ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.671
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-290-299

Поступила в редакцию 07.05.2018
Received 07.05.2018

П. П. Забрейко, А. В. Кривко-Красько

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМ РОЛЛЯ И ДАРБУ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Аннотация. Как известно, классические теоремы Ролля и Дарбу для функции одной переменной устанавливают существование критической точки по поведению функции на концах отрезка. Возникает вопрос о возможности переноса теорем Ролля и Дарбу для функций двух переменных. Более точно, определяется ли существование критической точки в $\bar{\Omega}$ по поведению функции f на границе $\partial\Omega$ области Ω. Как было показано А. И. Перовым, такие обобщения можно получить с помощью понятия вращения. В настоящей работе устанавливаются более глубокие связи между теоремами Ролля, Дарбу и вращением векторного поля на границе $\partial\Omega$. Также приводятся некоторые новые формулы для вычисления вращения векторного поля на границе $\partial\Omega$, на основе которых сформулированы утверждения о существовании критических точек.

Ключевые слова: теорема Ролля, теорема Дарбу, функция двух переменных, критическая точка, векторное поле, вращение, относительное вращение, индекс особой точки, экстремум функции

Для цитирования. Забрейко, П. П. Обобщение теорем Ролля и Дарбу для функций двух переменных / П. П. Забрейко, А. В. Кривко-Красько // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 3. – С. 290–299. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-290-299

P. P. Zabreiko, A. V. Krivko-Krasko

Belarusian State University, Minsk, Belarus

EXTENSITION OF THE ROLLE AND DARBOUX THEOREMS TO THE FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

Abstract. As well known, the classical Rolle and Darboux theorems for a function of one variable establish the existence of a critical point in the behavior of a function at the ends of a closed interval. The question arises of the possibility of extension of the Rolle and Darboux theorems to functions of two variables. More precisely is the existence of a critical point in $\bar{\Omega}$ determined by the behavior of the function f on the boundary of the $\partial\Omega$ domain Ω. As shown by A. I. Perov, such extension can be obtained with the help of the concept of rotation. In this article, we establish deeper relations between the Rolle and Darboux theorems and the rotation of a vector field on the boundary $\partial\Omega$. We also present some new formulas for calculating the rotation of a vector field on the boundary, on the basis of which statements about the existence of critical points are formulated.

Keywords: Rolle theorem, Darboux theorem, function of two variables, critical point, vector field, rotation, relative rotation, singular point index, extremum of the function

For citation. Zabreiko P. P., Krivko-Krasko A. V. Extension of the Rolle and Darboux theorems to the functions of two variables. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 290–299 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-290-299

Введение. В классическом анализе существуют две известные теоремы об обращении в нуль производной функции, заданной на отрезке $[a,b]$. Первая из них, теорема Ролля, утверждает, что производная дифференцируемой функции обращается внутри отрезка $[a,b]$ в нуль, если значения этой функции на концах отрезка совпадают (рис. 1, *a*). Вторая, теорема Дарбу, утверждает, что дифференцируемая функция, производная которой на концах отрезка имеет разные знаки, также имеет внутри отрезка точку, в которой производная обращается в нуль (рис. 1, *b*). При этом в теореме Ролля никакой информации о самой производной не требуется; в теореме Дарбу требуется информация о производной функции на концах отрезка [1].

Важно отметить, что указанные теоремы не вытекают одна из другой. Так, в условиях теоремы Ролля условие теоремы Дарбу, вообще говоря, не выполнено, и наоборот.

В обеих теоремах (теоремы Ролля и Дарбу) существование точки, в которой производная функции обращается в нуль (критической точки), устанавливается по поведению функции на границе отрезка. Возникает естественное желание ответить на вопрос о возможности сохранения такого утверждения для функций нескольких переменных, т. е. определяется ли существование критической точки области Ω по поведению функции $f(x)$ на границе области $\partial\Omega$. В настоящей работе ограничимся случаем функции двух переменных.

Естественно для доказательства существования критической точки использовать вращение векторного поля $f'(x)$. Как известно, если вращение векторного поля $f'(x)$ на границе области $\partial\Omega$ отлично от нуля, то существует критическая точка [3].

