ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 519.65:62.50
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-263-272

Поступила в редакцию 17.05.2018
Received 17.05.2018

М. В. Игнатенко

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

ОПЕРАТОРНЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ЭРМИТОВА ТИПА С УЗЛАМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРАТНОСТИ, ОСНОВАННЫЕ НА ТОЖДЕСТВЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Рассматривается проблема построения и исследования интерполяционных формул эрмитова типа с узлами произвольной кратности для операторов, заданных в пространствах функций одной и двух переменных. Построение операторных интерполяционных многочленов основано на интерполяционных полиномах для скалярных функций относительно произвольной чебышевской системы, а также на тождественных преобразованиях функций. Приведенные операторные формулы содержат интегралы Стилтьеса и дифференциалы Гато интерполируемого оператора и являются инвариантными для специального класса операторных многочленов соответствующих степеней. Для некоторых из полученных операторных полиномов найдено явное представление погрешности интерполирования. Рассмотрены частные случаи формул Эрмита, основанные на интегральных преобразованиях Ганкеля, Абеля, Фурье, а также на синус (косинус) преобразовании Фурье. Применение отдельных интерполяционных формул проиллюстрировано на примерах. Представленные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях как основа построения приближенных методов решения интегральных, дифференциальных и других видов нелинейных операторных уравнений.

Ключевые слова: интерполяционная задача Эрмита, операторный многочлен, операторное интерполирование, дифференциал Гато, интеграл Стилтьеса, погрешность интерполяции

Для цитирования: Игнатенко, М. В. Операторные интерполяционные формулы эрмитова типа с узлами произвольной кратности, основанные на тождественных преобразованиях функций / М. В. Игнатенко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 3. – С. 263–272. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-263-272

M. V. Ignatenko

Belarusian State University, Minsk, Belarus

OPERATOR INTERPOLATION FORMULAS OF HERMITE TYPE WITH ARBITRARY MULTIPLICITY NODES BASED ON IDENTITY TRANSFORMATIONS OF FUNCTIONS

Abstract. The problem of construction and research of Hermite interpolation formulas with nodes of arbitrary multiplicity for operators given in functional spaces of one and two variables is considered. The construction of operator interpolation polynomials is based both on interpolation polynomials for scalar functions with respect to an arbitrary Chebyshev system and on identity transformations of functions. The reduced operator formulas contain the Stieltjes integrals and the Gateaux differentials of an interpolated operator and are invariant for a special class of operator polynomials of appropriate degree. For some of the obtained operator polynomials, an explicit representation of the interpolation error is found. Particular cases of Hermite formulas based both on the integral transformations of Hankel, Abel, Fourier and on the Fourier sine (cosine) transform are considered. The application of separate interpolation formulas is illustrated by examples. The presented results can be used in theoretical research as the basis for construction of approximate methods for solving integral, differential and other types of nonlinear operator equations.

Keywords: Hermite interpolation problem, operator polynomial, operator interpolation, Gateaux differential, Stieltjes integral, interpolation error

For citation. Ignatenko M. V. Operator interpolation formulas of Hermite type with arbitrary multiplicity nodes based on identity transformations of functions. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navyk = Proceeding of the National Academy of Sciences of Belarus, Physics and Mathematics Series*, 2018, vol. 54, no 3, pp. 263–272 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-263-272

Введение. Рассмотрим на числовом множестве D чебышевскую систему непрерывно дифференцируемых необходимое число раз функций $\{\varphi_k(s)\}$ и соответствующие многочлены вида

$$P_n(s)=\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\varphi_k(s), \qquad (1)$$

где a_{nk} – комплексные или действительные числа $(k=0,1,...,n;\ \ n=0,1,2,...)$. По определению чебышевской системы функций любой многочлен степени n вида (1) будет иметь на D не более чем n корней с учетом их кратностей.

Положим

$$H_n(f;s)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{\alpha_k-1} H_{\nu k}^{(m)}(s) f^{(\nu)}(s_k). \qquad (2)$$

Здесь $H_{\nu k}^{(m)}(s)\equiv H_{\nu,k}^{(m)}(s)$ – многочлены вида (1), такие, что

$$\frac{d^j}{ds^j} H_{\nu k}^{(m)}(s_i)=\delta_{ki}\delta_{j\nu} \quad (0\le j\le \alpha_i-1;\ \ i=0,1,...,m), \qquad (3)$$

где δ_{pq} – символ Кронекера, s_k – различные точки из D и $f(s)$ – дифференцируемая α_k-1 раз в каждой точке s_k функция $(k=0,1,...,m;\ n=\alpha_0+\alpha_1+...+\alpha_m-1)$. Интерполяционный многочлен Эрмита (2) всегда существует и единственен для любой системы функций Чебышева $\{\varphi_q(s)\}_{q=0}^{n}$. Известно, что если $f(s)$ является многочленом вида (1) степени не выше n, то $H_n(f;s)$ тождественно совпадает с ним.

