УДК 517.977

В. Е. ХАРТОВСКИЙ, О. И. УРБАН

УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ АВТОНОМНЫМИ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ ПОСРЕДСТВОМ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕГУЛЯТОРОВ

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

(*Поступила в редакцию 05.07.2013*)

Введение. Задача конструирования регуляторов, основанных на принципе обратной связи и обеспечивающих системе управления заданные свойства, занимает одно из центральных мест в теории автоматического регулирования. В настоящей работе предлагается новый тип регулятора с обратной связью – линейный динамический дифференциально-разностный регулятор. Эффективность применения такого типа регулятора рассматривается на примере задачи успокоения решения линейной автономной регулярной алгебро-дифференциальной системы с соизмеримыми запаздываниями в управлении (которую для краткости назовем системой Σ)

$$\frac{d}{dt}\big(A_0x(t)\big) = Ax(t) + \sum_{i=0}^{m} B_i u(t-ih),\ t \ge 0, \tag{1}$$

$$C_0A_0x(0) = C_0A_0q,\ u(t) \equiv 0,\ t < 0, \tag{2}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^k$ – действительное пространство k-векторов-столбцов); $u \in \mathbb{R}^r$ – управляющее воздействие (управление); $A_0,\ A,\ B_i,\ i=\overline{0,m}$ – постоянные матрицы соответствующих размеров; h – постоянное запаздывание; $C_i,\ i = 0,\ 1,\ \ldots,$ – базовые матрицы [1, с. 26–28]. Предполагается, что пара матриц $\big(A_0,\ A\big)$ регулярная, т. е. существует такое число $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$– множество комплексных чисел), для которого $\det(A - \alpha A_0) \ne 0$ [1, с. 10]. В качестве допустимых управлений будем использовать кусочно-непрерывные функции $u(t),\ t \ge 0$, такие, что решение $x(t),\ t \ge 0$, непрерывная, а $A_0x(t),\ t \ge 0$, – дифференцируемая функции.

Под задачей успокоения решения системы Σ будем понимать задачу выбора управления $u(t)$, $t \ge 0$, обеспечивающего

$$x(t) \equiv 0,\ t \ge t_1, \tag{3}$$

где $t_1 > 0$ – некоторый фиксированный момент времени. Цель работы – получить условия существования и указать способ построения линейного дифференциально-разностного регулятора, обеспечивающего решению замкнутой системы Σ равенство (3), каково бы ни было начальное состояние (2).

З а м е ч а н и е 1. В [2] обоснована целесообразность выбора в контексте данной работы начального состояния в виде (2). При этом существует единственное решение системы Σ [1, с. 45].

З а м е ч а н и е 2. Если для любого начального состояния (2) существуют момент времени $t_1 > 0$ и допустимое управление $u(t),\ [0, t_1]$, обеспечивающее (3) при условии $u(t) \equiv 0,\ t > t_1$, то система Σ называется [2, 3] полностью управляемой.

Обозначим $W\big(\lambda\big) = \lambda A_0 - A,\ B_A = \sum_{i=0}^{m} e^{-C_0Aih} B_i$. Для обыкновенных систем без запаздывания ($A_0 = E_n,\ E_k$ – единичная матрица порядка $k,\ B_i = 0,\ i = \overline{1,m}$), обладающих свойством полной управляемости, т. е. [3, с. 46]

$$\operatorname{rank}\big[W\big(\lambda\big),\ B_0\big] = n\ \ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \tag{4}$$

управление вида $u(t)=K(t)x(t)$, обеспечивающее (3), построить несложно. Однако в [3, с. 61; 4] отмечено, что таким управлением редко пользуются на практике, так как $K(t)\to\infty$ при $t\to t_1$. Поэтому в [4] для обыкновенных систем без запаздывания предложен линейный автономный регулятор с запаздыванием, обеспечивающий помимо (3) еще и асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Основная идея [4] заключается в замыкании исходной системы без запаздывания регулятором с запаздыванием таким образом, чтобы замкнутая система стала точечно вырожденной в направлениях, отвечающих фазовым переменным исходной системы. Указанный регулятор в [4] строится при следующих условиях: а) управление u –скалярная функция; б) выполняется условие (4). Естественно, что перенести эти результаты на случай векторного управления без запаздывания при условии (4) несложно, поскольку можно воспользоваться известной леммой Уонема [5, 6].