Следует отметить, что в зависимости от значения вращения соответствующего векторного поля $f'(x)$ возможны различные случаи выполнения теорем Ролля и Дарбу. Так, на рис. 1 *a*, *b* представлены различные случаи выполнения теоремы Ролля: когда вращение соответствующего векторного поля отлично от нуля (см. рис. 1, *a*) и равно нулю (векторное поле определяется через $f'(x)$; см. 1, *b*). На рис. 1 *c*, *d* показаны соответственно различные случаи выполнения теоремы Дарбу: когда вращение соответствующего векторного поля отлично от нуля (см. рис. 1, *c*) и равно нулю (см. рис. 1, *d*).

Перейдем к функциям двух переменных. Рассмотрим в области Ω, ограниченной простой жордановой кривой $\partial\Omega$ (в силу теоремы Жордана, область Ω односвязна), непрерывно дифференцируемую на $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ функцию *f*.

Наиболее естественным обобщением теоремы Дарбу на функции двух переменных является утверждение, основанное (см. [3, 4]) на понятии вращения $\gamma\left(f'(x), \Omega\right)$ векторного поля $f'(x)$ на $\partial\Omega$, – условия теоремы Дарбу означают, что поле $f'(x)$ на границе $\partial\Omega = \{a, b\}$ области $\Omega = (a, b)$

