УДК 517.925

О. А. МАКОВЕЦКАЯ

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА – РИККАТИ

Институт технологии металлов НАН Беларуси

(*Поступила в редакцию 26.11.2013*)

Рассматривается краевая задача

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + F(t,X),\ X(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

$$X(0) = X(\omega), \tag{2}$$

где $t \in I,\ A,\ B,\ Q \in \mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right),\ F \in \mathbb{C}\left(D_{\tilde\rho}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$. Предполагается, что матрица-функция $F(t,X)$ в области $D_{\tilde\rho} = \left\{(t,X) : t \in I,\ \|X\| < \tilde\rho\right\}$ удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально); $F(t,0) \not\equiv 0$; $I = [0,\omega],\ \omega > 0,\ 0 < \tilde\rho \le \infty$.

При $Q = 0$ двухточечная краевая задача качественными методами исследовалась в работе [1], конструктивными методами [2] – в [3, 4], с периодическими краевыми условиями – в [5–7]. Периодическая краевая задача для уравнения Риккати рассматривалась в [2], двухточечная – в [8]. В данной работе используются конструктивные методы [2]. Полученные результаты представляют собой обобщение и развитие соответствующих результатов, изложенных в [5–7], при этом условия однозначной разрешимости – эффективно проверяемые, алгоритмы построения решения – удобные для применений, а используемый метод [2, гл. 2] – отличный от методов, примененных в [2–8]. В этих работах использовалась двусторонняя регуляризация [2], связанная с построением решения матричного алгебраического уравнения Ляпунова, т. е. с решением весьма непростой алгебраической задачи [9–13]. Исследованию структурных свойств матричных дифференциальных уравнений различных типов и их решений посвящены работы [14–16].

Примем следующие обозначения:

$$D_\rho = \left\{(t,X) :\ t \in I,\ \|X\| \le \rho\right\},\ D = \left\{X(t) : \|X\|_{\mathbb{C}} \le \rho\right\},\ \tilde B(\omega) = \int_0^\omega B(\tau)d\tau,$$

$$\tilde\gamma = \left\|\tilde B^{-1}(\omega)\right\|,\ \alpha = \max_t \|A(t)\|,\quad \beta = \max_t \|B(t)\|,\ \delta = \max_t \|Q(t)\|,\quad h = \max_t \|F(t,0)\|,$$

$$\varphi(\rho) = \tilde\gamma\delta\omega\left(1 + \frac{1}{2}\beta\omega\right)\rho^2 + \tilde\gamma\omega\left[\alpha + L + \frac{1}{2}\beta\omega(\alpha + \beta + L)\right]\rho + \tilde\gamma\omega h\left(1 + \frac{1}{2}\beta\omega\right),$$

$$q(\rho) = \tilde\gamma\delta\omega(\beta\omega + 2)\rho + \frac{1}{2}\tilde\gamma\beta\omega^2(\alpha + \beta + L) + \tilde\gamma\omega(\alpha + L),\ \|X\|_{\mathbb{C}} = \max_t \|X(t)\|,$$

где $0 < \rho < \tilde\rho$, $t \in I$, $L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в области D_ρ, $\|\cdot\|$ – норма матриц (S и T), удовлетворяющая мультипликативному неравенству $\|ST\| \le \|S\| \cdot \|T\|$, например, любая из норм, приведенных в [17, с. 21].

Т е о р е м а. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$\det \tilde B(\omega) \ne 0, \tag{3}$$

$$\varphi(\rho) \le \rho, \tag{4}$$

$$q(\rho) < 1. \tag{5}$$

Тогда в области D_ρ *решение задачи* (1), (2) *существует и единственно, при этом справедлива оценка* $\|X\|_{\mathbb{C}} \le \varphi(\rho)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя условие (3), сначала выведем матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2). Из уравнения (1) на основании условия (2) имеем

$$\int_0^\omega X(\tau)B(\tau)d\tau = -\int_0^\omega \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F\left(\tau, X(\tau)\right)\right]d\tau. \tag{6}$$

В (6) воспользуемся тождеством типа [2, с. 47]:

$$\int_0^\omega X(\tau)B(\tau)d\tau = X(t)\tilde{B}(\omega) - \int_0^t \left(dX(\tau)\right)\left(\int_0^\tau B(\sigma)d\sigma\right) + \int_t^\omega \left(dX(\tau)\right)\left(\int_\tau^\omega B(\sigma)d\sigma\right). \tag{7}$$