По аналогии с [2] можно показать, что критерий полной управляемости системы Σ имеет вид

$$\operatorname{rank}\left[W(\lambda),\ B_A\right]=n\ \ \forall\lambda\in\mathbb{C}. \tag{5}$$

Однако условия (5) в общем случае системы Σ не достаточно для соответствующего обобщения указанной леммы Уонема даже при $A_0=E_n$. Регулятор нового типа, предложенный в настоящей работе, обеспечивает (3) даже в случае нарушения условия (5), т. е. в случае системы, не обладающей свойством полной управляемости. Полученный критерий существования такого регулятора налагает более слабые условия на параметры исходной системы, что позволяет существенно расширить спектр его практического применения. В идейном плане представленная работа продолжает исследования алгебро-дифференциальных систем [2, 7] и систем нейтрального типа [8, 9], не обладающих свойством полной управляемости. Однако работы [2, 7–9], в отличие от настоящей, рассматривают вопрос существования только программных управлений, т. е. управлений вида $u=u(t)$. Также обратим внимание, что существует большое количество работ, посвященных построению регуляторов по принципу обратной связи в задачах управления спектром системы [10], однако к настоящей работе они имеют лишь косвенное отношение и поэтому их обсуждение не приводится.

1. Вспомогательные результаты. Пусть последовательность векторов δ_k, $k=m,\ m+1,\ \ldots$ суть решение дискретного уравнения $\sum_{i=0}^{m}B_i\delta_{k-i}=0,\ k=m,\ m+1,\ \ldots$, порождаемого начальным условием $\delta_i=\tilde{\delta}_i$, $i=\overline{0,m-1}$. Последовательность δ_k, $k=m,\ m+1,\ \ldots$ существует в том и только в том случае [7, 9], когда $\tilde{\delta}_{m-i}=T_ic$, $i=\overline{1,m}$, где T_i – некоторые матрицы размера $r\times r_T$ (в работах [7, 9] приведен способ их построения). Найдем произвольную квадратную матрицу S, удовлетворяющую равенствам $B_0T_1S+\sum_{i=1}^{m}B_iT_i=0,\ T_kS=T_{k-1},\ k=\overline{2,m}$. Тогда будет выполняться $\left(T_m=T\right)$

$$\sum_{i=0}^{m}B_iTS^{m-i}=0. \tag{6}$$

Образуем матрицы $\tilde{B}_i=\left[B_i,\ \sum_{k=0}^{i}B_kTS^{i-k}\right]$, $i=\overline{0,m}$, размера $n\times(r+r_T)$. Заметим, что $\tilde{B}_m=\left[B_m,\ 0\right]$. Системе Σ поставим в соответствие систему $\tilde{\Sigma}$:

$$\frac{d}{dt}\left(A_0\tilde{x}(t)\right)=A\tilde{x}(t)+\sum_{i=0}^{m}\tilde{B}_iw(t-ih),\ t\geq 0, \tag{7}$$

с начальным условием

$$C_0A_0\tilde{x}(0)=C_0A_0\tilde{q},\ w(t)\equiv 0,\ t<0. \tag{8}$$

Пусть $w=\operatorname{col}\left[w^1,\ w^2\right],\ w^1\in\mathbb{R}^r,\ w^2\in\mathbb{R}^{r_T}$.

Л е м м а 1. *Пусть* $C_0A_0\tilde{q}=C_0A_0q,\ u(t)=w^1(t)+T\psi(t),\ t\geq 0,$ *а функция* ψ *удовлетворяет уравнению* $\psi(t)=S\psi(t-h)+w^2(t),\ t\geq 0,\ \ \psi(t)\equiv 0,\ t<0.$ *Тогда, если решения систем* Σ *и* $\tilde{\Sigma}$ *существуют, то* $x(t)=\tilde{x}(t),\ t\geq 0.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что неоднородные части уравнений (1) и (7) при выполнении условий леммы 1 совпадают. При $t < mh$ это проверяется непосредственно.