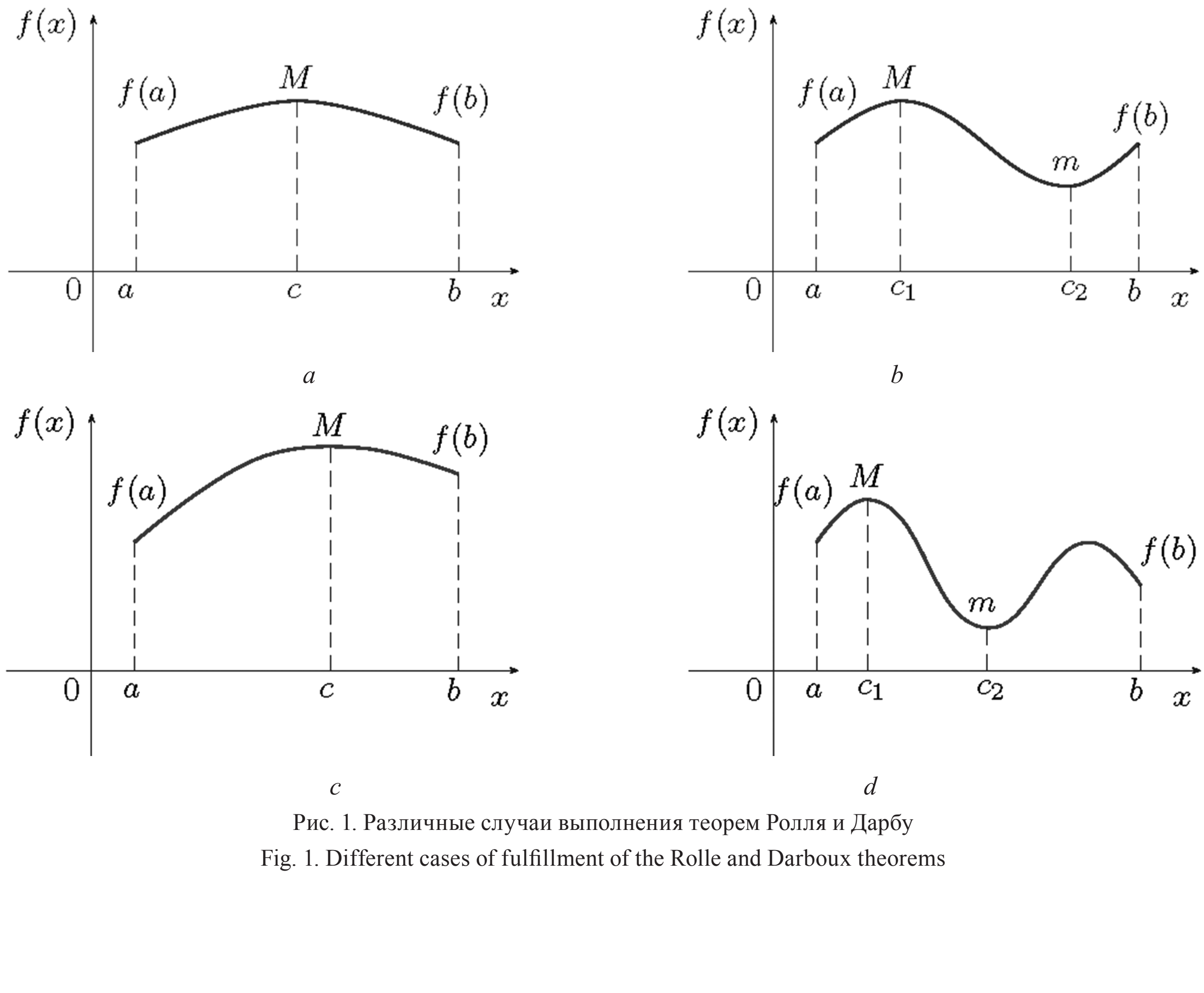


Рис. 1. Различные случаи выполнения теорем Ролля и Дарбу

Fig. 1. Different cases of fulfillment of the Rolle and Darboux theorems

не обращается в нуль и его вращение $\gamma\left(f'(x),\Omega\right)$ отлично от нуля. Однако последнее утверждение верно [3, 4] и для функций от нескольких переменных: *если поле $f'(x)$ на границе $\partial\Omega$ области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ не обращается в нуль и его вращение $\gamma\left(f'(x),\Omega\right)$ на границе этой области отлично от нуля, то функция $f:\bar{\Omega}\to\mathbb{R}$ имеет в Ω по крайней мере одну критическую точку.* В связи с этим утверждением возникает задача о вычислении вращения $\gamma\left(f'(x),\Omega\right)$. Ниже будут приведены некоторые новые формулы вычисления вращения векторных полей на плоскости.

Аналогом предположения в теореме Ролля будет предположение, что функция f является на $\partial\Omega$ постоянной. В таком случае очевидно существование точки x^* такой, что $f'(x^*)=0$ (доказательство этого утверждения дословно повторяет доказательство теоремы Ролля). Однако такое обобщение теоремы Ролля не слишком интересно – реально оно означает, что $\partial\Omega$ является линией уровня функции f. Можно сформулировать и более сложное утверждение: *если линия уровня функции f касается границы $\partial\Omega$ в одной или нескольких точках и при этом целиком лежит в области Ω, то существует точка x^* такая, что $f'(x^*)=0$.*

Как показывают приведенные выше примеры, вращение $\gamma\left(f'(x),\Omega\right)$ векторного поля $f'(x)$ на границе $\partial\Omega=\{a,b\}$ области $\Omega=(a,b)$ может обращаться в нуль, и по этой причине теория вращения при переходе к функциям многих переменных непосредственно неприменима. Однако в соответствующих построениях можно предполагать, что $f(\Omega)\subset f(\partial\Omega)$ – при невыполнении этого включения функция f в области Ω принимает значения вне $[m_-(f),m_+(f)]$ $\left(m_-(f)=\min\limits_{x\in\partial\Omega} f(x),\ m_+(f)=\max\limits_{x\in\partial\Omega} f(x)\right)$ и, значит, имеет по крайней мере одну критическую точку. Более того, при исследовании критических точек функций многих переменных, как нетрудно видеть, можно даже предполагать, что $m_-(f)<f(x)<m_+(f)$. В этой ситуации для доказательства существования критических точек функции f в области Ω можно также пытаться использовать понятие вращения. На этом пути получена известная теорема Перова [5] о существовании критических точек функций двух переменных. Таким образом, при обобщении теоремы Ролля на функции многих переменных можно использовать вышеупомянутое дополнительное условие.