На основании (3), (6), (7) и в силу (1) получим матричное интегральное уравнение

$$X(t) = \left\{\int_0^t \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F\left(\tau, X(\tau)\right)\right]\left(\int_0^\tau B(\sigma)d\sigma\right)d\tau - \right.$$
$$-\int_t^\omega \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F\left(\tau, X(\tau)\right)\right]\left(\int_\tau^\omega B(\sigma)d\sigma\right)d\tau -$$
$$\left. -\int_0^\omega \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F\left(\tau, X(\tau)\right)\right]d\tau\right\}\tilde{B}^{-1}(\omega). \tag{8}$$

Уравнение (8) можно записать в следующем виде:

$$X(t) = \int_0^\omega \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F\left(\tau, X(\tau)\right)\right]K(t,\tau)d\tau -$$
$$-\int_0^\omega \left[X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F\left(\tau, X(\tau)\right)\right]d\tau\tilde{B}^{-1}(\omega),$$

где

$$K(t,\tau) = \begin{cases} \int_0^\tau B(\sigma)d\sigma\tilde{B}^{-1}(\omega), \ 0 \le \tau \le t \le \omega, \\ -\int_\tau^\omega B(\sigma)d\sigma\tilde{B}^{-1}(\omega), \ 0 \le t < \tau \le \omega. \end{cases}$$

Верно и обратное: всякое непрерывное решение матричного интегрального уравнения (8) является решением задачи (1), (2). Это можно установить с помощью несложных выкладок.

Исследуем разрешимость уравнения (8). Запишем это уравнение в операторной форме:

$$X = \mathcal{L}(X), \tag{9}$$

где через $\mathcal{L}$ обозначен соответствующий интегральный оператор в (8). Этот оператор действует на множестве $\mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$.

Установим, что из условий (4), (5) следует выполнение на множестве D принципа сжимающих отображений [18, с. 605], т. е. в замкнутом шаре $\|X\|_{\mathbb{C}} \le \rho$.

Сначала установим, что $\mathcal{L}(X) \in D$ для произвольной матрицы-функции $X(t) \in D$. Выполнив оценки по норме в (9), получим последовательно

$$\|\mathcal{L}(X)\| \le \left\{\int_0^t \left\|A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F\left(\tau, X(\tau)\right)\right\| \left\|\left(\int_0^\tau B(\sigma)d\sigma\right)\right\| d\tau + \right.$$
$$+\int_t^\omega \left\|A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F\left(\tau, X(\tau)\right)\right\| \left\|\left(\int_\tau^\omega B(\sigma)d\sigma\right)\right\| d\tau +$$

$$+\int_0^{\omega}\left\|A(\tau)X(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+F(\tau,X(\tau))\right\|d\tau\Bigg\}\left\|\tilde{B}^{-1}(\omega)\right\|\le\tilde{\gamma}\Bigg\{\beta\int_0^t\tau\Big[(\alpha+\beta)\left\|X(\tau)\right\|+$$

$$+\delta\left\|X(\tau)\right\|^2+\left\|F(\tau,X(\tau))\right\|\Big]d\tau+\beta\int_t^{\omega}(\omega-\tau)\Big[(\alpha+\beta)\left\|X(\tau)\right\|+\delta\left\|X(\tau)\right\|^2+\left\|F(\tau,X(\tau))\right\|\Big]d\tau+$$

$$+\int_0^{\omega}\Big[\alpha\left\|X(\tau)\right\|+\delta\left\|X(\tau)\right\|^2+\left\|F(\tau,X(\tau))\right\|\Big]d\tau\Bigg\}\le$$

$$\le\tilde{\gamma}\omega\left\{\frac{1}{2}\beta\omega\left[\delta\rho^2+(\alpha+\beta+L)\rho+h\right]+\delta\rho^2+(\alpha+L)\rho+h\right\}=\varphi(\rho). \tag{10}$$