Через $\sigma_m(s)=\sum_{k=0}^{m} H_{0k}^{(m)}(s)$ обозначим сумму фундаментальных многочленов $H_{0k}^{(m)}(s)$ $(k=0,1,...,m)$ чебышевской системы функций $\{\varphi_q(s)\}_{q=0}^{n}$, которая является постоянной величиной или некоторой функцией на множестве D.

Формулы Эрмита для операторов, дифференциалы Гато которых содержат произведение направлений. Пусть X и Y – некоторые заданные множества функций, а F – оператор, отображающий X в Y. Рассмотрим операторы $F(x)$, для которых вычисленные ν-е дифференциалы Гато $\delta^\nu F[x;h_1,h_2,\cdots,h_\nu]$ содержат произведение заданных направлений $h_1(s),h_2(s),\cdots,h_\nu(s)$. В частности, если $F(x)=f(t,x(s))$, где $f(t,u)$ – скалярная функция аргументов t и u, то

$$\delta^k F[x;h_1,h_2,...,h_k]=\frac{\partial^k}{\partial x^k} f(t,x)h_1h_2...h_k,$$

где $x=x(s)$ и $h_i=h_i(s)\,(i=1,2,...k)$ – элементы множества X. Направления $h_1,h_2,...,h_k$ входят здесь как сомножители. Этим свойством обладают операторы Гаммерштейна, Урысона и др. Пусть $\delta^\nu F[x;h_\nu]$ – дифференциал ν-го порядка, когда первые $\nu-1$ направления $h_i(s)\equiv 1$, а ν-е направление есть функция $h_\nu(s)$.

Рассмотрим операторы

$$D_m(x)=b(t)+\sum_{i=0}^{m}\int_a^b b_i(t,s)\varphi_i(x(s))\,ds, \qquad (4)$$

где $b(t)$ – произвольно заданная функция, а $b_i(t,s)$ – некоторые функции, для которых интегралы, входящие в (4), существуют, и необходимые в дальнейшем преобразования допустимы.

Получим операторные интерполяционные формулы эрмитова типа с узлами произвольной кратности, содержащие интегралы Стилтьеса и дифференциалы Гато интерполируемого оператора, на основе фундаментальных многочленов эрмитова интерполирования для скалярных функций.

Т е о р е м а 1. *Оператор*

$$H_n(x) = F(x_0)\sigma_m(x) + \sum_{k=0}^{m}\sum_{\nu=1}^{\alpha_k-1}\delta^\nu F[x_k; H_{\nu k}^{(m)}(x)] +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_0^1 H_{0k}^{(m)}\left[x(\tau)\right] d_\tau F[x_0(\cdot) + \chi(\tau,\cdot)(x_k(\cdot) - x_0(\cdot))], \tag{5}$$

где числовая функция

$$\chi(\tau,t) = \begin{cases} 1, & \tau \geq t; \\ 0, & \tau < t, \end{cases} \quad 0 < \tau < 1; \;\; \chi(0,t) \equiv 0, \;\; \chi(1,t) \equiv 1, \tag{6}$$

является эрмитовым интерполяционным многочленом относительно узлов $x_k(t) \in X$ *кратности* α_k $(k = 0,1,...,m; \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_m - 1 = n)$ *для оператора* $F(x)$ *и удовлетворяет условиям*

$$\delta^\nu H_n[x_k; h_{k1}h_{k2}\cdots h_{k\nu}] = \delta^\nu F[x_k; h_{k1}h_{k2}\cdots h_{k\nu}] \quad (0 \leq \nu \leq \alpha_k - 1; \; k = 0,1,...,m). \tag{7}$$

Если $\sigma_m(x)$ *– постоянная на* D *величина, а интерполируемый оператор* $F(x)$ *имеет вид* (4), *где* $\left[a,b\right] = \left[0,1\right]$, *то* $H_n(x) \equiv F(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия (7) выполняются в силу справедливости для узлов $x_k = x_k(s)$ $(k = 0,1,...,m)$ равенств (3). Проверим точность этой формулы для многочленов $D_m(x)$, заданных по правилу (4), где $\left[a,b\right] = \left[0,1\right]$.

Пусть $F(x) = \int_0^1 b_i(t,s)\varphi_i(x(s))\,ds \quad (i = 0,1,...,m).$ Так как в этом случае

$$\delta^\nu F[x; h_1h_2\cdots h_\nu] = \int_0^1 b_i(t,s)\frac{d^\nu}{dx^\nu}\varphi_i(x(s))h_1(s)h_2(s)\cdots h_\nu(s)ds,$$

то $\delta^\nu F[x_k; H_{\nu k}^{(m)}(x)] = \int_0^1 b_i(t,s)\,\varphi_i^{(\nu)}(x_k(s))H_{\nu k}^{(m)}(x(s))ds.$