Пусть $t \ge mh$. Из определения функции ψ заключаем, что она удовлетворяет уравнению $\psi(t) = S^k\psi(t-kh) + \sum_{j=0}^{k-1} S^j w^2(t-jh),\ k = 1,2,...,\ t \ge (k-1)h$. Используя это соотношение и формулу (6), имеем следующую цепочку равенств:

$$\sum_{i=0}^{m} B_i u(t-ih) = \sum_{i=0}^{m} B_i \left(w^1(t-ih) + T\psi(t-ih)\right) = \sum_{i=0}^{m} B_i w^1(t-ih) +$$

$$+\sum_{i=0}^{m-1} B_i T\left(S^{m-i}\psi(t-mh) + \sum_{j=0}^{m-i-1} S^j w^2(t-(j+i)h)\right) + B_m T\psi(t-mh) = \sum_{i=0}^{m} B_i w^1(t-ih) +$$

$$+\sum_{i=0}^{m-1} B_i T \sum_{j=0}^{m-i-1} S^j w^2(t-(j+i)h) = \sum_{i=0}^{m} \tilde{B}_i w(t-ih),\ t \ge mh.$$

Лемма доказана.

2. Основной результат. Так как пара матриц $(A_0,\ A)$ регулярная, то найдутся такие неособые матрицы P и Q, что справедливо каноническое представление матриц $A_0,\ A$ [1, с. 25]: $A_0 = P\tilde{A}_0 Q$, $A = P\tilde{A}Q$, где $\tilde{A}_0 = \operatorname{diag}\left[M,\ E_{n_2},\ S\right]$, $\tilde{A} = \operatorname{diag}\left[E_{n_1},\ R,\ E_{n_3}\right]$; $M,\ R$ – нильпотентные матрицы размеров $n_1 \times n_1,\ n_2 \times n_2$ соответственно; S – неособая матрица размера $n_3 \times n_3$ $(n_1 + n_2 + n_3 = n)$. В общем случае некоторые из соответствующих пар матриц в указанном каноническом представлении могут отсутствовать, однако это не нарушает общности рассуждений. Пусть k_M – индекс нильпотентности матрицы M $(M^{k_M} = 0)$, $Q = \operatorname{col}[Q_1, Q_2]$, $Q_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n}$, $Q_2 \in \mathbb{R}^{(n_2+n_3)\times n}$. В силу (2) и [1, с. 26] имеем $Q_2 x(0) = Q_2 q$.

Регулятор, обеспечивающий решению системы Σ равенство (3), будем строить в виде

$$\begin{cases} u(t) = w^1(t) + T\psi(t),\ t \ge 0, & (9.а)\\ \psi(t) = S\psi(t-h) + w^2(t),\ t \ge 0, & (9.б)\\ \begin{bmatrix} w^1(t) \\ w^2(t)\end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{s} L_i \begin{bmatrix} z(t-ih) \\ y(t-ih)\end{bmatrix},\ t \ge 0, & (9.в)\\ \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} z(t) \\ y(t)\end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{s} M_i \begin{bmatrix} z(t-ih) \\ y(t-ih)\end{bmatrix},\ t \ge 0, & (9.г)\end{cases}$$