Из (10) на основании (4) следует соотношение

$$\left\|\mathcal{L}(X)\right\|_{\mathbb{C}}\le\rho. \tag{11}$$

Далее из (9) имеем для произвольных $\tilde{X},\ \tilde{\tilde{X}}\in D$:

$$\left\|\mathcal{L}(\tilde{\tilde{X}})-\mathcal{L}(\tilde{X})\right\|\le\tilde{\gamma}\Bigg\{\int_0^t\Big[\big(\left\|A(\tau)\right\|+\left\|B(\tau)\right\|\big)\left\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right\|+\left\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)\right\|+$$

$$+\left\|F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\right\|\Big]\left(\int_0^{\tau}\left\|B(\sigma)\right\|d\sigma\right)d\tau+\int_t^{\omega}\Big[\big(\left\|A(\tau)\right\|+\left\|B(\tau)\right\|\big)\left\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right\|+$$

$$+\left\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)\right\|+\left\|F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\right\|\Big]\left(\int_{\tau}^{\omega}\left\|B(\sigma)\right\|d\sigma\right)d\tau+$$

$$+\int_0^{\omega}\Big[\left\|A(\tau)\right\|\left\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right\|+\left\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)\right\|+\left\|F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\right\|\Big]d\tau\Bigg\}\le$$

$$\le\tilde{\gamma}\omega\left[\frac{1}{2}\beta\omega(2\delta\rho+\alpha+\beta+L)+2\delta\rho+\alpha+L\right]\left\|\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X}\right\|_{\mathbb{C}}=q\left\|\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X}\right\|_{\mathbb{C}}.$$

Отсюда имеем оценку

$$\left\|\mathcal{L}(\tilde{\tilde{X}})-\mathcal{L}(\tilde{X})\right\|_{\mathbb{C}}\le q\left\|\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X}\right\|_{\mathbb{C}}. \tag{12}$$

Из анализа соотношений (11), (12) видно, что неравенства (4), (5) являются условиями принципа сжимающих отображений применительно к (9). На основании этого заключаем, что в шаре $\left\|X\right\|_{\mathbb{C}}\le\rho$ решение уравнения (9) существует и единственно. Таким образом, задача (1), (2) однозначно разрешима в области D_{ρ}. При этом на основании (10) справедлива оценка $\left\|X\right\|_{\mathbb{C}}\le\varphi(\rho)$. Теорема полностью доказана.

Для построения решения матричного интегрального уравнения (8) рассмотрим в дифференциальной форме алгоритм

$$\frac{dX_{k+1}(t)}{dt}=A(t)X_k(t)+X_k(t)B(t)+X_k(t)Q(t)X_k(t)+F(t,X_k(t)), \tag{13}$$

$$X_{k+1}(0)=X_{k+1}(\omega),\quad k=0,1,2,..., \tag{14}$$

где в качестве начального приближения X_0 принята постоянная матрица, определяемая из условия (14) для приближения X_1:

$$C=-\int_0^{\omega}\left[A(\tau)C+CQ(\tau)C+F(\tau,C)\right]d\tau\tilde{B}^{-1}(\omega). \tag{15}$$

Для исследования разрешимости в шаре $\left\|C\right\|\le\rho$ уравнения (15) применим принцип сжимающих отображений, записав это уравнение в операторной форме

$$C=\mathcal{H}(C). \tag{16}$$

Покажем, что $\left\|\mathcal{H}(C)\right\| < \rho$ для произвольной матрицы $C \in D$. Выполнив оценки по норме в (16), получим

$$\left\|\mathcal{H}(C)\right\| \le \left\|\tilde{B}^{-1}(\omega)\right\| \int_0^\omega \left[\left\|A(\tau)C\right\| + \left\|CQ(\tau)C\right\| + \left\|F(\tau,C)\right\|\right] d\tau \le$$

$$\le \tilde{\gamma} \int_0^\omega \left[\alpha\left\|C\right\| + \delta\left\|C\right\|^2 + \left\|F(\tau,C)\right\|\right] d\tau \le \tilde{\gamma}\omega\left[\delta\rho^2 + (\alpha+L)\rho + h\right] \equiv l.$$

Поскольку $l < \varphi(\rho)$, то на основании (4) имеем

$$\left\|\mathcal{H}(C)\right\| < \rho. \tag{17}$$

Таким образом, оператор $\mathcal{H}$ отображает множество D в себя.