Для таких операторов сумма интегралов в формуле (5) с учетом свойств функции $\chi(\tau,t)$ примет вид

$$\sum_{k=1}^{m}\int_0^1 H_{0k}^{(m)}\left[x(\tau)\right] d_\tau F[x_0(\cdot) + \chi(\tau,\cdot)(x_k(\cdot) - x_0(\cdot))] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\int_0^1 H_{0k}^{(m)}\left[x(\tau)\right] d_\tau \left\{\int_0^\tau b_i(t,s)\varphi_i(x_k(s))ds + \int_\tau^1 b_i(t,s)\varphi_i(x_0(s))ds\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\int_0^1 b_i(t,\tau)H_{0k}^{(m)}\left[x(\tau)\right]\left\{\varphi_i(x_k(\tau)) - \varphi_i(x_0(\tau))\right\} d\tau.$$

Соответственно правило (5) с учетом условия $\sigma_m(s) = \mathrm{const}$ преобразуется к равенству

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{\alpha_k-1}\int_0^1 b_i(t,s)\varphi_i^{(\nu)}(x_k(s))H_{\nu k}^{(m)}(x(s))ds =$$

$$= \int_0^1 b_i(t,s)\sum_{k=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{\alpha_k-1}H_{\nu k}^{(m)}(x)\varphi_i^{(\nu)}(x_k)ds = \int_0^1 b_i(t,s)\varphi_i(x)ds \equiv F(x).$$

Теорема 1 доказана.

Для погрешности интерполирования $r_n(x) = F(x) - H_n(x)$, где $H_n(x)$ – интерполяционный многочлен (5), имеет место следующее представление:

$$r_n(x)=\sum_{k=0}^{m+1}\sum_{\nu=1}^{\alpha_k-1}\delta^\nu F[x_k;H_{\nu k}^{(m+1)}(x)-H_{\nu k}^{(m)}(x)]+$$

$$+\sum_{k=1}^{m+1}\int_0^1\left\{H_{0k}^{(m+1)}\left[x(\tau)\right]-H_{0k}^{(m)}\left[x(\tau)\right]\right\}d_\tau F[x_0(\cdot)+\chi(\tau,\cdot)(x_k(\cdot)-x_0(\cdot))],$$

где $x_{m+1}=x,\ H_{\nu,m+1}^{(m)}(x)\equiv 0\ \left(0\le\nu\le\alpha_k-1\right)$.

Пусть $g(\tau,s;x)$ – линейный на X оператор, удовлетворяющий условию $g(a,s;x)\equiv 0$ и тождественному преобразованию $g(b,s;x)\equiv x(s)$ $(\tau,s\in[a,b])$ функции $x\in X$.

Для такого же класса интерполируемых операторов будет справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Оператор*

$$H_n(x)=F(x_0)\sigma_m(x)+\sum_{k=0}^{m}\sum_{\nu=1}^{\alpha_k-1}\delta^\nu F[x_k;H_{\nu k}^{(m)}(x)]+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_a^b H_{0k}^{(m)}\left[x(\tau)\right]d_\tau F[x_0(\cdot)+g(\chi(\tau,\cdot),\cdot;x_k-x_0)], \tag{8}$$

где

$$\chi(\tau,\ t)=\begin{cases}b, & \tau\ge t;\\ a, & \tau<t,\end{cases}\quad a<\tau<b;\ \ \chi(a,t)\equiv a,\ \chi(b,t)\equiv b, \tag{9}$$

является интерполяционным для оператора $F(x)$ эрмитовым многочленом относительно узлов $x_k(t)\in X$ кратности α_k $(k=0,1,...,m;\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_m-1=n)$, удовлетворяющим условиям (7). *Если $\sigma_m(x)$ – постоянная на D величина, а оператор $F(x)=D_n(x)$, то $H_n(x)\equiv F(x)$.*

Доказательство теоремы 2 в значительной мере повторяет рассуждения, приведенные в теореме 1.

Погрешность интерполирования интерполяционным многочленом (8) представима в виде

$$r_n(x)=\sum_{k=0}^{m+1}\sum_{\nu=1}^{\alpha_k-1}\delta^\nu F[x_k;H_{\nu k}^{(m+1)}(x)-H_{\nu k}^{(m)}(x)]+$$

$$+\sum_{k=1}^{m+1}\int_0^1\left\{H_{0k}^{(m+1)}\left[x(\tau)\right]-H_{0k}^{(m)}\left[x(\tau)\right]\right\}d_\tau F[x_0(\cdot)+g(\chi(\tau,\cdot),\cdot;x_k-x_0)],$$

где, как и ранее, $x_{m+1}=x,\ H_{\nu,m+1}^{(m)}(x)\equiv 0\ \left(0\le\nu\le\alpha_k-1\right)$.

Формулы эрмитова интерполирования для операторов без ограничений на структуру дифференциалов Гато. Интерполяционные формулы (5) и (8), как уже отмечалось, построены для специального класса операторов. Условия (7) для этих формул выполняются для произвольных направлений h_{ij}, хотя сами формулы данные направления не содержат. Приведем формулы, для которых не требуется от интерполируемых операторов указанных ранее ограничений на структуру дифференциалов Гато. Однако эти формулы будут включать некоторые из упомянутых направлений. Причем требуется, чтобы данные направления не обращались в нуль на множестве *D*.

