– случайная величина.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя предложение 4, получим оценку

$$\left|\int_s^t \left(f(\widetilde{X}_\tau) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau) \right) dB_\tau \right| \le \left| f(\widetilde{X}_s) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_s) \right| |B_{s,t}| + \left| f(\widetilde{X}_s)' - \widetilde{f}(\widetilde{X}_s)' \right| |\mathbb{B}_{s,t}| +$$
$$+ C\left(\|B\|_H \left\|R^{f(\widetilde{X}) - \widetilde{f}(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}\|_{2H} \left\|f(\widetilde{X})' - \widetilde{f}(\widetilde{X})'\right\|_{H;I} \right) |t-s|^{3H}. \tag{5}$$

Следуя [2, лемма 7.3, теорема 8.4], имеют место следующие соотношения для производных Губинелли:

$$f(\widetilde{X}_\cdot)' = Df(\widetilde{X}_\cdot)\cdot \widetilde{X}'_\cdot = Df(\widetilde{X}_\cdot)\cdot \widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot) = (Df\cdot \widetilde{f})(\widetilde{X}_\cdot), \tag{6}$$

$$\widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot)' = D\widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot)\cdot \widetilde{X}'_\cdot = D\widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot)\cdot \widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot) = (D\widetilde{f}\cdot \widetilde{f})(\widetilde{X}_\cdot). \tag{7}$$

Из соотношений (6), (7) очевидным образом следуют оценки

$$\left|f(\widetilde{X}_s)-\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\right| |B_{s,t}| \le \left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2} \|B\|_H |t-s|^H,$$

$$\left|f(\widetilde{X}_s)'-\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)'\right| |\mathbb{B}_{s,t}| \le \left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2} \left\|\widetilde{f}\right\|_{C_b^2} \|\mathbb{B}\|_{2H} |t-s|^H$$

для любых $s,t \in I$, $|I| \le 1$. Из неравенства треугольника следует, что $\left\|\widetilde{f}\right\|_{C_b^2} \le \|f\|_{C_b^2} + 1$. Таким образом,

$$\left|f(\widetilde{X}_s)-\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\right| |B_{s,t}| + \left|f(\widetilde{X}_s)'-\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)'\right| |\mathbb{B}_{s,t}| \le c_0 \left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2} |t-s|^H, \tag{8}$$

где $c_0 = \|B\|_H + (1+\|f\|_{C_b^3})\|\mathbb{B}\|_{2H}$.

Далее оценим $\left\|f(\widetilde{X})'-\widetilde{f}(\widetilde{X})'\right\|_{H;I}$. Используя соотношения (6), (7) и формулу конечных приращений, будем иметь

$$\left|f(\widetilde{X}_\cdot)'_{s,t}-\widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot)'_{s,t}\right| = \left|\left(Df\cdot\widetilde{f} - D\widetilde{f}\cdot\widetilde{f}\right)(\widetilde{X}_\cdot)_{s,t}\right| \le \left\|D\left((Df-D\widetilde{f})\cdot\widetilde{f}\right)\right\|_\infty \left\|\widetilde{X}\right\|_{H;I} |t-s|^H .$$

Поскольку $D\left((Df-D\widetilde{f})\cdot\widetilde{f}\right) = (D^2f - D^2\widetilde{f})\cdot\widetilde{f} + (Df-D\widetilde{f})\cdot D\widetilde{f}$, то нетрудно видеть, что $\left\|D((Df-D\widetilde{f})\cdot\widetilde{f})\right\|_\infty \le 2\left\|\widetilde{f}\right\|_{C_b^2}\left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2} \le 2(1+\|f\|_{C_b^3})\left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2}$. Отсюда ввиду предложения 5 выводим неравенство

$$\left\|f(\widetilde{X})'-\widetilde{f}(\widetilde{X})'\right\|_{H;I} \le c_{f'} \left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2}, \tag{9}$$

где $c_{f'} = 2(1+\|f\|_{C_b^3})K\left((1+\|f\|_{C_b^3})C_B \vee \left((1+\|f\|_{C_b^3})C_B\right)^{1/H}\right)$.

Осталось оценить $\left\|R^{f(\widetilde{X})-\widetilde{f}(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I}$. Учитывая соотношения (6), (7) и формулу конечных приращений, для некоторого $\tilde{\theta}\in(0,1)$ будем иметь

$$\begin{aligned}
R_{s,t}^{f(\widetilde{X})-\widetilde{f}(\widetilde{X})} &= f(\widetilde{X}_\cdot)_{s,t} - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot)_{s,t} - Df(\widetilde{X}_s)\widetilde{X}'_s B_{s,t} + D\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\widetilde{X}'_s B_{s,t} = \\
&= \left((f-\widetilde{f})(\widetilde{X}_\cdot)_{s,t} - D(f-\widetilde{f})(\widetilde{X}_s)\widetilde{X}_{s,t}\right) + \left(Df(\widetilde{X}_s) - D\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\right) R_{s,t}^{\widetilde{X}} = \\
&= \frac{1}{2} D^2\left(f-\widetilde{f}\right)\left(\widetilde{X}_{s,t}(\tilde{\theta})\right)\widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} + \left(Df(\widetilde{X}_s) - D\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\right) R_{s,t}^{\widetilde{X}}.
\end{aligned}$$

Из последнего равенства и формулы конечных приращений следует, что для любых $s,t \in I$ имеет место оценка

$$\left|R_{s,t}^{f(\widetilde{X})-\widetilde{f}(\widetilde{X})}\right| \le \left(\frac{1}{2}\left\|\widetilde{X}\right\|_{H;I}^2 + \left\|R^{\widetilde{X}}\right\|_{2H;I}\right)\left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2} |t-s|^{2H},$$

из которой с учетом предложения 5 устанавливаем неравенство

$$\left\|R_{s,t}^{f(\widetilde{X})-\widetilde{f}(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I} \le c_R \left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2} \qquad (10)$$

где

$$c_R = \frac{1}{2}K^2\left(\left((1+\|f\|_{C_b^3})C_B\right)^2 \vee \left((1+\|f\|_{C_b^3})C_B\right)^{2/H}\right) + \hat{K}\left(\left((1+\|f\|_{C_b^3})C_B\right)^2 \vee \left((1+\|f\|_{C_b^3})C_B\right)^{1+(1/H)}\right).$$

Применяя неравенства (8)–(10) к правой части (5), получим

$$\left|\int_s^t \left(f(\widetilde{X}_\tau)-\widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)\right)dB_\tau\right| \le \left(c_0 + Cc_R\|B\|_H + Cc_{f'}\|\mathbb{B}\|_{2H}\right)\left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2} |t-s|^H,$$

что и требовалось. Лемма доказана.