Далее изучим вопрос о сжимаемости оператора $\mathcal{H}$. Для произвольных $\tilde{C},\ \tilde{\tilde{C}} \in D$ имеем

$$\left\|\mathcal{H}\left(\tilde{\tilde{C}}\right) - \mathcal{H}\left(\tilde{C}\right)\right\| \le \left\|\tilde{B}^{-1}(\omega)\right\| \int_0^\omega \left[\left\|A(\tau)\right\|\left\|\tilde{\tilde{C}} - \tilde{C}\right\| + \left(\left\|\tilde{\tilde{C}}\right\| + \left\|\tilde{C}\right\|\right)\left\|Q(\tau)\right\|\left\|\tilde{\tilde{C}} - \tilde{C}\right\| + L\left\|\tilde{\tilde{C}} - \tilde{C}\right\|\right] d\tau \le$$

$$\le \tilde{\gamma}\omega(2\delta\rho + \alpha + L)\left\|\tilde{\tilde{C}} - \tilde{C}\right\| = \tilde{q}\left\|\tilde{\tilde{C}} - \tilde{C}\right\|, \tag{18}$$

где

$$\tilde{q} = \tilde{\gamma}\omega(2\delta\rho + \alpha + L).$$

Поскольку $\tilde{q} < q$, то $\tilde{q} < 1$, согласно условию (5).

Условия (17), (18) являются условиями принципа сжимающих отображений применительно к уравнению (16). Следовательно, это уравнение однозначно разрешимо в шаре $\left\|C\right\| \le \rho$.

З а м е ч а н и е 1. В качестве начального приближения в данном алгоритме вместо постоянной матрицы C можно принять произвольную матрицу $X_0(t) \in D$, дающую приближенное решение $X_1(t)$, удовлетворяющее условию (14) (при $k = 0$).

Далее, исходя из (13), (14), с помощью (7) получим рекуррентное интегральное соотношение для определения приближенных решений $X_k(t),\ \ k = 1,2,...$, задачи (1), (2). Из (13) на основании (14) имеем

$$\int_0^\omega X_k(\tau)B(\tau)d\tau = -\int_0^\omega \left[A(\tau)X_k(\tau) + X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau))\right] d\tau. \tag{19}$$

Используя тождество (7), получим из (19) на основании условия (3)

$$X_k(t) = \left\{ \int_0^t \left[A(\tau)X_{k-1}(\tau) + X_{k-1}(\tau)B(\tau) + X_{k-1}(\tau)Q(\tau)X_{k-1}(\tau) + F(\tau, X_{k-1}(\tau))\right]\left(\int_0^\tau B(\sigma)d\sigma\right) d\tau - \right.$$

$$- \int_t^\omega \left[A(\tau)X_{k-1}(\tau) + X_{k-1}(\tau)B(\tau) + X_{k-1}(\tau)Q(\tau)X_{k-1}(\tau) + F(\tau, X_{k-1}(\tau))\right]\left(\int_\tau^\omega B(\sigma)d\sigma\right) d\tau -$$

$$\left. - \int_0^\omega \left[A(\tau)X_k(\tau) + X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau))\right] d\tau \right\} \tilde{B}^{-1}(\omega),\ k = 1,2,... \tag{20}$$

Как видно из (20), для определения приближенных решений $X_k,\ k = 1,2,...$, получены матричные интегральные уравнения.

З а м е ч а н и е 2. Соотношение (20) фактически получено с помощью тождества (7) как решение следующей задачи:

$$\frac{dX_k(t)}{dt} = A(t)X_{k-1}(t) + X_{k-1}(t)B(t) + X_{k-1}(t)Q(t)X_{k-1}(t) + F(t, X_{k-1}(t)),$$

$$\int_0^\omega \left[A(\tau)X_k(\tau) + X_k(\tau)B(\tau) + X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau))\right] d\tau = 0,\ k = 1,2,... \tag{21}$$

Используя условия (4), (5) теоремы, с помощью принципа сжимающих отображений индукцией по k можно доказать, что уравнения (20) однозначно разрешимы на множестве D. В результате получим последовательность $\left\{X_k(t)\right\}_0^\infty$ приближенных решений задачи (1), (2), принадлежащих множеству D.