где $z \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}$; $y \in \mathbb{R}$ – решение уравнения (9.г); s – натуральное число; $L_i,\ M_i,\ i = \overline{0, s}$ – некоторые постоянные матрицы соответствующих размеров. Пусть $\tilde{C}^k(q),\ k = 1,2...$ – класс функций $\varphi = \operatorname{col}[\varphi^1, \varphi^2]$ $(\varphi^1 \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}, \varphi^2 \in \mathbb{R})$, определенных на отрезке $[-sh, 0]$, k–1 раз непрерывно дифференцируемых и удовлетворяющих граничным условиям $\dfrac{d^{j+1}}{dt^{j+1}}\begin{bmatrix}\varphi^1(0)\\ \varphi^2(0)\end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{s} M_i \dfrac{d^j}{dt^j}\begin{bmatrix}\varphi^1(-ih)\\ \varphi^2(-ih)\end{bmatrix}$, $j = \overline{0, k-1}$, $\varphi^1(0) = Q_2 q$. В качестве начальных условий для регулятора (9.а)–(9.г) возьмем следующий набор данных: $w^1(t) \equiv 0,\ w^2(t) \equiv 0, \psi(t) \equiv 0,\ t < 0, \operatorname{col}[z(t), y(t)] = \varphi(t), t \in [-sh, 0], \varphi \in \tilde{C}^{k_M - 1}(q)$. Регулятор (9.а)–(9.г) будем называть линейным динамическим дифференциально-разностным регулятором.

Обозначим $\tilde{B}_A = \sum_{i=0}^{m-1} e^{-C_0 Aih} \sum_{k=0}^{i} B_k T S^{i-k}$.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы для любого начального состояния* (2) *системы* Σ *существовало управление* $u(t),\ t \ge 0$, *обеспечивающее* (3), *необходимо и достаточно чтобы*

$$\operatorname{rank}\left[W(\lambda),\ B_A,\ \tilde{B}_A\right] = n\ \forall \lambda \in \mathbb{C}. \qquad (10)$$

При этом если имеет место (10), *то управление* $u(t),\ t \ge 0$, *всегда можно построить в виде регулятора* (9.а)–(9.г).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условия (10) доказывается так же, как это сделано в [2, 7].

Д о с т а т о ч н о с т ь. Рассмотрим систему $\tilde{\Sigma}$. Пусть $C_0 A_0 \tilde{q} = C_0 A_0 q$. Воспользуемся описанным выше каноническим представлением матриц A_0, A. Положим $\tilde{x}_Q = Q\tilde{x}$, $\tilde{x}_Q = \mathrm{col}\left[\tilde{x}^1_Q,\ \tilde{x}^2_Q\right]$, $\tilde{x}^1_Q \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\tilde{x}^2_Q \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}$, $P^{-1}\tilde{B}_i = \mathrm{col}\left[\overline{B}_i,\ \overline{\overline{B}}_i\right]$, $\overline{B}_i - n_1 \times (r + r_T)$ – матрица, $\overline{\overline{B}}_i - (n_2 + n_3)\times(r + r_T)$ – матрица, $\hat{B}_i = \mathrm{diag}[E_{n_2}, S^{-1}]\overline{\overline{B}}_i$, $D = \mathrm{diag}\left[R,\ S^{-1}\right]$. Тогда функции $\tilde{x}^1_Q$ и $\tilde{x}^2_Q$ удовлетворяют следующим системам:

$$\frac{d}{dt}\left(M\tilde{x}^1_Q(t)\right) = \tilde{x}^1_Q(t) + \sum_{i=0}^{m} \overline{B}_i w(t - ih),\ t \ge 0, \tag{11}$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}^2_Q(t) = D\tilde{x}^2_Q(t) + \sum\limits_{i=0}^{m} \hat{B}_i w(t - ih),\ t \ge 0, \\ \tilde{x}^2_Q(0) = \tilde{q}_Q, \end{cases} \tag{12}$$

вектор $\tilde{q}_Q = Q_2 q$, что следует из (8). Решение уравнения (11) определяется [1, с. 27; 2] формулой, не зависящей от начального состояния:

$$\tilde{x}^1_Q(t) = -\sum_{j=0}^{k_M - 1} \frac{d^j}{dt^j} M^j \left(\sum_{i=0}^{m} \overline{B}_i w(t - ih) \right),\ t \ge 0. \tag{13}$$

В (13) предполагаем, что функция w $(k_M - 1)$ раз непрерывно дифференцируема.