Л е м м а 2. *Пусть* X_t *и* $\widetilde{X}_t$ *– решения уравнений* (1) *и* (2) *соответственно с правыми частями* f, $\widetilde{f}$ *из класса* $C_b^3(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, *причем функция* $\widetilde{f}$ *такова, что* $\left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2} \le 1$. *Тогда для любых функций* $g,\widetilde{g} \in C_b^1$, *любого отрезка* $I = [u, v] \subset [0,T]$ *длины* $|I| \le 1$ *и любого* $s \in I$ *п.н. справедливо неравенство*

$$|g(X_s)-\widetilde{g}(\widetilde{X}_s)| \le \left\|g-\widetilde{g}\right\|_\infty + C_{0;g}\left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2} + C_{1;g}|X_u-\widetilde{X}_u| +$$
$$+C_{2;g}\left(\|B\|_H \left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}\|_{2H}\left\|f(X)'-f(\widetilde{X})'\right\|_{H;I}\right)|I|^{3H},$$

где $C_{0;g} = C_{0;g}\left(H,\|g\|_{C_b^1},\|f\|_{C_b^3},\|B\|_H,\|\mathbb{B}\|_{2H}\right)$, $C_{1;g} = C_{1;g}\left(H,\|g\|_{C_b^1},\|f\|_{C_b^3},\|B\|_H,\|\mathbb{B}\|_{2H}\right)$ – случайные величины, $C_{2;g} = C_{2;g}\left(H,\|g\|_{C_b^1}\right)$ – константа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы конечных приращений следует, что имеет место неравенство

$$|g(X_s)-\widetilde{g}(\widetilde{X}_s)| \le |g(X_s)-g(\widetilde{X}_s)| + |g(\widetilde{X}_s)-\widetilde{g}(\widetilde{X}_s)| \le \|Dg\|_\infty |X_s-\widetilde{X}_s| + \left\|g-\widetilde{g}\right\|_\infty \le$$
$$\le \left\|g-\widetilde{g}\right\|_\infty + \|g\|_{C_b^1}\left(|X_u-\widetilde{X}_u| + |X_{u,s}-\widetilde{X}_{u,s}|\right). \qquad (11)$$

Поэтому осталось оценить $|X_{u,s}-\widetilde{X}_{u,s}|$. Для этого воспользуемся определением решения и предложением 4. Будем иметь

$$|X_{u,s}-\widetilde{X}_{u,s}| = \left|\int_u^s\left(f(X_\tau)-\widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)\right)dB_\tau\right| \le M_1 + M_2,$$

где $M_1 = \left|\int_u^s\left(f(X_\tau)-f(\widetilde{X}_\tau)\right)dB_\tau\right|$, $M_2 = \left|\int_u^s\left(f(\widetilde{X}_\tau)-\widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)\right)dB_\tau\right|$. Оценку для второго выражения дает лемма 1: $M_2 \le C_f\left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2}|s-u|^H$.

Оценим M_1. С учетом соотношений, аналогичных (6), (7), и предложения 4 получим

$$M_1 \le \left|f(X_u)-f(\widetilde{X}_u)\right||B_{u,s}| + \left|(Df\cdot f)(X_u)-(Df\cdot\widetilde{f})(\widetilde{X}_u)\right||\mathbb{B}_{u,s}| +$$
$$+C\left(\|B\|_{H;I}\left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}\|_{2H;I}\left\|f(X)'-f(\widetilde{X})'\right\|_{H;I}\right)|s-u|^{3H}. \qquad (12)$$

Осталось заметить, что ввиду формулы конечных приращений, примененной к функциям f и $Df \cdot f$, для любого $s \in I$, $|I| \le 1$ будем иметь

$$\left|f(X_u)-f(\widetilde{X}_u)\right| |B_{u,s}| \le \|Df\|_\infty |X_u-\widetilde{X}_u| \cdot \|B\|_{H;I} |s-u|^H \le \|f\|_{C_b^3} \|B\|_H |X_u-\widetilde{X}_u|, \tag{13}$$

$$\left|Df(X_u)f(X_u)-Df(\widetilde{X}_u)\widetilde{f}(\widetilde{X}_u)\right| |\mathbb{B}_{u,s}| \le \left(\|D(Df\cdot f)\|_\infty |X_u-\widetilde{X}_u| + \|Df\|_\infty \|f-\widetilde{f}\|_\infty\right) |\mathbb{B}_{u,s}| \le$$
$$\le \|f\|^2_{C_b^3} \|\mathbb{B}\|_{2H} |X_u-\widetilde{X}_u| + \|f\|_{C_b^3} \|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2} \|\mathbb{B}\|_{2H}. \tag{14}$$

Окончательно из соотношений (11)–(14) и леммы 1 выводим

$$|g(X_s)-g(\widetilde{X}_s)| \le \|g-\widetilde{g}\|_\infty + C_{0;g}\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2} + C_{1;g}|X_u-\widetilde{X}_u| +$$
$$+C_{2;g}\left(\|B\|_H \left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}\|_{2H}\left\|f(X)'-f(\widetilde{X})'\right\|_{H;I}\right)|I|^{3H},$$

где $C_{0;g}=\|g\|_{C_b^1}\left(\|f\|_{C_b^3}\|\mathbb{B}\|_{2H}+C_f\right)$, $C_{1;g}=\|g\|_{C_b^1}\left(1+\|f\|_{C_b^3}\|B\|_H+\|f\|^2_{C_b^3}\|\mathbb{B}\|_{2H}\right)$, $C_{2;g}=C\|g\|_{C_b^1}$. Последнее соотношение доказывает лемму.

Л е м м а 3. *Пусть X_t и $\widetilde{X}_t$ – решения уравнений* (1) *и* (2) *соответственно с правыми частями f, $\widetilde{f}$ из класса $C_b^3(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, причем функция $\widetilde{f}$ такова, что $\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}\le 1$. Для любого отрезка $I=[u,v]\subset[0,T]$ длины $|I|\le 1$ п.н. имеет место следующее неравенство:*

$$\left\|f(X)'-f(\widetilde{X})'\right\|_{H;I} \le C_1|X_u-\widetilde{X}_u| + C_2\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2} + C_3\|X-\widetilde{X}\|_{H;I},$$