Т е о р е м а 3. *Оператор*

$$H_n(x)=F(x_0)\sigma_m(x)+\sum_{k=1}^{m}\int_0^1 H_{0k}^{(m)}\left[x(\tau)\right]d_\tau F[x_0(\cdot)+\chi(\tau,\cdot)(x_k(\cdot)-x_0(\cdot))]\ +$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\sum_{\nu=1}^{\alpha_k-1}\delta^\nu F[x_k;h_{k1}h_{k2}...h_{k(\nu-1)}\tilde{h}_{k\nu}(x)], \tag{10}$$

где функция $\chi(\tau,\cdot)$ определена правилом (6), *а направления*

$$\tilde{h}_{k1}(x) = H_{1k}^{(m)}(x(s)),\ \tilde{h}_{k\nu}(x) = h_{k1}^{-1}(s)h_{k2}^{-1}(s)...h_{k(\nu-1)}^{-1}(s)H_{\nu k}^{(m)}(x(s)) \tag{11}$$

$(2 \le \nu \le \alpha_k - 1; k = 0,1,...,m)$ *является эрмитовым интерполяционным многочленом относительно узлов* $x_k(t) \in X$ *кратности* α_k $(k = 0,1,...,m; \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_m - 1 = n)$ *для оператора* $F(x)$ *и удовлетворяет условиям* (7). *В случае* $\sigma_m(x) \equiv \text{const}$ *и* $[a,b] = [0,1]$ *интерполяционная формула* (10) *сохраняет свойство инвариантности для операторных многочленов вида* (4) *степени не выше n*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя ν раз по направлениям $h_{k1}, h_{k2}, ..., h_{k\nu}$ выражение, стоящее в правой части формулы (10), и учитывая, что

$$\delta^j \tilde{h}_{k\nu}[x_i; h_{i1}h_{i2}...h_{ij}] = \delta_{ki}\delta_{j\nu}\frac{d^j}{dx^j}H_{\nu k}^{(m)}(x_i(s))h_{i\nu}(s)\ \ (0 \le j \le \alpha_i - 1; i = 0,1,...,m),$$

приходим к (7).

Пусть $F(x) = \int_0^1 b_i(t,s)\varphi_i(x(s))ds\ \ (i = 0,1,...,m).$ Тогда

$$\delta^\nu F[x_k; h_{1k}h_{k2}...h_{k(\nu-1)}\tilde{h}_{k\nu}(x)] = \int_0^1 b_i(t,s)\frac{d^\nu}{dx^\nu}\varphi_i(x_k(s))H_{\nu k}^{(m)}(x(s))ds.$$

На основании этого равенства и того факта, что $\sigma_m(x) \equiv \text{const}$, как и в случае теоремы 1, следует точность интерполяционной формулы (10) для указанных в теореме операторов вида (4) и отрезка $[a,b] = [0,1]$.

Аналогом теоремы 2 в этом случае будет следующее утверждение.

Т е о р е м а 4. *Операторный многочлен*

$$H_n(x) = F(x_0)\sigma_m(x) + \sum_{k=0}^{m}\sum_{\nu=1}^{\alpha_k - 1}\delta^\nu F[x_k; h_{k1}h_{k2}...h_{k(\nu-1)}\tilde{h}_{k\nu}(x)] +$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\int_a^b H_{0k}^{(m)}[x(\tau)]d_\tau F[x_0(\cdot) + g(\chi(\tau,\cdot),\cdot; x_k - x_0)], \tag{12}$$

где числовая функция $\chi(\tau,\cdot)$ *задается формулой* (9), *а направления* $\tilde{h}_{k\nu}(x)$ $(1 \le \nu \le \alpha_k - 1; k = 0,1,...,m)$ – *выражениями* (11), *является для оператора* $F(x)$ *интерполяционным эрмитовым многочленом относительно узлов* $x_k(t) \in X$ *кратности* α_k $(k = 0,1,...,m; \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_m - 1 = n)$, *который удовлетворяет условиям* (7). *Если* $\sigma_m(x) \equiv \text{const}$, *а* $F(x)$ *имеет вид* $D_n(x)$, *тогда* $H_n(x) \equiv F(x)$.

Формулы эрмитова интерполирования по одной переменной для операторов, заданных на декартовом произведении двух функциональных пространств. Приведем формулы интерполирования по одной переменной для оператора $F(x,y): X \times X \to Y$, аналогичные (8) и (12).

Рассмотрим операторы

$$G_m(x,y) = b(t) + \sum_{i=0}^{m}\int_a^b b_i(t,s)\varphi_i(x(s))\,y(s)ds, \tag{13}$$

где $b(t)$ – произвольно заданная функция, а $y(s)$ и $b_i(t,s)$ – некоторые функции, для которых существуют интегралы, входящие в (13).