Рассмотрим систему (12). Введем функцию $z(t)$, $t \ge 0$, соотношением

$$z(t) = \tilde{x}^2_Q(t) + \sum_{i=1}^{m} \int_0^{ih} e^{D(s - ih)} \hat{B}_i w(t - s) ds,\ t \ge 0. \tag{14}$$

В силу (12), (8) эта функция $z(t)$, $t \ge 0$, удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Dz(t) + \left(\sum\limits_{i=0}^{m} e^{-Dih} \hat{B}_i \right) w(t),\ t \ge 0, \\ z(0) = \tilde{q}_Q. \end{cases} \tag{15}$$

Из (10) следует, что $\mathrm{rank}\left[\lambda E_{n_2+n_3} - D,\ \sum\limits_{i=0}^{m} e^{-Dih}\hat{B}_i\right] = n_2 + n_3\ \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$, а это равносильно равенству $\mathrm{rank}\ D_B = n_2 + n_3$, где матрица $D_B = \left[\sum\limits_{i=0}^{m} e^{-Dih}\hat{B}_i,\ \ldots,\ D^{n_2+n_3-1}\sum\limits_{i=0}^{m} e^{-Dih}\hat{B}_i\right]$. Выберем в матрице D_B $n_2 + n_3$ линейно независимых столбца. Для определенности будем считать, что это столбцы $\hat{b}_1, \ldots, D^{\upsilon_1 - 1}\hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_k, \ldots, D^{\upsilon_k - 1}\hat{b}_k$, где $\hat{b}_i$ – i-й столбец матрицы $\sum\limits_{i=0}^{m} e^{-Dih}\hat{B}_i$, $\upsilon_1 + \ldots + \upsilon_k = n_2 + n_3$. Введем матрицы $\tilde{D}_B = [\hat{b}_1, \ldots, D^{\upsilon_1 - 1}\hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_k, \ldots, D^{\upsilon_k - 1}\hat{b}_k]$, $\tilde{E} = [0, \ldots, 0, -e_2, 0, \ldots, 0, -e_k, 0, \ldots, 0]$, где e_i – i-й столбец единичной матрицы E_{r+r_T}, столбец $-e_2$ расположен на (υ_1)-м месте матрицы $\tilde{E}$, ..., $-e_k$ – на $(\upsilon_1 + \ldots + \upsilon_{k-1})$-м месте матрицы $\tilde{E}$. Положим $K = \tilde{E}\tilde{D}_B^{-1}$.

Определим функцию $w(t)$, $t \ge 0$, равенством

$$w(t) = -Kz(t) + e_1 v(t),\ t \ge 0, \tag{16}$$

где $v(t)$, $t \ge 0$ – некоторая скалярная функция. Подставляя функцию w, определяемую формулой (16), в систему (15), перепишем (15) в виде

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \overline{D}z(t) + \hat{b}_1 v(t),\ t \ge 0, \\ z(0) = \tilde{q}_Q, \end{cases} \tag{17}$$

где $\overline{D} = D - \left(\sum\limits_{i=0}^{m} e^{-Dih}\hat{B}_i \right) K$. Заметим, что [6, с. 222]

$$\mathrm{rank}\ [\hat{b}_1,\ \ldots,\ \overline{D}^{n_2+n_3-1}\hat{b}_1] = n_2 + n_3. \tag{18}$$

Систему (17) замкнем регулятором вида

$$v(t)=\sum_{i=0}^{s}G_i\begin{bmatrix}z(t-ih)\\ y(t-ih)\end{bmatrix},\ t\ge 0,$$
$$\dot{y}\left(t\right)=\sum_{i=0}^{s}C_i\begin{bmatrix}z(t-ih)\\ y(t-ih)\end{bmatrix},\ t\ge 0, \tag{19}$$

где $y\in\mathbb{R}$, G_i, C_i – постоянные матрицы соответствующих размеров. В результате замыкания системы (17) регулятором (19) получим систему

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}z(t)\\ y(t)\end{bmatrix}=\sum_{i=0}^{s}R_i\begin{bmatrix}z\left(t-ih\right)\\ y\left(t-ih\right)\end{bmatrix},\ t\ge 0, \tag{20}$$