где $C_j=C_j(H,\|f\|_{C_b^3},\|B\|_H,\|\mathbb{B}\|_{2H})$, $j=1,2,3$, – случайные величины.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначения: $Y_{s,t}(\theta)=Y_s+\theta Y_{s,t}$, $\theta\in(0,1)$, $s,t\in I$, $\varphi=Df\cdot f$. С учетом соотношений, аналогичных (6), (7), следуя формуле конечных приращений, найдутся θ_1, θ_2, $\theta\in(0,1)$ такие, что

$$\left|\left(f(X_\cdot)'-f(\widetilde{X}_\cdot)'\right)_{s,t}\right| \le \left|(Df\cdot f)(X_\cdot)_{s,t}-(Df\cdot f)(\widetilde{X}_\cdot)_{s,t}\right| + \left|\left(Df\cdot(f-\widetilde{f})\right)(\widetilde{X}_\cdot)_{s,t}\right| =$$
$$=\left|D\varphi\left(X_{s,t}(\theta_1)\right)X_{s,t}-D\varphi\left(\widetilde{X}_{s,t}(\theta_2)\right)\widetilde{X}_{s,t}\right| + \left|D\left(Df\cdot(f-\widetilde{f})\right)\left(\widetilde{X}_{s,t}(\theta)\right)\widetilde{X}_{s,t}\right| \le$$
$$\le\left|D\varphi\left(X_{s,t}(\theta_1)\right)\right|\cdot|X_{s,t}-\widetilde{X}_{s,t}| + |\widetilde{X}_{s,t}|\cdot\left|D\varphi\left(X_{s,t}(\theta_1)\right)-D\varphi\left(\widetilde{X}_{s,t}(\theta_2)\right)\right| +$$
$$+\left\|D^2f\cdot(f-\widetilde{f})+Df\cdot(Df-D\widetilde{f})\right\|_\infty |\widetilde{X}_{s,t}|. \tag{15}$$

Легко видеть, что $\left\|D^2f\cdot(f-\widetilde{f})+Df\cdot(Df-D\widetilde{f})\right\|_\infty \le 2\|f\|_{C_b^3}\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}$. Оценим второе слагаемое в (15). Из формулы конечных приращений следует:

$$\left|D\varphi(X_{s,t}(\theta_1))-D\varphi(\widetilde{X}_{s,t}(\theta_2))\right| \le \left\|D^2\varphi\right\|_\infty\left(|X_s-\widetilde{X}_s|+|\theta_1-\theta_2|\cdot|X_{s,t}-\widetilde{X}_{s,t}|\right) \le$$
$$\le\|f\|^2_{C_b^3}\left(|X_u-\widetilde{X}_u|+\|X-\widetilde{X}\|_{H;I}|u-s|^H+\|X-\widetilde{X}\|_{H;I}|t-s|^H\right). \tag{16}$$

С учетом соотношений(15), (16), очевидных неравенств $|\widetilde{X}_{s,t}|\le\|\widetilde{X}\|_{H;I}|t-s|^H$, $\|\widetilde{f}\|_{C_b^2}\le 1+\|f\|_{C_b^3}$ и предложения 5 для любых $s,t\in I$ будем иметь

$$\left|\left(f(X_\cdot)'-f(\widetilde{X}_\cdot)'\right)_{s,t}\right| \le \left(C_1|X_u-\widetilde{X}_u|+C_2\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}+C_3\|X-\widetilde{X}\|_{H;I}\right)|t-s|^H,$$

где $C_1 = \|f\|^2_{C_b^3} C_{\widetilde{X}}$, $C_2 = 2\|f\|_{C_b^3} C_{\widetilde{X}}$, $C_3 = \left(1 + 2C_{\widetilde{X}}\right)\|f\|^2_{C_b^3}$, $C_{\widetilde{X}} = K\left((1+\|f\|_{C_b^3})C_B \vee \left((1+\|f\|_{C_b^3})C_B\right)^{1/H}\right)$.
Из последнего неравенства следует требуемое утверждение. Лемма доказана.

Л е м м а 4. *Пусть* X_t *и* $\widetilde{X}_t$ *– решения уравнений* (1) *и* (2) *соответственно с правыми частями* f, $\widetilde{f}$ *из класса* $C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, *причем функция* $\widetilde{f}$ *такова, что* $\left\|f - \widetilde{f}\right\|_{C_b^2} \le 1$. *Для любого отрезка* $I = [u, v] \subset [0,T]$ *длины* $|I| \le 1$ *п.н. имеет место следующее неравенство:*

$$\left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I} \le C_4 \,|\, X_u - \widetilde{X}_u \,| + C_5 \left\|f - \widetilde{f}\right\|_{C_b^2} + C_6 \left\|X - \widetilde{X}\right\|_{H;I},$$

где $C_j = C_j\left(H, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}\right)$, $j = 4, 5, 6$, *– случайные величины.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению

$$R_{s,t}^{f(X)-f(\widetilde{X})} = \left(f(X_\cdot) - f(\widetilde{X}_\cdot)\right)_{s,t} - Df(X_s)X'_s B_{s,t} + Df(\widetilde{X}_s)\widetilde{X}'_s B_{s,t} =$$
$$= \left(f(X_\cdot) - f(\widetilde{X}_\cdot)\right)_{s,t} - Df(X_s)X_{s,t} + Df(\widetilde{X}_s)\widetilde{X}_{s,t} + Df(X_s)R^X_{s,t} - Df(\widetilde{X}_s)R^{\widetilde{X}}_{s,t}. \quad (17)$$

Рассмотрим функцию $g(x,\tilde{x}) = f(x) - f(\tilde{x})$. Она дифференцируема по обеим переменным до 3-го порядка включительно и ввиду разложения в ряд Тейлора для некоторого $\theta \in (0, 1)$:

$$g(X_t, \widetilde{X}_t) = g(X_s, \widetilde{X}_s) + \left(X_{s,t}\frac{\partial g(\cdot)}{\partial x} + \widetilde{X}_{s,t}\frac{\partial g(\cdot)}{\partial \tilde{x}} \right)\Bigg|_{(X_s, \widetilde{X}_s)} +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g(\cdot)}{\partial x^2} X^{\otimes 2}_{s,t} + 2\cdot\frac{\partial^2 g(\cdot)}{\partial x \partial \tilde{x}}(X_{s,t} \otimes \widetilde{X}_{s,t}) + \frac{\partial g^2(\cdot)}{\partial \tilde{x}^2}\widetilde{X}^{\otimes 2}_{s,t} \right)\Bigg|_{(X_s(\theta), \widetilde{X}_s(\theta))}. \quad (18)$$

Вернемся к исходным обозначениям:

$$\frac{\partial^i g(x,\tilde{x})}{\partial x^i} = D^i f(x), \quad \frac{\partial^i g(x,\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^i} = -D^i f(\tilde{x}), \quad i = 1, 2; \quad \frac{\partial^2 g(x,\tilde{x})}{\partial x \partial \tilde{x}} = 0. \quad (19)$$

Учитывая равенства (17)–(19), получим

$$R_{s,t}^{f(X)-f(\widetilde{X})} = \frac{1}{2}\left(D^2 f\left(X_{s,t}(\theta)\right)X^{\otimes 2}_{s,t} - D^2 f\left(\widetilde{X}_{s,t}(\theta)\right)\widetilde{X}^{\otimes 2}_{s,t}\right) + \left(Df(X_s)R^X_{s,t} - Df(\widetilde{X}_s)R^{\widetilde{X}}_{s,t}\right). \quad (20)$$

Далее зафиксируем произвольные $s,t \in I$ такие, что $|t - s| \le \delta$ для некоторого $\delta \le |I|$ и получим оценку на $\left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;\delta}$, оценивая слагаемые в равенстве (20). Выберем отрезок $I_\delta \subset I$ длины $|I_\delta| \le \delta$, содержащий точки $s,t \in I_\delta$.