Оказывается, что *обе теоремы (теоремы Ролля и Дарбу) непосредственно переносятся на двумерный случай.*

Отметим, что если функция $\varphi(s)$ имеет только один максимум или один минимум, то $\gamma\left(f'(x),\Omega\right)$ может быть равно нулю. На рис. 2, *a* представлен пример такого графика функции $\varphi(s)$. Более

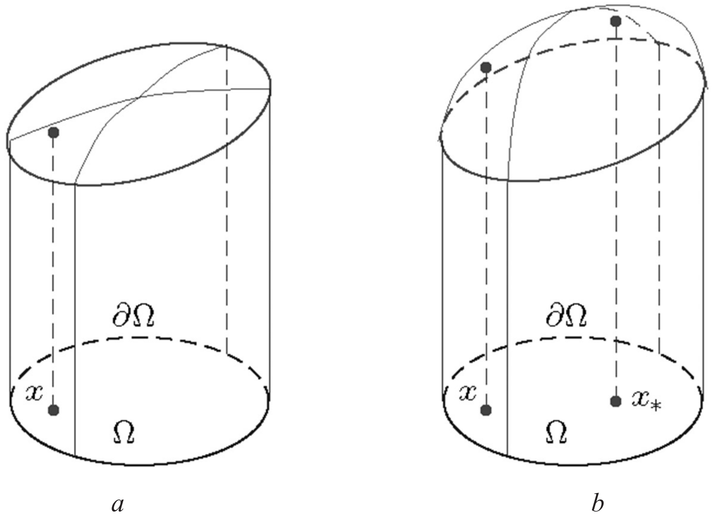


Рис. 2. Критические точки функции $f(x)$

Fig. 2. Critical points of the function $f(x)$

того, в работе [5] показано, что если функция $\varphi(s)$ имеет один максимум и один минимум, то функция f может быть продолжена на Ω так, что не будет иметь в Ω критических точек. Рис. 2 *a*, *b* иллюстрирует, что по функции $\varphi(s)$ в общем случае нельзя сказать, есть ли критические точки у функции f или нет. Так, на рис. 2, *a* представлен случай, когда функция f не имеет критических точек, а на рис. 2, *b* – имеет.

Теорема Дарбу. Пусть $\Phi:\bar{\Omega}\to\mathbb{R}^2$ – произвольное непрерывное векторное поле, не обращающееся в нуль на границе $\partial\Omega$ области Ω. Будем предполагать, что граница $\partial\Omega$ области Ω является простой жордановой кривой (в силу теоремы Жордана, область Ω односвязна).

Опишем одну общую схему вычисления вращения $\gamma(\Phi,\Omega)$ в описанной ситуации (некоторые частные случаи этой схемы приведены в [3]). Пусть h – произвольный ненулевой вектор; положим

$$H(\Phi,\partial\Omega)=\{x\in\partial\Omega:\Phi(x)\upuparrows h\}.$$

Здесь символ $\upuparrows$ означает, что векторы $\Phi(x)$ и h одинаково направлены, т. е. $\Phi(x)=\lambda h$ при некотором положительном λ. Множество $H(\Phi,\partial\Omega)$ – замкнутое подмножество множества $\partial\Omega$ (рис. 3).

В силу замкнутости множества $H(\Phi,\partial\Omega)$, дополнение $\partial\Omega\setminus H(\Phi,\partial\Omega)$ к нему в множестве $\partial\Omega$ является объединением конечного или счетного числа интервалов $I_\nu=(a_\nu,b_\nu)$, где $\nu=1,2,\ldots,n$ или $\nu=1,2,\ldots$ соответственно. Обозначим это множество интервалов через $\mathcal{H}(\Phi,\Omega)$. При этом можно считать, что при всех $\nu\in\mathcal{H}(\Phi,\Omega)$ переход от точки a_ν к точке b_ν осуществляется в положительном направлении обхода границы $\partial\Omega$ (против часовой стрелки).

Отметим также, что в случае конечного множества $\mathcal{H}(\Phi,\Omega)$ нумерация интервалов $\{I_\nu:\nu\in\mathcal{H}(\Phi,\Omega)\}$ может быть выбрана так, что при возрастании номера ν соответствующий интервал сдвигается на $\partial\Omega$ в положительном направлении; в случае же бесконечного множества $\mathcal{H}(\Phi,\Omega)$ нумераций с подобным свойством обычно не существует.