где $R_i=\begin{bmatrix}D_i+\hat{b}_1g_i^1 & \hat{b}_1g_i^2\\ c_i^1 & c_i^2\end{bmatrix}$, $D_0=\bar{D},\ D_j=0,\ j=\overline{1,s},\quad G_i=\left[g_i^1,\ g_i^2\right],\quad C_i=\left[c_i^1,\ c_i^2\right],\quad g_i^1,\ c_i^1$ – $1\times\left(n_2+n_3\right)$ матрицы, $g_i^2,\ c_i^2\in\mathbb{R}$. Матрицы $G_i,\ C_i$ в (19) выберем таким образом, чтобы система (20) стала точечно вырожденной [4] в направлениях, отвечающих фазовым переменным исходной системы (17), т. е. компонентам вектора z. Существование матриц $G_i,\ C_i$ следует из условия (18) [4], а процедура их построения описана в [4].

Итак, в силу выбора матриц $G_i,\ C_i$ найдется момент времени $\tilde{t}_1$ такой, что $z(t)\equiv 0,\ t\ge\tilde{t}_1$, при любом начальном состоянии $\tilde{q}_Q$. Из (17) следует, что $v(t)\equiv 0$, $t\ge\tilde{t}_1$, поэтому в силу (16), (13), (14) имеем равенство $\tilde{x}_Q(t)\equiv 0,\ t\ge\tilde{t}_1+mh$. Таким ообразом, функция w, определяемая (16), (19), обеспечивает решению системы $\tilde{\Sigma}$ равенство $\tilde{x}(t)\equiv 0,\ t\ge t_1=\tilde{t}_1+mh$.

Положим в (9.в) и (9.г) $L_i=e_1G_i,\ i=\overline{1,s},\ L_0=e_1G_0+\left[-K,\ 0\right],\ M_i=R_i,\ i=\overline{0,\ m}$. На основании леммы 1 можно утверждать, что регулятор (9.а)–(9.в) обеспечивает решению системы Σ равенство (3) при $t\ge t_1=\tilde{t}_1+mh$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. Из общей теории линейных автономных систем запаздывающего типа [11, с. 200] следует, что их решение с течением времени сглаживается. Соответственно тем же свойством будет обладать решение x системы Σ при любом выборе начального условия $z(t)$, $y(t)$, $t\in[-sh,0]$, для регулятора (9.а)–(9.г). Выбор функции $\varphi\in\tilde{C}^{k_M-1}(q)$ обеспечит непрерывность решению x системы Σ и дифференцируемость функции A_0x. Однако, если взять в качестве начального условия любую функцию φ класса $\tilde{C}^k(\tilde{q}_Q)$ $(k\ge k_M-1)$, то, как следует из (12), (13) и [11, с. 200], решение системы Σ будет $k-k_M+1$ раз непрерывно дифференцируемым при $t\ge 0$. Иными словами, можно обеспечить решению замкнутой системы Σ любую наперед заданную степень гладкости.

З а м е ч а н и е 4. При выборе матриц $G_i,\ C_i$, обеспечивающих системе (20) вырожденность ее первых n_2+n_3 компонент, можно [4] попутно обеспечить ее асимптотическую устойчивость. Это в силу (13), (14), (16) и леммы 1 обеспечит асимптотическую устойчивость системы Σ, замкнутой построенным регулятором.

В регуляторе (9.а)–(9.г) управление u формируется посредством алгебраических преобразований (9.а)–(9.в) решения уравнения (9.г). В то же время решение (9.г) связано с решением системы Σ соотношением (14) и леммой 1. Это позволяет преобразовать уравнение (9.г), добавив в него обратную связь в виде неоднородной части. Для этого в формуле (9.г) положим $M_i=\mathrm{col}[M_i^1,M_i^2]$, где $M_i^1\in\mathbb{R}^{(n_2+n_3)\times(n_2+n_3+1)}$, $M_i^2\in\mathbb{R}^{1\times(n_2+n_3+1)}$. Введем линейный динамический дифференциально-разностный регулятор с обратной связью формулами (9.а)–(9.в) и следующими соотношениями:

$$\frac{d}{dt}z(t)=Dz(t)+\left(\sum_{i=1}^{m}e^{-Dih}\hat{B}_i\right)w(t)-\sum_{i=1}^{m}\hat{B}_iw(t-ih)+\frac{d}{dt}(Q_2x(t))-DQ_2x(t),$$
$$\frac{d}{dt}y(t)=\sum_{i=0}^{s}M_i^2\begin{bmatrix}z(t-ih)\\ y(t-ih)\end{bmatrix},\ t\ge 0. \tag{21}$$

Начальные условия для регулятора (9.а)–(9.в), (21) определим так же, как и для регулятора (9.а)–(9.г), а дифференцируемость функции $Q_2x(t)$, $t\ge 0$, следует из (12) и леммы 1.

Т е о р е м а 2. *Если выполняется условие* (10), *то существует линейный динамический дифференциально-разностный регулятор с обратной связью* (9.а)–(9.в), (21), *обеспечивающий решению замкнутой системы* Σ *равенство* (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие (10) обеспечивает существование регулятора (9.а)–(9.г). При этом решения систем (12) и (15) связаны равенством (13) или, что то же самое, $\frac{d}{dt}z(t) = Dz(t) + (\sum_{i=1}^{m} e^{-Dih}\hat{B}_i)w(t) - \sum_{i=1}^{m}\hat{B}_i w(t-ih) + \frac{d}{dt}\tilde{x}_Q^2(t) - D\tilde{x}_Q^2(t),\ t \ge 0,\ \tilde{x}_Q^2(0) = z(0).$ В этих соотношениях выразим решение $\tilde{x}_Q^2$ системы (12) через решение $\tilde{x}$ системы $\tilde{\Sigma}$. Далее учтем, что в силу (9.а), (9.б) и леммы 1 выполняется $x(t) = \tilde{x}(t),\ t \ge 0$. Поэтому решения уравнения (9.г) и системы (21), (9.в) совпадают. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 5. Если решение x системы Σ в каждый момент времени t доступно наблюдению, то, используя начальные условия для регулятора и (9.в), из (21) по шагам определяется z и y, после чего по формулам (9.а) и (9.б) формируется управление.

3. Обсуждение результатов. П р и м е р. Предложен новый тип регулятора, обеспечивающего равенство (3) и асимптотическую устойчивость решению замкнутой системы. Особенностью предложенного регулятора является возможность его реализации в двух формах: в форме (9.а)–(9.г) или в форме (9.а)–(9.в), (21). При этом в обоих случаях система Σ, замкнутая соответствующим регулятором, будет линейной автономной алгебро-дифференциальной системой с соизмеримыми запаздываниями. Возможность применения регулятора такого типа к системам, не обладающим свойством полной управляемости, основана на использовании эффекта последействия в управлении. Заметим, что если в некоторый момент времени $t^* > t_1$ «выключить» регулятор, т. е. положить $u(t) \equiv 0,\ t > t^*$, то в общем случае равенство (3) при $t > t^*$ выполняться не будет.

В заключение приведем пример регулятора (9.а)–(9.г) для системы Σ с матрицами $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$ и $h = \ln(2)$. В данном случае $C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ S = 1,$ условие (5) нарушается (4-е уравнение рассматриваемой системы заведомо не является полностью управляемым), но условие (10) выполнено. Используя доказательство достаточности условия теоремы 1, строим регулятор (9.а)–(9.г). Подробные выкладки построения регулятора не являются принципиально сложными и в силу их громоздкости не приводятся. Окончательный результат имеет вид

$$u(t) = w^1(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\psi(t),\ t \ge 0,$$