Шаг 1. Оценим первое слагаемое в (20). Очевидно,

$$\left|D^2 f\left(X_{s,t}(\theta)\right)X^{\otimes 2}_{s,t} - D^2 f\left(\widetilde{X}_{s,t}(\theta)\right)\widetilde{X}^{\otimes 2}_{s,t}\right| \le \left|D^2 f\left(X_{s,t}(\theta)\right)\right|\left|X^{\otimes 2}_{s,t} - \widetilde{X}^{\otimes 2}_{s,t}\right| +$$
$$+\left|\widetilde{X}^{\otimes 2}_{s,t}\right|\left|D^2 f\left(X_{s,t}(\theta)\right) - D^2 f\left(\widetilde{X}_{s,t}(\theta)\right)\right|. \quad (21)$$

Ввиду формулы конечных приращений и неравенства $|I| \le 1$:

$$\left|D^2 f\left(X_{s,t}(\theta)\right) - D^2 f\left(\widetilde{X}_{s,t}(\theta)\right)\right| \le \left\|D^3 f\right\|_\infty \left(|\, X_s - \widetilde{X}_s\,| + |\,\theta\,||\, X_{s,t} - \widetilde{X}_{s,t}\,|\right) \le$$
$$\le \|f\|_{C_b^3}\left(|\, X_u - \widetilde{X}_u\,| + 2\left\|X - \widetilde{X}\right\|_{H;I}\right). \quad (22)$$

Из определения евклидовой нормы нетрудно установить справедливость соотношений

$$\left|\widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2}\right| = |\widetilde{X}_{s,t}|^2 \le \left\|\widetilde{X}\right\|_{H;I}^2 |t-s|^{2H}, \tag{23}$$

$$\left|X_{s,t}^{\otimes 2} - \widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2}\right| \le \sqrt{2\left(\left\|X\right\|_{H;I}^2 + \left\|\widetilde{X}\right\|_{H;I}^2\right)}\left\|X-\widetilde{X}\right\|_{H;I} |t-s|^{2H}. \tag{24}$$

Учитывая равенства (21)–(24) и предложение 5, получаем окончательно оценку:

$$\left|D^2 f\left(X_{s,t}(\theta)\right)X_{s,t}^{\otimes 2} - D^2 f\left(\widetilde{X}_{s,t}(\theta)\right)\widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2}\right| \le \left(c_1 |X_u - \widetilde{X}_u| + c_2\left\|X-\widetilde{X}\right\|_{H;I}\right)|t-s|^{2H}, \tag{25}$$

где $c_1 = \|f\|_{C_b^3} C_{\widetilde{X}}^2$, $c_2 = 2c_1 + \|f\|_{C_b^3}\sqrt{2\left(C_X^2 + C_{\widetilde{X}}^2\right)}$, $C_{\widetilde{X}} = K\left(C_B\left(1+\|f\|_{C_b^3}\right) \vee \left(C_B\left(1+\|f\|_{C_b^3}\right)\right)^{1/H}\right)$, $C_X = K\left(C_B\|f\|_{C_b^3} \vee \left(C_B\|f\|_{C_b^3}\right)^{1/H}\right)$.

Шаг 2. Оценим второе слагаемое в (20). Очевидно,

$$\left|Df(X_s)R_{s,t}^X - Df(\widetilde{X}_s)R_{s,t}^{\widetilde{X}}\right| \le |Df(X_s)|\left|R_{s,t}^X - R_{s,t}^{\widetilde{X}}\right| + \left|R_{s,t}^{\widetilde{X}}\right|\left|Df(X_s) - Df(\widetilde{X}_s)\right|. \tag{26}$$

Ввиду формулы конечных приращений

$$\left|Df(X_s) - Df(\widetilde{X}_s)\right| \le \left\|D^2 f\right\|_\infty \left|X_s - \widetilde{X}_s\right| \le \|f\|_{C_b^3}\left(|X_u - \widetilde{X}_u| + \left\|X-\widetilde{X}\right\|_{H;I}\right). \tag{27}$$

Рассмотрим разность остатков:

$$\begin{gathered}\left|R_{s,t}^X - R_{s,t}^{\widetilde{X}}\right| = \left|X_{s,t} - \widetilde{X}_{s,t} - (X'_s - \widetilde{X}'_s)B_{s,t}\right| = \\ = \left|\int_s^t \left(f(X_\tau) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)\right)dB_\tau - \left(f(X_s) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\right)B_{s,t}\right| \le M_1 + M_2, \\ M_1 = \left|\int_s^t \left(f(X_\tau) - f(\widetilde{X}_\tau)\right)dB_\tau - \left(f(X_s) - f(\widetilde{X}_s)\right)B_{s,t}\right|, \\ M_2 = \left|\int_s^t \left(f(\widetilde{X}_\tau) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)\right)dB_\tau - \left(f(\widetilde{X}_s) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\right)B_{s,t}\right|.\end{gathered} \tag{28}$$

Оценим M_1, применяя предложение 4:

$$\begin{gathered}M_1 \le \left|(Df\cdot f)(X_s) - (Df\cdot\widetilde{f})(\widetilde{X}_s)\right||\mathbb{B}_{s,t}| + \\ + C\left(\|B\|_H \left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I_\delta} + \|\mathbb{B}\|_{2H}\left\|f(X)' - f(\widetilde{X})'\right\|_{H;I_\delta}\right)\delta^H |t-s|^{2H},\end{gathered} \tag{29}$$

где константа C зависит лишь от H. По аналогии с неравенством (14) можем записать

$$\begin{gathered}\left|(Df\cdot f)(X_s) - (Df\cdot\widetilde{f})(\widetilde{X}_s)\right| \le \left\|D(Df\cdot f)\right\|_\infty |X_s - \widetilde{X}_s| + \|Df\|_\infty \left\|f-\widetilde{f}\right\|_\infty \le \\ \le \|f\|_{C_b^3}^2\left(|X_u - \widetilde{X}_u| + \left\|X-\widetilde{X}\right\|_{H;I}\right) + \|f\|_{C_b^3}\left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2}.\end{gathered} \tag{30}$$

Согласно лемме 3 найдутся случайные величины C_1, C_2, C_3 (зависящие только от H, $\|f\|_{C_b^3}$, $\|B\|_H$, $\|\mathbb{B}\|_{2H}$) такие, что

$$\left\|f(X)' - f(\widetilde{X})'\right\|_{H;I} \le C_1|X_u - \widetilde{X}_u| + C_2\left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2} + C_3\left\|X-\widetilde{X}\right\|_{H;I}. \tag{31}$$