Теперь изучим вопрос о сходимости полученной последовательности. Следуя известному приему [19, с. 54], этот вопрос заменим эквивалентным вопросом о сходимости ряда

$$X_0(t)+(X_1(t)-X_0(t))+(X_2(t)-X_1(t))+\ldots+(X_k(t)-X_{k-1}(t))+\ldots \qquad (22)$$

Докажем равномерную по $t\in[0,\omega]$ сходимость ряда (22). Для этого построим сходящийся числовой ряд, который мажорирует на $[0,\omega]$ матричный функциональный ряд (22).
Выполним оценки $\|X_{m+1}(t)-X_m(t)\|$, используя (20):

$$\|X_{m+1}(t)-X_m(t)\|\le\left\|\tilde{B}^{-1}(\omega)\right\|\left\{\int_0^t\Big[\big(\|A(\tau)\|+\|B(\tau)\|\big)\|X_m(\tau)-X_{m-1}(\tau)\|+\right.$$

$$+\|X_m(\tau)Q(\tau)X_m(\tau)-X_{m-1}(\tau)Q(\tau)X_{m-1}(\tau)\|+\|F(\tau,X_m(\tau))-F(\tau,X_{m-1}(\tau))\|\Big]\left(\int_0^\tau\|B(\sigma)\|d\sigma\right)d\tau+$$

$$+\int_t^\omega\Big[\big(\|A(\tau)\|+\|B(\tau)\|\big)\|X_m(\tau)-X_{m-1}(\tau)\|+\|X_m(\tau)Q(\tau)X_m(\tau)-X_{m-1}(\tau)Q(\tau)X_{m-1}(\tau)\|+$$

$$+\|F(\tau,X_m(\tau))-F(\tau,X_{m-1}(\tau))\|\Big]\left(\int_\tau^\omega\|B(\sigma)\|d\sigma\right)d\tau+\int_0^\omega\Big[\|A(\tau)\|\|X_{m+1}(\tau)-X_m(\tau)\|+$$

$$\left.+\|X_{m+1}(\tau)Q(\tau)X_{m+1}(\tau)-X_m(\tau)Q(\tau)X_m(\tau)\|+\|F(\tau,X_{m+1}(\tau))-F(\tau,X_m(\tau))\|\Big]d\tau\right\}\le$$

$$\le\frac{1}{2}\tilde{\gamma}\beta\omega^2\left(2\delta\rho+\alpha+\beta+L\right)\|X_m-X_{m-1}\|_{\mathbb{C}}+\tilde{\gamma}\omega\left(2\delta\rho+\alpha+L\right)\|X_{m+1}-X_m\|_{\mathbb{C}}.$$

Отсюда следует оценка

$$\|X_{m+1}-X_m\|_{\mathbb{C}}\le(q-\tilde{q})\|X_m-X_{m-1}\|_{\mathbb{C}}+\tilde{q}\|X_{m+1}-X_m\|_{\mathbb{C}},\ m=1,2,\ldots \qquad (23)$$

Поскольку $\tilde{q}<1$, то из (23) имеем рекуррентную оценку

$$\|X_{m+1}-X_m\|_{\mathbb{C}}\le\tilde{\tilde{q}}\|X_m-X_{m-1}\|_{\mathbb{C}},\ m=1,2,\ldots, \qquad (24)$$

где $\tilde{\tilde{q}}=\dfrac{q-\tilde{q}}{1-\tilde{q}}<q.$

Из (24) имеем явную оценку

$$\|X_{m+1}-X_m\|_{\mathbb{C}}\le\tilde{\tilde{q}}^m\|X_1-X_0\|_{\mathbb{C}},\ m=1,2,\ldots \qquad (25)$$

Используя (25), можно доказать с помощью известных приемов [18, с. 605; 19, с. 54], что последовательность $\left\{X_k(t)\right\}_0^\infty$ сходится равномерно по $t\in I$ к решению интегрального уравнения (8), при этом справедлива оценка

$$\|X-X_k\|_{\mathbb{C}}\le\frac{\tilde{\tilde{q}}^k}{1-\tilde{\tilde{q}}}\|X_1-X_0\|_{\mathbb{C}},\ k=1,2,\ldots \qquad (26)$$

На основе (26) имеем оценку области локализации решения $X(t)$, определяемую согласно алгоритму (20),

$$\|X\|_{\mathbb{C}}\le\|X_0\|_{\mathbb{C}}+\frac{\|X_1-X_0\|_{\mathbb{C}}}{1-\tilde{\tilde{q}}}. \qquad (27)$$