Пусть I_ν – один из интервалов из $\mathcal{H}(\Phi,\Omega)$. Очевидно, в граничных точках a_ν, b_ν этого интервала векторы $\Phi(a_\nu)$ и $\Phi(b_\nu)$ одинаково направлены с вектором h. Для точек $x\in\partial\Omega$ из интервала I_ν вектор $\Phi(x)$ не совпадает с направлением вектора h. Однако при значениях x из интервала I_ν, близких к a_ν, вектор $\Phi(x)$ направлен почти одинаково с вектором h. При этом эти векторы $\Phi(x)$ будут получаться из вектора $\Phi(a_\nu)$ малым изменением длины и малым поворотом либо в положительном направлении (против часовой стрелки), либо в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Аналогично при значениях x из интервала I_ν, близких к b_ν, вектор $\Phi(x)$ будет получаться из вектора $\Phi(b_\nu)$ малым изменением длины и малым поворотом либо в положительном (против часовой стрелки), либо в отрицательном (по часовой стрелке) направлении.

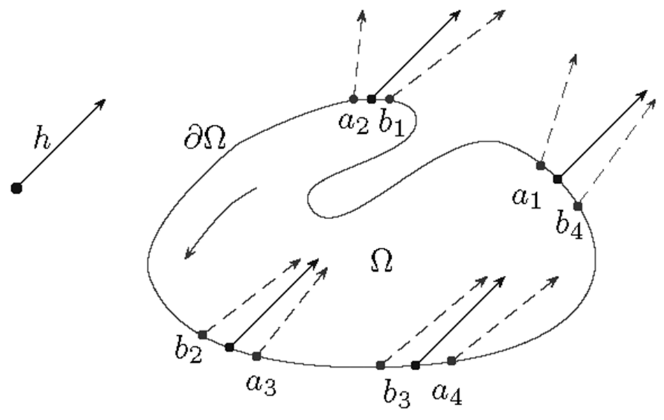


Рис. 3. Элементы множества $H(\Phi,\partial\Omega)$ ($n=4$)

Fig. 3. Elements of the set $H(\Phi,\partial\Omega)$ ($n=4$)

Для каждого интервала I_ν из $\mathcal{H}(\Phi,\Omega)$ векторного поля Φ на границе $\partial\Omega$ области Ω определим его h-характеристику $\chi_h(I_\nu)$:

– равную 1, если векторы $\Phi(x)$ вблизи точки a_ν получаются из вектора $\Phi(a_\nu)$ малым поворотом в положительном направлении, а вблизи точки b_ν – из вектора $\Phi(b_\nu)$ малым поворотом в отрицательном направлении;

– равную –1, если векторы $\Phi(x)$ вблизи точки a_ν получаются из вектора $\Phi(a_\nu)$ малым поворотом в отрицательном направлении, а вблизи точки b_ν – из вектора $\Phi(b_\nu)$ малым поворотом в положительном направлении;

– равную 0, если векторы $\Phi(x)$ вблизи точек a_ν и b_ν получаются малым поворотом из векторов $\Phi(a_\nu)$ и $\Phi(b_\nu)$ соответственно в одном и том же (положительном или отрицательном) направлении.

Непрерывное векторное поле Φ на компактном множестве $\partial\Omega$ равномерно непрерывно. Поэтому существует такое положительное число δ, что для любых двух точек $x', x'' \in \partial\Omega$, расстояние между которыми не превышает δ, угол между векторами $\Phi(x')$ и $\Phi(x'')$ не превышает 30º. Тем самым на любой дуге границы $\partial\Omega$, диаметр которой меньше δ, углы между векторами $\Phi(x')$ и $\Phi(x'')$ в точках x' и x'' этой дуги не превышают 30º. В частности, это верно для каждого интервала $I_\nu \in \mathcal{H}(\Phi,\Omega)$, диаметр которого меньше δ. Но отсюда следует, что h-характеристика $\chi_h(I_\nu)$ равна нулю. Нетрудно видеть, что среди интервалов $I_\nu \in \mathcal{H}(\Phi,\Omega)$ может быть только конечное число интервалов с диаметром больше δ. Тем самым, в случае бесконечного множества $\mathcal{H}(\Phi,\Omega)$ для всех ν, кроме конечного их числа, h-характеристики $\chi_h(I_\nu)$ равны нулю. Таким образом, в описанной ситуации определена сумма $\sum\limits_{\nu\in\mathcal{H}(\Phi,\Omega)} \chi_h(I_\nu)$.