Учитывая, что $\|\cdot\|_{H;I_\delta} \le \|\cdot\|_{H;I}$, $\|\cdot\|_{2H;I_\delta} \le \|\cdot\|_{2H;I,\delta}$, $\delta \le 1$, подставляя (30), (31) в (29), получим оценку

$$M_1 \le \left(C_{M_1,1} \,|\, X_u - \widetilde{X}_u \,| + C_{M_1,2} \left\| X - \widetilde{X} \right\|_{H;I} + C_{M_1,3} \left\| f - \widetilde{f} \right\|_{C_b^2} + C \|B\|_H \, \delta^H \left\| R^{f(X)-f(\widetilde{X})} \right\|_{2H;I,\delta} \right) |\, t - s \,|^{2H}, \tag{32}$$

где $C_{M_1,1} = \|\mathbb{B}\|_{2H} \left(\|f\|_{C_b^3}^2 + CC_1 \right)$, $C_{M_1,2} = \|\mathbb{B}\|_{2H} \left(\|f\|_{C_b^3}^2 + CC_3 \right)$, $C_{M_1,3} = \|\mathbb{B}\|_{2H} \left(\|f\|_{C_b^3} + CC_2 \right)$.

Оценим M_2, также применяя предложение 4:

$$M_2 \le \left| (Df \cdot \widetilde{f})(\widetilde{X}_s) - (D\widetilde{f} \cdot \widetilde{f})(\widetilde{X}_s) \right| |\, \mathbb{B}_{s,t} \,| +$$
$$+ C \left(\|B\|_H \left\| R^{f(\widetilde{X}) - \widetilde{f}(\widetilde{X})} \right\|_{2H;I_\delta} + \|\mathbb{B}\|_{2H} \left\| f(\widetilde{X})' - \widetilde{f}(\widetilde{X})' \right\|_{H;I_\delta} \right) |\, t - s \,|^{2H}.$$

Используя неравенства (8)–(10), из последнего соотношения можно вывести неравенство

$$M_2 \le C_{M_2,3} \left\| f - \widetilde{f} \right\|_{C_b^2} |\, t - s \,|^{2H}, \tag{33}$$

где $C_{M_2,3} = \left(1 + \|f\|_{C_b^3} \right) \|\mathbb{B}\|_{2H} + Cc_R \|B\|_H + Cc_{f'} \|\mathbb{B}\|_{2H}$.

Учитывая равенства (26), (27), (32), (33) и предложение 5, получаем окончательно оценку:

$$\left| Df(X_s) R_{s,t}^X - Df(\widetilde{X}_s) R_{s,t}^{\widetilde{X}} \right| \le (c_3 \,|\, X_u - \widetilde{X}_u \,| + c_4 \left\| X - \widetilde{X} \right\|_{H;I} + c_5 \left\| f - \widetilde{f} \right\|_{C_b^2} +$$
$$+ c_6 \delta^H \left\| R^{f(X)-f(\widetilde{X})} \right\|_{2H;I,\delta}) \,|\, t - s \,|^{2H}, \tag{34}$$

где $c_i = c_i \left(H, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H} \right) = c_{3,4} \left(C_{M_1,i-2} \right)$, $i = 3,4$, $c_5 = c_{3,4} \left(C_{M_1,3} + C_{M_2,3} \right)$, $c_6 = C \|B\|_H$,

а в свою очередь, $c_{3,4}(y) = \|f\|_{C_b^3} \left(\hat{K} \left(\left(C_B \left(1 + \|f\|_{C_b^3} \right) \right)^2 \vee \left(C_B \left(1 + \|f\|_{C_b^3} \right) \right)^{1+(1/H)} + y \right) \right)$.

Применяя оценки (25), (34) к равенству (20), получим, что для любых $s,t \in I$ таких, что $|t - s| \le \delta$, справедливо неравенство

$$\left| R_{s,t}^{f(X)-f(\widetilde{X})} \right| \le \left(c_8 \,|\, X_u - \widetilde{X}_u \,| + c_7 \left\| X - \widetilde{X} \right\|_{H;I} + c_5 \left\| f - \widetilde{f} \right\|_{C_b^2} + c_6 \delta^H \left\| R^{f(X)-f(\widetilde{X})} \right\|_{2H;I,\delta} \right) |\, t - s \,|^{2H},$$

где $c_8 = \frac{1}{2} c_1 + c_3$, $c_7 = \frac{1}{2} c_2 + c_4$. Отсюда заключаем, что

$$\left\| R^{f(X)-f(\widetilde{X})} \right\|_{2H;I,\delta} \le c_8 \,|\, X_u - \widetilde{X}_u \,| + c_7 \left\| X - \widetilde{X} \right\|_{H;I} + c_5 \left\| f - \widetilde{f} \right\|_{C_b^2} + c_6 \delta^H \left\| R^{f(X)-f(\widetilde{X})} \right\|_{2H;I,\delta}$$

для произвольного $\delta \in (0, |I|]$. Теперь выберем и зафиксируем δ таким, чтобы

$$c_6 \delta^H = C \|B\|_H \, \delta^H \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \delta \le \left(2C \|B\|_H \right)^{-1/H},$$

т. е. положим $\delta := |\, I \,| \wedge \left(2C \|B\|_H \right)^{-1/H}$. При таком выборе

$$\left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I,\delta} \le 2c_8\,|X_u-\widetilde{X}_u|+2c_7\left\|X-\widetilde{X}\right\|_{H;I}+2c_5\left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2}.$$

Из последнего равенства, предложения 1 и неравенства $|I| \le 1$ вытекает

$$\left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I} \le 2\left(1\vee 2\left(2C\|B\|_H\right)^{\frac{1-H}{H}}\right)\left(c_8\,|X_u-\widetilde{X}_u|+c_7\left\|X-\widetilde{X}\right\|_{H;I}+c_5\left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2}\right),$$

откуда и следует требуемое неравенство. Лемма доказана.