Т е о р е м а 5. *Оператор*

$$H_n(x,y) = F(x_0, y\sigma_m(x)) + \sum_{k=0}^{m}\sum_{\nu=1}^{\alpha_k - 1}\delta_x^\nu F[(x_k, y); H_{\nu k}^{(m)}(x)] +$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\int_a^b H_{0k}^{(m)}[x(\tau)]d_\tau F[(x_0(\cdot) + g(\chi(\tau,\cdot),\cdot; x_k - x_0), y)],$$

где функция $\chi(\tau,\cdot)$ *определена правилом* (6), *является интерполяционным для оператора* $F(x,y)$ *по переменной x эрмитовым многочленом относительно узлов* $x_k(t)\in X$ *кратности* α_k $(k=0,1,...,m;\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_m-1=n)$ *и удовлетворяет условиям*

$$\delta_x^\nu H_n[(x_k,y);h_{k1}h_{k2}\cdots h_{k\nu}]=\delta_x^\nu F[(x_k,y);h_{k1}h_{k2}\cdots h_{k\nu}]\quad (0\le\nu\le\alpha_k-1;\; k=0,1,...,m). \tag{14}$$

Если $F(x,y)=G_n(x,y)$ *вида (*13), *то* $H_n(x,y)\equiv F(x,y)$.

Теорема 6. *Оператор*

$$H_n(x,y)=F(x_0,y\sigma_m(x))+\sum_{k=0}^{m}\sum_{\nu=1}^{\alpha_k-1}\delta_x^\nu F[(x_k,y);h_{k1}h_{k2}...h_{k(\nu-1)}\tilde{h}_{k\nu}(x)]+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\int_a^b H_{0k}^{(m)}\left[x(\tau)\right]d_\tau F[\left(x_0(\cdot)+g(\chi(\tau,\cdot),\cdot;x_k-x_0),y\right)],$$

где функция $\chi(\tau,\cdot)$ *определена правилом* (6), *а направления* $\tilde{h}_{k\nu}(x)$ $(1\le\nu\le\alpha_k-1;k=0,1,...,m)$ – *формулой* (11), *является интерполяционным для оператора* $F(x,y)$ *по переменной x многочленом Эрмита относительно узлов* $x_k(t)\in X$ *кратности* α_k $(k=0,1,...,m;\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_m-1=n)$ *и удовлетворяет условиям* (14). *Если* $F(x,y)$ *совпадает с оператором* $G_n(x,y)$ *вида* (13), *то интерполяционный многочлен* $H_n(x,y)\equiv F(x,y)$.

Справедливость условий (14), а также доказательство инвариантности этих формул относительно указанных многочленов $G_n(x,y)$ в значительной степени повторяет рассуждения, проведенные при доказательстве теорем 1 и 3.

Частные случаи тождественных преобразований функций. Рассмотрим некоторые интегральные операторы $g(\tau,s;x)$ вида

$$g(\tau,s;x)=\int_a^\tau\rho(s,\theta)\psi(\theta,x)d\theta=\begin{cases}0, & \tau=a;\\ x(s), & \tau=b,\end{cases}$$

для которых верны приведенные выше теоремы.

1. Пусть $X=X(\mathbb{R}_+)$ – совокупность функций, являющихся преобразованиями Ганкеля и допускающих преобразование этого вида. Учитывая прямое преобразование Ганкеля $\psi(\tau,x)=\int_0^\infty sk(s,\tau)x(s)ds$, где $k(s,\tau)=J_\nu(s\tau)$ – функция Бесселя 1-го рода индекса ν $(\nu=0,1,2,\ldots)$, $J_\nu(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z/2)^{2n+\nu}}{\Gamma(\nu+n+1)n!}$, и обратное преобразование Ганкеля $x(s)=\int_0^\infty\tau k(\tau,s)\psi(\tau,x)d\tau$, запишем тождественный оператор [1, с. 499] вида

$$x(s)=\int_0^\infty\tau k(\tau,s)\int_0^\infty\xi k(\xi,\tau)x(\xi)d\xi d\tau.$$

Очевидно, что интегральное преобразование $g(\tau,s;x)$, построенное по правилу

$$g(\tau,s;x)=\int_0^\tau\theta k(\theta,s)\psi(\theta,x)d\theta, \tag{15}$$

обладает свойствами $g(\infty,s;x)\equiv x(s)$ и $g(0,s;x)\equiv 0$.

Следовательно, если положить $\left[a,b\right]=\left[0,\infty\right]$, в том числе в выражении (9), то формулы для интерполяционных многочленов Эрмита из теорем 2, 4–6, где $g(\tau,s;x)$ задается равенством (15), остаются верными в пространстве $X=X(\mathbb{R}_+)$.