Пусть теперь для интервала I_ν h-характеристика равна 1. Тогда при движении точки $x \in I_\nu$ от точки a_ν к точке b_ν (такое движение осуществляется в положительном направлении) вектор $\Phi(x)$ должен сделать один поворот в положительном направлении. Действительно, в противном случае в близких к точке a_ν точках $x \in I_\nu$ он находится «по левую сторону» от вектора h, а в близких к точке b_ν точках $x \in I_\nu$ – «по правую сторону» от вектора h. Если бы вектор $\Phi(x)$ при движении точки $x \in I_\nu$ от a_ν к b_ν не делал полного оборота против часовой стрелки, то в некоторой точке $x \in I_\nu$ его направление должно было бы совпасть с направлением вектора h, что невозможно. Аналогично, если для I_ν h-характеристика равна –1, то при движении точки $x \in I_\nu$ от a_ν к b_ν вектор $\Phi(x)$ сделает один оборот по часовой стрелке.

Проведенные рассуждения означают справедливость следующей леммы.

Л е м м а 1. *Пусть* $\Phi:\bar{\Omega}\to\mathbb{R}^2$ *– произвольное непрерывное векторное поле, не обращающееся в нуль на границе* $\partial\Omega$ *области* Ω, *и* h *– произвольный ненулевой вектор. Тогда справедливо равенство*

$$\gamma(\Phi,\Omega) = \sum_{\nu\in\mathcal{H}(\Phi,\Omega)} \chi_h(I_\nu). \tag{1}$$

Формула (1) является обобщением формулы (1.19) ([3], гл. 1) вычисления вращения $\gamma(\Phi,\Omega)$ векторного поля Φ на границе $\partial\Omega$ области Ω.

Используя лемму 1, можно сформулировать следующий аналог теоремы Дарбу для функций двух переменных.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $f:\bar{\Omega}\to\mathbb{R}$ *– непрерывно дифференцируемая функция. И пусть для некоторого ненулевого вектора* h *справедливо неравенство*

$$\sum_{\nu\in\mathcal{H}(\Phi,\Omega)} \chi_h(I_\nu) \neq 0. \tag{2}$$

Тогда функция $f(x)$ *имеет в* $\bar{\Omega}$ *по крайней мере одну критическую точку.*

Действительно, если $f(x)$ имеет критические точки на $\partial\Omega$, то утверждение тривиально. Если же функция $f(x)$ не имеет на $\partial\Omega$ критических точек, то, в силу леммы 1, $\gamma\left(f'(x),\Omega\right)\neq 0$, и поэтому $f(x)$ имеет по крайней мере одну критическую точку в $\overline{\Omega}$.

Приведем описание еще одного способа вычисления вращения $\gamma(\Phi,\Omega)$ векторного поля Φ на границе $\partial\Omega$ области Ω, который не зависит от выбора вектора h. Для такого способа необходимо дополнительно предположить, что граница $\partial\Omega$ – гладкая кривая. Тогда в каждой $x\in\partial\Omega$ существует касательный вектор и вектор внешней нормали n.

Обозначим через $\theta(x)$ угол между вектором $\Phi(x)$ и направлением внешней нормали n в точке $x\in\partial\Omega$. Приращение функции $\theta(x)$ после обхода границы $\partial\Omega$, выраженное в единицах полного оборота, называют *относительным вращением* поля Φ на границе $\partial\Omega$ области Ω [3]. Обозначим относительное вращение через $\tilde{\gamma}(\Phi,\Omega)$.