Основные результаты. Перейдем к основным результатам, касающимся непрерывной зависимости от начальных условий и правых частей решений уравнений (1), (2) на отрезке $[0,\ T]$. Следующая теорема устанавливает потраекторную непрерывную зависимость.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $f,\widetilde{f}\in C_b^3(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, *причем функция* $\widetilde{f}$ *такова, что* $\left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2}\le 1$. *Тогда для решений* X_t, $\widetilde{X}_t$ *уравнений* (1), (2) *с начальными условиями* $X_0 = \xi$, $\widetilde{X}_0=\tilde{\xi}$ *соответственно п.н. справедлива следующая оценка:*

$$\left\|X-\widetilde{X}\right\|_H \le C\left(|\xi-\tilde{\xi}|+\left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2}\right) \tag{35}$$

для некоторой случайной величины $C=C\left(H,T,\|f\|_{C_b^3},\|B\|_H,\|\mathbb{B}\|_{2H}\right)$. *Причем C может быть выбрана не зависящей от T, если* $T\in(0,\ 1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольный отрезок $I = [u,\ v] \subset [0,T]$ достаточно малой длины $|I| \le 1 \wedge T$ (точное значение длины $|I|$ будет указано ниже) и получим оценку на $\left\|X-\widetilde{X}\right\|_{H;I}$. Выберем произвольные $s,t\in I$, очевидно справедливо неравенство

$$|X_{s,t}-\widetilde{X}_{s,t}|=\left|\int_s^t f(X_\tau)dB_\tau-\int_s^t \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)dB_\tau\right|\le M_1+M_2, \tag{36}$$

где $M_1=\left|\int_s^t\left(f(X_\tau)-f(\widetilde{X}_\tau)\right)dB_\tau\right|$, $M_2=\left|\int_s^t\left(f(\widetilde{X}_\tau)-\widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)\right)dB_\tau\right|$.

Оценим M_1. Из предложения 4 следует, что

$$M_1\le\left|f(X_s)-f(\widetilde{X}_s)\right|\|B\|_H\,|t-s|^H+\left|(Df\cdot f)(X_s)-(Df\cdot\widetilde{f})(\widetilde{X}_s)\right|\|\mathbb{B}\|_{2H}\,|t-s|^{2H}+$$
$$+C\left(\|B\|_H\left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I}+\|\mathbb{B}\|_{2H}\left\|f(X)'-f(\widetilde{X})'\right\|_{H;I}\right)|t-s|^{3H}.$$

Введем обозначение: $c_{1,2}(K_1,K_2)=K_1\|B\|_H+K_2\|\mathbb{B}\|_{2H}$. Применяя лемму 2 к функциям f и $\widetilde{f}$, $Df\cdot f$ и $Df\cdot\widetilde{f}$, учитывая, $|I|\le 1$, из последнего неравенства легко вывести

$$\frac{|X_{s,t}-\widetilde{X}_{s,t}|}{|t-s|^H}\le c_0\left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2}+c_1\,|X_u-\widetilde{X}_u|+$$
$$+\widetilde{C}\left(\|B\|_H\left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I}+\|\mathbb{B}\|_{2H}\left\|f(X)'-f(\widetilde{X})'\right\|_{H;I}\right)|I|^{2H},$$

где $c_0=c_{1,2}\left(1,\|f\|_{C_b^3}\right)$, $c_1=c_{1,2}\left(C_{1;f},C_{1;Df\cdot f}\right)$, $\widetilde{C}=c_{1,2}\left(C_{2;f},C_{2;Df\cdot f}\right)+C$. Причем c_1, c_2 – случайные величины, зависящие только от H, $\|f\|_{C_b^3}$, $\|B\|_H$, $\|\mathbb{B}\|_{2H}$, но не зависящие от s, t, I.

Далее, применяя леммы 3, 4 к правой части последнего неравенства, с учетом $|I| \le 1$ получим

$$\frac{M_1}{|t-s|^H} \le c_2 \left\| f-\widetilde{f} \right\|_{C_b^2} + c_3 \,|\, X_u - \widetilde{X}_u \,| + c_4 \,|\, I \,|^H \left\| X-\widetilde{X} \right\|_{H;I},$$

где $c_2 = c_0 + \widetilde{C} \cdot c_{1,2}(C_5, C_3)$, $c_3 = c_1 + \widetilde{C} \cdot c_{1,2}(C_4, C_1)$, $c_4 = \widetilde{C} \cdot c_{1,2}(C_6, C_3)$. Причем c_3, c_4 – случайные величины, зависящие от H, $\|f\|_{C_b^3}$, $\|B\|_H$, $\|\mathbb{B}\|_{2H}$, но не зависящие от s, t, I. Из леммы 1 следует, что $\dfrac{M_2}{|t-s|^H} \le C_f \left\| f-\widetilde{f} \right\|_{C_b^2}$, а посему

$$\frac{|\, X_{s,t} - \widetilde{X}_{s,t} \,|}{|t-s|^H} \le c_3 \,|\, X_u - \widetilde{X}_u \,| + c_4 \,|\, I \,|^H \left\| X-\widetilde{X} \right\|_{H;I} + c_5 \left\| f-\widetilde{f} \right\|_{C_b^2},$$

где $c_5 = c_2 + C_f$. Последнее неравенство справедливо для любых $s, t \in I$, $s \ne t$, а значит,

$$\left\| X-\widetilde{X} \right\|_{H;I} \le c_3 \,|\, X_u - \widetilde{X}_u \,| + c_5 \left\| f-\widetilde{f} \right\|_{C_b^2} + c_4 \,|\, I \,|^H \left\| X-\widetilde{X} \right\|_{H;I}$$

для произвольного $|I| \in (0, 1]$. Теперь выберем $|I|$ таким, чтобы выполнялось соотношение

$$c_4 \,|\, I \,|^H \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\, I \,| \le (2c_4)^{-1/H} =: \delta_0.$$

Таким образом, для любого отрезка $I = [u, v] \subset [0,T]$ длины $|I| \le 1 \wedge T \wedge \delta_0$ справедливо неравенство

$$\left\| X-\widetilde{X} \right\|_{H;I} \le c \,|\, X_u - \widetilde{X}_u \,| + c_f \left\| f-\widetilde{f} \right\|_{C_b^2}, \tag{37}$$

где $c = 2c_3$, $c_f = 2c_5$. Если $1 \wedge T \wedge \delta_0 = T$, то $I = [0, T]$, и неравенство (37) доказывает требуемое. Поэтому пусть далее $T > 1 \wedge \delta_0 := \delta_1$.

Построим разбиение отрезка $[0, T]$ точками $t_j = (j \cdot \delta) \wedge T$, где $j = 0, 1, \ldots$. Заметим, что $t_N = T$ при $N \ge T / \delta_1$, а также, что отрезки $I_j = [t_j, t_{j+1}]$ имеют длины $|I_j| \le \delta_1$, $j = 0, 1, \ldots$. Поэтому из неравенства (37) следуют оценки

$$\left\| X-\widetilde{X} \right\|_{H;I_j} \le c \,|\, X_{t_j} - \widetilde{X}_{t_j} \,| + c_f \left\| f-\widetilde{f} \right\|_{C_b^2},$$

для $j < T / \delta_1$. Заметим, что

$$|\, X_{t_j} - \widetilde{X}_{t_j} \,| \le |\, X_{t_{j-1}} - \widetilde{X}_{t_{j-1}} \,| + \delta_1^H \left\| X-\widetilde{X} \right\|_{H;I_{j-1}} \le (1 + c\delta_1^H) \,|\, X_{t_{j-1}} - \widetilde{X}_{t_{j-1}} \,| + c_f \delta_1^H \left\| f-\widetilde{f} \right\|_{C_b^2}.$$