В частности, если $m=1$, $\alpha_0=\alpha_1=1$, $\varphi_0(s)=\exp\{\lambda_0 s\}$, $\varphi_1(s)=\exp\{\lambda_1 s\}, \lambda_0<\lambda_1$, то справедлива следующая формула линейной интерполяции лагранжева типа:

$$L_1(x,y)=F(x_0,(l_0(x)+l_1(x))y)+\int_0^\infty l_1\left[x(\tau)\right]d_\tau F[x_0(\cdot)+g(\chi(\tau,\cdot),\cdot;x_1-x_0)],$$

где

$$l_0(x(s))\equiv l_0(x)=\frac{\exp\{\lambda_0(x-x_1)\}-\exp\{\lambda_1(x-x_1)\}}{\exp\{\lambda_0(x_0-x_1)\}-\exp\{\lambda_1(x_0-x_1)\}},$$

$$l_1(x(s))\equiv l_1(x)=\frac{\exp\{\lambda_0(x-x_0)\}-\exp\{\lambda_1(x-x_0)\}}{\exp\{\lambda_0(x_1-x_0)\}-\exp\{\lambda_1(x_1-x_0)\}}.$$

2. Рассмотрим интегральное уравнение Абеля на отрезке $[a,b]$, которое имеет вид

$$\int_a^\xi \frac{y(s)ds}{(\xi-s)^{1-\alpha}}=x(\xi)\ \left(\xi>a,0<\alpha<1\right). \tag{16}$$

Через $C^1[a,b]$ и $AC[a,b]$ обозначим соответственно пространства непрерывно дифференцируемых и абсолютно непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций.

Если $x(\xi)\in C^1[a,b]$, то уравнение (16) имеет единственное непрерывное решение

$$y(\xi)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{d\xi}\int_a^\xi \frac{x(s)ds}{(\xi-s)^\alpha}. \tag{17}$$

Известно также [2], что если $x(\xi)\in AC[a,b]$, то уравнение (16) разрешимо в $L_1(a,b)$, и его решение $y(\xi)$ может быть представлено в виде

$$y(\xi)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left\{\frac{x(a)}{(\xi-a)^\alpha}+\int_a^\xi \frac{x'(s)ds}{(\xi-s)^\alpha}\right\}. \tag{18}$$

Тождественный оператор, построенный с помощью (16) и (17) или (16) и (18), имеет вид

$$x(\xi)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_a^\xi \frac{1}{(\xi-t)^{1-\alpha}}\left\{\frac{d}{dt}\int_a^t \frac{x(s)ds}{(t-s)^\alpha}\right\}dt$$

или

$$x(\xi)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_a^\xi \frac{1}{(\xi-t)^{1-\alpha}}\left\{\frac{x(a)}{(t-a)^\alpha}+\int_a^t \frac{x'(s)ds}{(t-s)^\alpha}\right\}dt$$

в пространстве $C^1[a,b]$ или $AC[a,b]$ соответственно.

Пусть X – одно из этих пространств. Введем обозначения

$$g(\tau,\xi;x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_a^\tau \frac{\gamma(\xi,t)}{(\xi-t)^{1-\alpha}}\psi(t,x)dt\quad (\tau,\xi\in[a,b];0<\alpha<1), \tag{19}$$

где

$$\gamma(\xi,t)=\begin{cases}1, & \xi\ge t;\\ 0, & \xi<t,\end{cases}\qquad \psi(t,x)=\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_a^t \frac{x(s)ds}{(t-s)^\alpha}, & x(s)\in C^1[a,b];\\ \dfrac{x(a)}{(t-a)^\alpha}+\displaystyle\int_a^t \frac{x'(s)ds}{(t-s)^\alpha}, & x(s)\in AC[a,b].\end{cases}$$

Справедливость равенства $g(a,\xi;x)=0$ очевидна. Тождество $g(b,\xi;x)\equiv x(\xi)$, $x\in X$, также имеет место. Действительно,

$$g(b,\xi;x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_a^b\frac{\gamma(\xi,t)}{(\xi-t)^{1-\alpha}}\psi(t,x)dt=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_a^\xi\frac{1}{(\xi-t)^{1-\alpha}}\psi(t,x)dt\equiv x(\xi).$$

Формулы для многочленов Эрмита из теорем 2, 4–6, где $g(\tau,s;x)$ задается равенством (19), также остаются верными на рассматриваемых множествах *X*.

3. Пусть $X=L_2(\mathbb{R})$. Преобразование Фурье произвольной функции $x\in X$ определим [3] следующим образом:

$$y(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\theta s}x(s)ds,\ \theta\in\mathbb{R},$$

понимая этот интеграл как предел в среднем по норме в L_2:

$$y(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}l.i.m._{N\to\infty}\int_{-N}^{N}e^{i\theta s}x(s)ds,\ \theta\in\mathbb{R}.$$

Классическая теория Планшереля описывает действие оператора Фурье из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$, причем обратный оператор имеет вид

$$x(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}l.i.m._{N\to\infty}\int_{-N}^{N}e^{-i\theta s}y(s)ds,\theta\in\mathbb{R}.$$

Учитывая сказанное, определим преобразование $g(\tau,s;x)$ следующим правилом:

$$g(\tau,s;x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\tau}e^{-is\theta}\psi(\theta,x)d\theta,\ \psi(\theta,x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\theta s}x(s)ds. \tag{20}$$

В данном случае формулы Эрмита из теорем 2, 4–6, где $g(\tau,s;x)$ задается равенством (20), а интегрирование в указанных формулах ведется по $\mathbb{R}$, также остаются справедливыми на множестве $L_2(\mathbb{R})$.