Оценка (27) будет эффективной, если ее правая часть не превосходит ρ. Из несложного анализа (27) с учетом условия (4) видно, что этот факт имеет место при достаточной малости значений исходных данных. Оценки (26), (27) следует дополнить оценкой для $\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}$. Из (15), (20) имеем

$$\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}} \le \frac{\tilde{\gamma}\beta\omega^2\left[\delta\|X_0\|_{\mathbb{C}}^2 + (\alpha+\beta+L)\|X_0\|_{\mathbb{C}} + h\right]}{2(1-\tilde{q})} \le \frac{\tilde{\gamma}\beta\omega^2\left[\delta\rho^2 + (\alpha+\beta+L)\rho + h\right]}{2(1-\tilde{q})}.$$

Таким образом, справедливо

С л е д с т в и е 1. *Решение задачи* (1), (2) *представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением* (20) (*с неявной вычислительной схемой*) *и удовлетворяющих условию* (14).

Алгоритм (20) представляет собой достаточно эффективное средство для построения решения задачи (1), (2). В [2] установлено, что такие алгоритмы могут быть использованы при решении конкретных задач.

Этот алгоритм неудобен тем, что основан на неявной вычислительной схеме: на каждом итерационном шаге для отыскания соответствующего приближенного решения приходится решать матричное интегральное уравнение. Поэтому рассмотрим алгоритм, основанный на явной вычислительной схеме. Такая вычислительная схема применительно к задаче (1), (2) дается соотношениями

$$\frac{dX_{k+2}(t)}{dt} = A(t)X_k(t) + X_{k+1}(t)B(t) + X_k(t)Q(t)X_k(t) + F(t, X_k(t)), \tag{28}$$

$$X_{k+2}(0) = X_{k+2}(\omega), \quad k = 0,1,2,..., \tag{29}$$

где в качестве начального приближения X_0 принимается нулевая матрица, приближение X_1 ищется в виде постоянной матрицы, дающей приближенное решение $X_2(t)$, удовлетворяющее условию (29).

Первое приближение имеет вид

$$X_1 = -\int_0^{\omega} F(\tau, 0)\,d\tau\,\tilde{B}^{-1}(\omega).$$

Поскольку $\|X_1\| \le \tilde{\gamma}\omega h < \varphi(\rho)$, то на основании условия (5) имеем $\|X_1\| < \rho$.

Теперь на основе (28), (29) с помощью (7) получим рекуррентное интегральное соотношение для определения приближенных решений $X_i(t)$, $i = 2,3,\ldots$, исследуемой задачи:

$$\begin{aligned} X_{k+1}(t) = \Bigg\{ &\int_0^t \left[A(\tau)X_{k-1}(\tau) + X_k(\tau)B(\tau) + X_{k-1}(\tau)Q(\tau)X_{k-1}(\tau) + F(\tau, X_{k-1}(\tau))\right]\left(\int_0^{\tau} B(\sigma)d\sigma\right)d\tau - \\ &-\int_t^{\omega} \left[A(\tau)X_{k-1}(\tau) + X_k(\tau)B(\tau) + X_{k-1}(\tau)Q(\tau)X_{k-1}(\tau) + F(\tau, X_{k-1}(\tau))\right]\left(\int_{\tau}^{\omega} B(\sigma)d\sigma\right)d\tau - \\ &-\int_0^{\omega} \left[A(\tau)X_k(\tau) + X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau))\right]d\tau \Bigg\}\tilde{B}^{-1}(\omega), \quad k = 1,2,... \end{aligned} \tag{30}$$

Заметим, что соотношение (30) может быть получено с помощью тождества (7) как решение задачи, аналогичной (21):

$$\frac{dX_{k+1}(t)}{dt} = A(t)X_{k-1}(t) + X_k(t)B(t) + X_{k-1}(t)Q(t)X_{k-1}(t) + F(t, X_{k-1}(t)),$$

$$\int_0^{\omega} \left[A(\tau)X_k(\tau) + X_{k+1}(\tau)B(\tau) + X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau))\right]d\tau = 0, \quad k = 1,2,...$$

З а м е ч а н и е 3. В качестве приближений X_0, X_1 можно принять произвольные матрицы класса $\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, принадлежащие множеству D и дающие приближение $X_2(t)$, удовлетворяющие условию (29) при $k=0$.

Как видим, вычислительная схема алгоритма (30) является явной, при этом для построения приближенных решений по этому алгоритму следует выполнить сравнительно простые вычислительные процедуры. В результате получим последовательность $\left\{X_k(t)\right\}_0^\infty$. Используя условие (4), можно доказать индукцией по k, что все члены этой последовательности принадлежат множеству D.