Из полученного рекуррентного соотношения очевидной индукцией выводим неравенство:

$$|\, X_{t_j} - \widetilde{X}_{t_j} \,| \le (1 + c\delta_1^H)^j \,|\, X_0 - \widetilde{X}_0 \,| + c_f \delta_1^H \left\| f-\widetilde{f} \right\|_{C_b^2} \sum_{k=0}^{j-1} (1 + c\delta_1^H)^k =$$

$$= (1 + c\delta_1^H)^j \,|\, \xi - \tilde{\xi} \,| + \frac{c_f}{c} \Big((1 + c\delta_1^H)^j - 1 \Big) \left\| f-\widetilde{f} \right\|_{C_b^2}$$

для $j < T / \delta_1$. Таким образом,

$$\left\| X-\widetilde{X} \right\|_{H;I_j} \le (1 + c\delta_1^H)^{T/\delta_1} \left(c \,|\, \xi - \tilde{\xi} \,| + c_f \left\| f-\widetilde{f} \right\|_{C_b^2} \right) \tag{38}$$

для любого $j = 0, 1, \ldots, [T / \delta_1]$.

Применяя предложение 1 с учетом неравенства (38) получим

$$\left\|X-\widetilde{X}\right\|_{H;\delta_1} \le 2^{1-H}(1+c\delta_1^H)^{T/\delta_1}\left(c\,|\,\xi-\tilde{\xi}\,|+c_f\left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2}\right).$$

Рассмотрим выражение $(1+c\delta_1^H)^{T/\delta_1}$, $\delta_1 = 1\wedge\delta_0$. Если $\delta_1 = 1$, то оно принимает значение $(1 + c)^T$. В противном случае $\delta_1 = \delta_0$, $\delta_0 = (2c_4)^{-1/H} < 1$, $2c_4 > 1$ и

$$(1+c\delta_0^H)^{\frac{T}{\delta_0}} = \left(1+\frac{c}{2c_4}\right)^{(2c_4)^H T} \le \left(1+\frac{c}{2c_4}\right)^{2c_4 T} = \left(\left(1+\frac{c}{2c_4}\right)^{2c_4/c}\right)^{cT} \le e^{cT},$$

поскольку функция $\varphi(x) = (1 + 1/x)^x$, $x > 0$ ограничена сверху числом e. Кроме того, $(1 + c)^T = \varphi(1/c) \le e^{cT}$. Поэтому $(1+c\delta_1^H)^{T/\delta_1} \le e^{cT}$ и

$$\left\|X-\widetilde{X}\right\|_{H;\delta_1} \le 2^{1-H}e^{cT}\left(c\,|\,\xi-\tilde{\xi}\,|+c_f\left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2}\right).$$

Теперь из предложения 1 и последнего неравенства получем оценку требуемого вида:

$$\left\|X-\widetilde{X}\right\|_{H} \le 2^{2-H}e^{2c_3T}\left(1\vee 2T^{1-H}\vee 2(2c_4)^{\frac{1-H}{H}}T^{1-H}\right)(c_3\vee c_5)\left(|\,\xi-\tilde{\xi}\,|+\left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2}\right). \tag{39}$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 5. Нетрудно видеть, что в приведенном доказательстве не использовалось никаких других свойств дробного броуновского движения $(B_t)_{t\in[0,T]}$, кроме свойства непрерывности траекторий по Гельдеру с показателем H. Это означает, что теорема справедлива для произвольных гельдеровских функций $B\in C^H([0,T],\mathbb{R}^{d+1})$.

З а м е ч а н и е 6. Рассмотрим зависимость случайных величин c_3, c_4, c_5, фигурирующих в равенстве (39) от $\|B\|_H$, $\|\mathbb{B}\|_{2H}$ при фиксированных $T, H, \|f\|_{C_b^3}$. Из доказательства теоремы следует, что эта зависимость выражается в виде композиции конечного числа функций $\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(u,v)=\alpha u+\beta v+\gamma$, $\Pi(u,v)=u\cdot v$, $\vee(u,v)=u\vee v$, $\psi_s(u)=u^s$ ($\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $s\in\mathbb{R}^+$ – параметры) вещественных аргументов $u,v\in\mathbb{R}^+$.

Следующая теорема, устанавливающая непрерывную зависимость в среднем, является основным результатом представленной работы.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $f,\widetilde{f}\in C_b^3(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, *причем функция* $\widetilde{f}$ *такова, что* $\left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2}\le 1$. *Тогда для решений* X_t, $\widetilde{X}_t$ *уравнений* (1), (2) *с начальными условиями* $X_0 = \xi$, $\widetilde{X}_0=\tilde{\xi}$ *соответственно имеет место следующее неравенство:*

$$\mathbb{E}\left(\ln\left\|X-\widetilde{X}\right\|_H\right)\le C+\ln\left(\mathbb{E}\,|\,\xi-\tilde{\xi}\,|+\left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2}\right),$$

где $C=C\left(H,H_1,\ldots,H_d,T,\|f\|_{C_b^3}\right)\in\mathbb{R}$ *– константа, вообще говоря, зависящая от* H, $H_1,\ldots,H_d$, T, $\|f\|_{C_b^3}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим логарифм к обеим частям неравенства (39). Учитывая, что $x\vee y\le x+y$ для $x,y>0$, будем иметь

$$\ln\left\|X-\widetilde{X}\right\|_H \le \mu+2c_3T+\ln(c_3+c_5)+\ln\left(1+2T^{1-H}+2(2c_4)^{(1-H)/H}T^{1-H}\right)+\ln\left(|\,\xi-\tilde{\xi}\,|+\left\|f-\widetilde{f}\right\|_{C_b^2}\right),$$

где $\mu = (2 - H)\ln 2$. Возьмем математическое ожидание от обеих частей последнего неравенства. Ввиду вогнутости логарифма и неравенства Иенсена $\mathbb{E}(\ln\eta)\le\ln(\mathbb{E}\eta)$ для любой случайной величины η. С учетом этого выводим неравенство

$$\mathbb{E}\left(\ln\left\|X-\widetilde{X}\right\|_H\right) \le \mu + 2T\mathbb{E}c_3 + \ln(\mathbb{E}c_3 + \mathbb{E}c_5) + \ln\left(1 + 2T^{1-H} + T^{1-H}2^{1/H}\mathbb{E}\left(c_4^{(1-H)/H}\right)\right) +$$
$$+\ln\left(|\xi - \tilde{\xi}| + \left\|f - \widetilde{f}\right\|_{C_b^2}\right).$$

Таким образом, осталось доказать, что $\mathbb{E}c_3 < \infty$, $\mathbb{E}c_5 < \infty$, $\mathbb{E}\left(c_4^{(1-H)/H}\right) < \infty$. Однако мы установим даже большее: для любого $r > 0$ конечны моменты $\mathbb{E}c_j^r = \mathbb{E}c_j^r\left(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}\right)$, $j = 3, 4, 5$.