4. Пусть $X=L_2(\mathbb{R}_+)$. Известно [4, с. 154; 5], что косинус- и синус-преобразования Фурье

$$y(\theta)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\begin{Bmatrix}\cos(\theta s)\\ \sin(\theta s)\end{Bmatrix}x(s)ds$$

имеют в этом пространстве формулы обращения аналогичного вида.

Обозначим

$$g(\tau,s;x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\tau k(s,\theta)\psi(\theta,x)d\theta, \tag{21}$$

где $k(s,\theta)=\begin{Bmatrix}\cos(s\theta)\\ \sin(s\theta)\end{Bmatrix},\ \psi(\theta,x)=\int_0^\infty\begin{Bmatrix}\cos(\theta s)\\ \sin(\theta s)\end{Bmatrix}x(s)ds$.

Формулы из теорем 2, 4–6, где $g(\tau,s;x)$ задается равенством (21), а интегрирование в указанных формулах ведется по $\mathbb{R}_+$, остаются справедливыми на рассматриваемом множестве $L_2(\mathbb{R}_+)$.

П р и м е р 1. Пусть $F(x)=\int_0^1 K[t,s,x(s)]ds$ – оператор Урысона, узлы интерполирования $x_\nu(s)\in C[0,1]$ $(\nu=0,1,...,m)$ и $\varphi_k(s)=s^k$ – алгебраическая система функций $(k=0,1,...,4m+3)$, $t\in[c,d]$.

С учетом тождества $\sigma_m(x)=\sum_{k=0}^m H_{0k}(x)\equiv 1$, справедливого для рассматриваемой алгебраической системы функций, интерполяционный многочлен Эрмита (5) относительно узлов четвертой кратности, т. е. $\alpha_\nu=4;\ \nu=0,1,...,m$, примет вид

$$H_{4m+3}(x)=\sum_{k=0}^{m}\int_0^1\{K[t,s,x_k(s)]H_{0k}^{(m)}(x(s))+$$
$$+K_x'[t,s,x_k(s)]H_{1k}^{(m)}(x(s))+K_x''[t,s,x_k(s)]H_{2k}^{(m)}(x(s))+K_x'''[t,s,x_k(s)]H_{3k}^{(m)}(x(s))\}ds,$$

где операторы $H_{\nu k}^{(m)}(x(s))$ $(\nu=0,1,2,3)$ задаются равенствами

$$H_{0k}^{(m)}(x(s))\equiv H_{0k}^{(m)}(x)=l_k^4(x)\Big[1+C_{1k}\left(x-x_k\right)+C_{2k}\left(x-x_k\right)^2+C_{3k}\left(x-x_k\right)^3\Big],$$
$$H_{1k}^{(m)}(x(s))\equiv H_{1k}^{(m)}(x)=l_k^4(x)\Big[\left(x-x_k\right)+C_{1k}\left(x-x_k\right)^2+C_{2k}\left(x-x_k\right)^3\Big],$$
$$H_{2k}^{(m)}(x(s))\equiv H_{2k}^{(m)}(x)=\frac{l_k^4(x)}{2}\Big[\left(x-x_k\right)^2+C_{1k}\left(x-x_k\right)^3\Big],$$
$$H_{3k}^{(m)}(x(s))\equiv H_{3k}^{(m)}(x)=\frac{1}{6}l_k^4(x)(x-x_k)^3,\quad C_{1k}=-\frac{2\omega_m''\left(x_k\right)}{\omega_m'\left(x_k\right)},$$
$$C_{2k}=-\frac{2\omega_m'''\left(x_k\right)}{3\omega_m'\left(x_k\right)}+\frac{5}{2}\left[\frac{\omega_m''\left(x_k\right)}{\omega_m'\left(x_k\right)}\right]^2,\quad C_{3k}=-\frac{5}{2}\left[\frac{\omega_m''\left(x_k\right)}{\omega_m'\left(x_k\right)}\right]^3+\frac{5\omega_m''\left(x_k\right)\omega_m'''\left(x_k\right)}{3\left[\omega_m'\left(x_k\right)\right]^2}-\frac{\omega_m^{(4)}\left(x_k\right)}{6\omega_m'\left(x_k\right)},$$
$$\omega_m(x)=\prod_{i=0}^{m}(x-x_i),\ \ l_k(x)=\frac{\omega_m(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)},\ \ x=x(s),\ \ x_k\quad x_k(s),\ \ k=0,1,\dots,m\,.$$

П р и м е р 2. Пусть $F(x)=f\left(\int_0^1 K[t,s,x(s)]ds\right)$, узлы интерполирования $x_\nu(s)\in C[0,1]$ $(\nu=0,1,\dots,m)$ и $\varphi_k(s)=\cos(ks)$ – четная тригонометрическая система функций $(k=0,1,\dots,2m+1)$, $t\in[c,d]$.