Далее докажем равномерную по $t\in I$ сходимость ряда (22) применительно к алгоритму (30). Для этого построим соответствующий сходящийся числовой ряд, который мажорирует на I указанный матричный функциональный ряд.

Сначала выполним соответствующие оценки по норме, используя (30). Тогда получим последовательно

$$\left\|X_{k+2}(t)-X_{k+1}(t)\right\|\le\left\|\tilde{B}^{-1}(\omega)\right\|\left\{\int_0^t\left[\left\|X_{k+1}(\tau)-X_k(\tau)\right\|\left\|B(\tau)\right\|+\right.\right.$$
$$+\left[\left\|A(\tau)\right\|+\left(\left\|X_k(\tau)\right\|+\left\|X_{k-1}(\tau)\right\|\right)\left\|Q(\tau)\right\|\right]\left\|X_k(\tau)-X_{k-1}(\tau)\right\|+$$
$$+\left\|F\left(\tau,X_k(\tau)\right)-F\left(\tau,X_{k-1}(\tau)\right)\right\|\Big]\left(\int_0^\tau\left\|B(\sigma)\right\|d\sigma\right)d\tau+\int_t^\omega\Big[\left\|X_{k+1}(\tau)-X_k(\tau)\right\|\left\|B(\tau)\right\|\Big[\left\|A(\tau)\right\|+$$
$$+\left(\left\|X_k(\tau)\right\|+\left\|X_{k-1}(\tau)\right\|\right)\left\|Q(\tau)\right\|\Big]\left\|X_k(\tau)-X_{k-1}(\tau)\right\|+\left\|F\left(\tau,X_k(\tau)\right)-F\left(\tau,X_{k-1}(\tau)\right)\right\|\Big]\left(\int_\tau^\omega\left\|B(\sigma)\right\|d\sigma\right)d\tau+$$
$$\left.+\int_0^\omega\Big[\left(\left\|A(\tau)\right\|+\left(\left\|X_{k+1}(\tau)\right\|+\left\|X_k(\tau)\right\|\right)\left\|Q(\tau)\right\|\right)\left\|X_{k+1}(\tau)-X_k(\tau)\right\|+\left\|F\left(\tau,X_{k+1}(\tau)\right)-F\left(\tau,X_k(\tau)\right)\right\|\Big]d\tau\right\}\le$$
$$\le\tilde{\gamma}\omega\left(2\delta\rho+\frac{1}{2}\beta^2\omega+\alpha+L\right)\left\|X_{k+1}-X_k\right\|_{\mathbb{C}}+\frac{1}{2}\tilde{\gamma}\beta\omega^2\left(2\delta\rho+\alpha+L\right)\left\|X_k-X_{k-1}\right\|_{\mathbb{C}}.$$

Отсюда следует оценка типа [2, с. 164]:

$$\left\|X_{k+2}-X_{k+1}\right\|_{\mathbb{C}}\le q_1\left\|X_{k+1}-X_k\right\|_{\mathbb{C}}+q_2\left\|X_k-X_{k-1}\right\|_{\mathbb{C}},\ k=1,2,..., \tag{31}$$

где

$$q_1=\tilde{\gamma}\omega\left(2\delta\rho+\frac{1}{2}\beta^2\omega+\alpha+L\right),\qquad q_2=\frac{1}{2}\tilde{\gamma}\beta\omega^2\left(2\delta\rho+\alpha+L\right).$$

Заметим, что $q=q_1+q_2$.

Используя оценку (31), можно доказать, что последовательность $\left\{X_k(t)\right\}_0^\infty$, полученная по алгоритму (30), сходится равномерно по $t\in I$ к решению интегрального уравнения (8). С помощью (31) можно получить также оценку

$$\left\|X-X_{k+1}\right\|_{\mathbb{C}}\le\frac{q\left\|X_{k+1}-X_k\right\|_{\mathbb{C}}+q_2\left\|X_k-X_{k-1}\right\|_{\mathbb{C}}}{1-q},\quad k=1,2,... \tag{32}$$