$$\begin{bmatrix} w^1(t) \\ w^2(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{35}{18} & \frac{-37}{9} & -32 \\ \frac{35}{9} & \frac{-83}{9} & -64 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{-149}{144} & \frac{203}{144} & 28 \\ \frac{-149}{72} & \frac{203}{72} & 56 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z(t-\ln(2)) \\ y(t-\ln(2)) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{101}{576} & \frac{113}{576} & -7 \\ \frac{101}{288} & \frac{-113}{288} & -14 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z(t-2\ln(2)) \\ y(t-2\ln(2)) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{-11}{1152} & \frac{11}{1152} & \frac{1}{2} \\ \frac{-11}{576} & \frac{11}{576} & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z(t-3\ln(2)) \\ y(t-3\ln(2)) \end{bmatrix},\ t \ge 0,$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{26}{9} & \frac{-92}{9} & -64 \\ \frac{35}{9} & \frac{-83}{9} & -64 \\ \frac{-35}{432} & \frac{35}{432} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-149}{72} & \frac{203}{72} & 56 \\ \frac{-149}{72} & \frac{203}{72} & 56 \\ \frac{41}{2304} & \frac{-5}{256} & \frac{-3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t-\ln(2)) \\ y(t-\ln(2)) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{101}{288} & \frac{-113}{288} & -14 \\ \frac{101}{288} & \frac{-113}{288} & -14 \\ \frac{-11}{13824} & \frac{11}{13824} & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t-2\ln(2)) \\ y(t-2\ln(2)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-11}{576} & \frac{11}{576} & 1 \\ \frac{-11}{576} & \frac{11}{576} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t-3\ln(2)) \\ y(t-3\ln(2)) \end{bmatrix}, \ t \geq 0, \ z \in \mathbb{R}^2, \ y \in \mathbb{R}.$$

Для проверки правильности вычислений достаточно убедиться, что в системе (9. г) (последняя система в приведенном регуляторе) вырождаются первые две компоненты. Или, подставив полученное управление в исходную систему, проинтегрировать ее по шагам.

Чтобы получить регулятор (9.а)–(9.в), (21) достаточно приведенную систему (9.г) построенного регулятора заменить на

$$\frac{d}{dt} z(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} w(t) - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} w(t-\ln(2)) +$$

$$+ \frac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \right) - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t), \ t \geq 0,$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = \begin{bmatrix} \frac{-35}{432} & \frac{35}{432} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{41}{2304} & \frac{-5}{256} & \frac{-3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t-\ln(2)) \\ y(t-\ln(2)) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{-11}{13824} & \frac{11}{13824} & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t-2\ln(2)) \\ y(t-2\ln(2)) \end{bmatrix}, \ t \geq 0.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функции z и y, а значит, и решение x исходной системы в случае замыкания ее регуляторами (9.а)–(9.г) и (9.а)–(9.в), (21) совпадают.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф12МВ-043).

Литература

1. *Бояринцев Ю. Е.* Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы. Новосибирск, 2000.
2. *Хартовский В. Е., Бойко В. К.* // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2012. № 1. С. 95–99.
3. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М., 2004.
4. *Метельский А. В., Карпук В. В.* // Автоматика и телемеханика. 2009. № 10. С. 22–34.
5. *Wonham W. M.* // IEEE Trans. on Automat. Control. 1967. Vol. AC 12, N 6. P. 660–665.
6. *Егоров А. И.* // Основы теории управления М., 2004.
7. *Хартовский В. Е.* // Докл. НАН Беларуси. 2012. Т. 56, № 6. С. 5–11.
8. *Хартовский В. Е.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 68–75.
9. *Хартовский В. Е.* // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2012. № 6. С. 15–28.
10. *Марченко В. М.* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 7. С. 1003–1017.
11. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.

V. E. KHARTOVSKII, O. I. URBAN

CONTROL OF LINEAR AUTONOMOUS ALGEBRAIC-DIFFERENTIAL SYSTEMS BY MEANS OF DYNAMIC REGULATORS

Summary

For linear autonomous algebraic-differential systems a new type of feedback controls is proposed. Their effectiveness is seen in the example of the problem of calming solutions. The distinctive feature of the proposed types of controls is the possibility of its implementation for the systems that do not possess the property of complete controllability.