Тогда для интерполяционного многочлена Эрмита относительно узлов второй кратности будет справедлива формула (5), в которой $\alpha_\nu\equiv 2$ $(\nu=0,1,\dots,m)$, $\sigma_m(x)\equiv 1$, дифференциал Гато вычисляется по правилу

$$\delta F[x,h]=f'\left(\int_0^1 K[t,s,x(s)]ds\right)\int_0^1 K_x'[t,s,x(s)]h(s)ds,$$

а операторы $H_{0k}^{(m)}(x(s))$ и $H_{1k}^{(m)}(x(s))$ имеют вид

$$H_{0k}^{(m)}(x(s))\equiv H_{0k}^{(m)}(x)=l_k^2(x)\left(1+\frac{\cos x-\cos x_k}{\sin x_k}\left\{\frac{S_m''(x_k)}{S_m'(x_k)}-\operatorname{ctg}x_k\right\}\right),$$
$$H_{1k}^{(m)}(x(s))\equiv H_{1k}^{(m)}(x)=l_k^2(x)\frac{\cos x_k-\cos x}{\sin x_k},$$

где $S_m(x)=\prod_{k=0}^{m}\left(\cos x-\cos x_k\right)$, $l_k(x)=\dfrac{S_m(x)\sin x_k}{(\cos x_k-\cos x)S_m'(x_k)}$, $x=x(s)$, $x_k=x_k(s)$, $k=0,1,\dots,m$.

В заключение отметим, что результаты, полученные в работе, могут быть использованы в качестве основы для построения приближенных методов решения интегральных, дифференциальных и других видов нелинейных операторных уравнений. Ряд интерполяционных формул другой структуры, представляющих решение задачи Эрмита с узлами произвольной кратности, также основанных на тождественных преобразованиях функций, имеется в работе [6]. Достаточно полная теория операторного интерполирования изложена в монографиях [7, 8].

Список использованных источников

1. Ватсон, Г. Н. Теория бесселевых функций: в 2 т. / Г. Н. Ватсон. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – Т. 1. – 799 с.

2. Samko, S. G. Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications / S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev. – New York [et al.]: Gordon and Breach Science Publishers, 1993. – 1006 p.

3. Титмарш, Е. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титмарш. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. – 418 с.

4. Krylov, V. I. A Handbook of Methods of Approximate Fourier Transformation and Inversion of the Laplace Transformation / V. I. Krylov, N. S. Skoblya. – M.: Mir Publ., 1977. – 273 p.

5. Бейтмен, Г. Таблицы интегральных преобразований: в 2 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1969. – Т. 1: Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – 344 с.

6. Янович, Л. А. О взаимосвязи интерполирования операторов и функций / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 1998. – Т. 42, № 3. – С. 9–16.

7. Makarov, V. L. Methods of Operator Interpolation / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, L. A. Yanovich // Праці Ін-ту математики НАН України. – Київ, 2010. – Т. 83. – С. 1–517.

8. Янович, Л. А. Основы теории интерполирования функций матричных переменных / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко. – Минск: Беларус. навука, 2016. – 281 с.

References

1. Watson G. N. A *Treatise on the Theory of Bessel Functions.* Cambridge University Press, 1944. 804 p.

2. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications.* New York-Philadephia-London-Paris-Mountreux-Tokyo-Melbourne, Gordon and Breach Science Publishers, 1993. 1006 p.

3. Titmarsh E. *Introduction in the theory of Fourier integrals.* Moscow, Leningrad, State Publishing House of Technical and Theretical Literature, 1948. 418 p. (in Russian.).

4. Krylov V. I., Skoblya N. S. *A Handbook of Methods of Approximate Fourier Transformation and Inversion of the Laplace Transformation*. Moscow, Mir Publ., 1977. 273 p.

5. Bateman G., Erdelyi A. *Tables of integral transforms. Vol. 1: Transformations of Fourier, Laplace, Mellin*. Moscow, Nauka Publ., 1969. 344 p. (in Russian.).

6. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. About interrelation of interpolation of operators and functions. *Doklady Natsional'noy akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 1998, vol. 42, no 3, pp. 9–16 (in Russian.).

7. Makarov V. L., Khlobystov V. V., Yanovich L. A. Methods of Operator Interpolation. *Pratsi institutu matematiki NAN Ukraïni* [Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine]. Kiev, 2010, vol. 83, pp. 1–517.

8. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. *Bases of the theory of interpolation of functions of matrix variables*. Minsk, Belaruskaya Navuka Publ., 2016. 281 p. (in Russian.).

Информация об авторе

Игнатенко Марина Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ignatenkomv@bsu.by. https://orcid.org/0000-0002-8029-1842

Information about the author

Marina V. Ignatenko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of Web-Technologies and Computer Simulation Department, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ignatenkomv@bsu.by. https://orcid.org/0000-0002-8029-1842