Оценку (32) следует дополнить оценками для $\left\|X_1-X_0\right\|$, $\left\|X_2-X_1\right\|_{\mathbb{C}}$. Очевидно, $\left\|X_1-X_0\right\|\le\tilde{\gamma}\omega h$. Далее из (30) при $k=1$ имеем

$$X_2(t)-X_1=\int_0^\omega\left[X_1B(\tau)+F(\tau,0)\right]d\tau K(t,\tau)-$$
$$-\int_0^\omega\left[A(\tau)X_1+X_1Q(\tau)X_1+F(\tau,X_1)\right]d\tau\tilde{B}^{-1}(\omega)+\int_0^\omega F(\tau,0)d\tau\tilde{B}^{-1}(\omega). \tag{33}$$

Выполнив в (33) соответствующие оценки, получим

$$\left\|X_2(t)-X_1\right\| \le \left\|K(t,\tau)\right\| \int_0^{\omega} \left\|X_1 B(\tau)+F(\tau,0)\right\| d\tau + \left\|\tilde{B}^{-1}(\omega)\right\| \int_0^{\omega} \Big[\left\|A(\tau)X_1 + X_1 Q(\tau) X_1\right\| +$$

$$+\left\|F(\tau,X_1)-F(\tau,0)\right\|\Big] d\tau \le \frac{1}{2}\tilde{\gamma}\beta\omega^2\left(\beta\left\|X_1\right\|+h\right)+\tilde{\gamma}\omega\left[(\alpha+L)\left\|X_1\right\|+\delta\left\|X_1\right\|^2\right].$$

Отсюда следует оценка

$$\left\|X_2 - X_1\right\|_{\mathbb{C}} \le \frac{1}{2}\tilde{\gamma}\beta\omega^2\left(\beta\rho+h\right)+\tilde{\gamma}\omega\left[\delta\rho^2+(\alpha+L)\rho\right].$$

Итак, имеет место

С л е д с т в и е 2. *Решение задачи* (1), (2) *представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых алгоритмом* (30) (*с явной вычислительной схемой*) *и удовлетворяющих условию* (29).

Заметим, что указанный алгоритм содержит достаточно простые вычислительные процедуры и поэтому удобнее для применения, чем алгоритм (20), а также соответствующие алгоритмы, приведенные в [5–7].

З а м е ч а н и е 4. В отличие от теоремы, следствия 1, 2 доказаны конструктивным способом, поэтому их можно рассматривать как самостоятельные утверждения, дающие конструктивные достаточные условия сходимости функциональных рядов, определяемых соответствующими алгоритмами.

Литература

1. *Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S.* // J. Mathem. Anal. and Appl. 1992. Vol. 167. P. 505–515.
2. *Лаптинский В. Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Минск, 1998.
3. *Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И.* // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 7. С. 994–996.
4. *Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2006. № 3. С. 218–223.
5. *Лаптинский В. Н.* Конструктивный анализ периодической краевой задачи для нелинейного матричного дифференциального уравнения Ляпунова. Могилев, 2007. (Препринт / ИТМ НАН Беларуси; № 7).
6. *Лаптинский В. Н.* // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. № 4. С. 14–18.
7. *Подолян С. В.* // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1988. № 6. С. 31–34.
8. *Laptinsky V. N., Makovetsky I. I.* // Central European Science J. 2005. Vol. 3, N 1. P. 143–154.
9. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., 1967.
10. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М., 1969.
11. *Деменчук А. К.* // Докл. НАН Беларуси. 2005. Т. 49, № 1. С. 10–14.
12. *Деменчук А. К., Макаров Е. К.* // Докл. НАН Беларуси. 2008. Т. 52, № 2. С. 510.
13. *Demenchuk A. K., Makarov E. K.* // J. of Math. Phys. 2009. Vol. 50, N 083508. P. 1–13.
14. *Деревенский В. П.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 11. С. 1925–1926.
15. *Деревенский В. П.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 11. С. 1573.
16. *Деревенский В. П.* // Мат. заметки. 1999. Т. 66, вып. 1. С. 63–75.
17. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
18. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М., 1977.
19. *Бибиков Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1991.

O. A. MAKOVETSKAYA

ALGORITHMS FOR CONSTRUCTING THE SOLUTIONS OF THE PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE MATRIX LYAPUNOV – RICCATI EQUATION

Summary

Constructive conditions of unique solvability and algorithms for constructing the solutions of periodic boundary value problem for the matrix differential equation, which is a generalization of the Lyapunov and Riccati equations are obtained.