Воспользуемся замечанием 6: зависимость $c_j^r = c_j^r\left(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}\right)$, $j = 3, 4, 5$, от норм $\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}$ выражается в виде композиции конечного числа функций $\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(u,v)$, $\Pi(u,v)$, $\vee(u,v)$, $\psi_s(u)$. Но очевидно, что $\vee(u,v) = u \vee v \le u + v = \Sigma_{1,1,0}(u,v)$ для $u, v \in \mathbb{R}^+$. Также понятно, что для $u = u\left(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}\right) \in \mathbb{R}^+, v = v\left(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}\right) \in \mathbb{R}^+$ справедливы соотношения

$$\mathbb{E}\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(u,v) = \alpha\mathbb{E}u + \beta\mathbb{E}v + \gamma, \quad \mathbb{E}(u \vee v) \le \mathbb{E}u + \mathbb{E}v, \quad \mathbb{E}\Pi(u,v) \le (\mathbb{E}u^2)^{1/2}(\mathbb{E}v^2)^{1/2}.$$

Значит, конечность указанных математических ожиданий от функций $\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}$, Π, $\vee$ будет обеспечена конечностью моментов их аргументов. Осталось рассмотреть функцию $\psi_s(u) = u^s$.

Если s ∈ (0, 1], то из неравенства Иенсена следует оценка $\mathbb{E}\psi_s(u) \le \psi_s(\mathbb{E}u) = (\mathbb{E}u)^s$. Если же $s \in (1, \infty)$, то справедливы соотношения

$$\mathbb{E}\psi_s\left(\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(u,v)\right) = \mathbb{E}(\alpha u + \beta v + \gamma)^s \le 3^{s-1}(\alpha^s\mathbb{E}u^s + \beta^s\mathbb{E}v^s + \gamma^s),$$
$$\mathbb{E}\psi_s(u \vee v) \le \mathbb{E}(u+v)^s \le 2^{s-1}(\mathbb{E}u^s + \mathbb{E}v^s), \quad \mathbb{E}\psi_s(uv) = \mathbb{E}u^s v^s \le (\mathbb{E}u^{2s})^{1/2}(\mathbb{E}v^{2s})^{1/2}.$$

В то же время, как следует из [3, лемма 7.4], любой s-момент, $s \ge 1$ случайной величины $\|B\|_H$ (а значит, и любой s-момент, $s > 0$ ввиду неравенства Иенсена) конечен, т. е. $\mathbb{E}\psi_s\left(\|B\|_H\right) = \mathbb{E}\|B\|_H^s < \infty$, $s > 0$. То же самое справедливо для случайной величины $\|\mathbb{B}\|_{2H}$ (см. замечание 3): $\mathbb{E}\psi_s\left(\|\mathbb{B}\|_{2H}\right) = \mathbb{E}\|\mathbb{B}\|_{2H}^s < \infty$, $s > 0$.

Из полученных соотношений следует, что композиция конечного числа указанных функций с нормами $\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}$ в качестве аргументов будет иметь конечное математическое ожидание и, в частности, $\mathbb{E}c_j^r\left(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}\right) < \infty$, $j = 3, 4, 5$, для любого $r > 0$. Теорема доказана.

Благодарности. Автор выражает благодарность М. М. Васьковскому за постановку задачи и внимание, проявленное к работе.

Acknowledgements. The author is grateful to M. Vaskouski for the statement of the problem and attention shown to the work.

Список использованных источников

1. Gubinelli, M. Controlling rough paths / M. Gubinelli // J. Functional Analysis. – 2004. – Vol. 216, № 1. – P. 86–140. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2004.01.002

2. Friz, P. A Course on Rough Paths with an Introduction to Regularity Structures / P. Friz, M. Hairer. – Cham, Springer International Publishing Switzerland, 2014. – 263 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-08332-2

3. Nualart, D. Differential equations driven by fractional Brownian motion / D. Nualart, A. Rascanu // Collectanea Mathematica. – 2002. – Vol. 53, № 1. – P. 55–81.

4. Zahle, M. Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. I / Zahle, M. // Probability Theory and Related Fields. – 1998. – Vol. 111, № 3. – P. 333–374. https://doi.org/10.1007/s004400050171

5. Васьковский, М. М. Устойчивость и притяжение решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями / М. М. Васьковский // Дифференц. уравнения. – 2017. – № 2. – С. 160–173.

6. Garrido-Atienza, M. J. Asymptotical stability of differential equations driven by Hölder-continuous paths // M. J. Garrido-Atienza, A. Neuenkirch, B. Schmalfuss // J. Dynamics and Differential Equations. – 2017. – Vol. 30, № 1. – P. 359–377. https://doi.org/10.1007/s10884-017-9574-6

7. Large Deviations and Asymptotic Maethods in Finance / P. Friz Cham [et al.]. – Springer International Publishing Switzerland, 2015. – 590 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-11605-1

References

1. Gubinelli M. Controlling rough paths. *Journal of Functional Analysis*, 2004, vol. 216, no. 1, pp. 86–140. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2004.01.002

2. Friz P., Hairer M. *A Course on Rough Paths with an introduction to regularity structures*. Cham, Springer International Publishing Switzerland, 2014. 263 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-08332-2

3. Nualart D., Rascanu A. Differential equations driven by fractional Brownian motion. *Collectanea Mathematica*, 2002, vol. 53, no. 1, pp. 55–81.

4. Zahle M. Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. I. *Probability Theory and Related Fields*, 1998, vol. 111, no. 3. pp. 333–374. https://doi.org/10.1007/s004400050171

5. Vas'kovskii M. M. Stability and attraction of solutions of nonlinear stochastic differential equations with standard and fractional Brownian motions. *Differential equations*, 2017, vol. 53, no. 2, pp. 157–170. https://doi.org/10.1134/s0012266117020021

6. Garrido-Atienza M. J., Neuenkirch A., Schmalfuss B. Asymptotical stability of differential equations driven by Hölder-continuous paths. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2017, vol. 30, no. 1, pp. 359–377. https://doi.org/10.1007/s10884-017-9574-6

7. Friz P., Gatheral J., Gulisashvili A., Jacquier A., Teichmann J. *Large Deviations and Asymptotic Maethods in Finance*. Cham, Springer International Publishing Switzerland, 2015. 590 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-11605-1

Информация об авторе

Качан Илья Вадимович – магистрант, ассистент кафедры высшей математики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ilyakachan@gmail.com

Information about the author

Ilya V. Kachan – Undergraduate, Assistant of the Department of Higher Mathematics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ilyakachan@gmail.com