Вращение $\gamma(\Phi,\Omega)$ связано с относительным вращением $\tilde{\gamma}(\Phi,\Omega)$ поля Φ на границе $\partial\Omega$ области Ω равенством ([3], упр. 4.7, с. 43):

$$\gamma(\Phi,\Omega)=\tilde{\gamma}(\Phi,\Omega)-\gamma_0, \tag{3}$$

где γ_0 – вращение поля внешних нормалей.

Для вычисления относительного вращения $\tilde{\gamma}(\Phi,\Omega)$ проведем рассуждения, которые во многом повторяют вышеприведенные рассуждения для вычисления вращения $\gamma(\Phi,\Omega)$ векторного поля Φ на границе $\partial\Omega$ области Ω по произвольному вектору h.

Положим

$$N(\Phi,\partial\Omega)=\{x\in\partial\Omega:\Phi(x)\upuparrows n\}.$$

Если поле $\Phi(x)$ не вырождено, то множество $N(\Phi,\partial\Omega)$ является замкнутым и, в свою очередь, дополнение $\partial\Omega\setminus N(\Phi,\partial\Omega)$ является объединением конечного или счетного числа интервалов $J_\sigma=(a_\sigma,b_\sigma)$, где $\sigma=1,2,\dots,s$ или $\sigma=1,2,\dots$ соответственно. Обозначим это множество интервалов через $\mathcal{N}(\Phi,\Omega)$.

В соответствии с предыдущими рассуждениям для каждого интервала J_σ определим его n-характеристику $\chi_n(J_\sigma)$. При этом n-характеристика $\chi_n(J_\sigma)$ очевидным образом совпадает с числом поворотов вектора $\Phi(x)$ от a_σ к b_σ, в то же время вне интервалов J_σ вектор $\Phi(x)$ не делает ни одного оборота.

В силу (3) и равенства $\gamma_0=1$ справедлива следующая

Л е м м а 2. *Пусть* $\Phi:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^2$ *– произвольное непрерывное векторное поле, не обращающееся в нуль на границе* $\partial\Omega$ *области* Ω, *и граница* $\partial\Omega$ *области* Ω *– гладкая кривая. Тогда справедливо равенство*

$$\gamma(\Phi,\Omega)=\sum_{\sigma\in\mathcal{N}(\Phi,\Omega)}\chi_n(J_\sigma)-1. \tag{4}$$

Для доказательства леммы необходимо воспользоваться тем фактом, что вращение поля внешних нормалей γ_0 равно 1 [3]. Покажем это. Рассмотрим поле касательных к границе $\partial\Omega$ области Ω. Вращение поля касательных к границе $\partial\Omega$ равно 1. Доказательство этого утверждения можно найти, например, в [3]. Следовательно, вращение поля нормалей к границе $\partial\Omega$ также будет равно 1 (это вытекает из того факта, что поле внешних нормалей можно получить из поля касательных поворотом на постоянный угол $-\frac{\pi}{2}$).

Т е о р е м а 2. *Пусть* $f:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ *– непрерывно дифференцируемая функция и граница* $\partial\Omega$ *области* Ω *– гладкая кривая. И пусть справедливо неравенство*

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{N}(\Phi,\Omega)}\chi_n(J_\sigma)\neq 1. \tag{5}$$

Тогда функция $f(x)$ *имеет в* $\overline{\Omega}$ *по крайней мере одну критическую точку.*

Теорема Ролля. Будем снова предполагать, что граница $\partial\Omega$ – гладкая кривая, и рассмотрим вопрос о том, определяется ли существование критической точки $\overline{\Omega}$ по поведению функции $f(x)$ на границе $\partial\Omega$ области. Иными словами, возможно ли выяснить, когда вращение $\gamma(\Phi,\Omega)$ определяется графиком функции $f(x)$ на границе $\partial\Omega$ (рис. 4). К сожалению, в общем случае ответить на этот вопрос нельзя.

Один из случаев, когда ответ оказывается положительным, был рассмотрен в [3]; дальнейшие обобщения описаны в работе [5]. Приведем некоторые необходимые определения. Пусть M_- и M_+ – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на $\overline{\Omega}$ и $M_- \neq M_+$.

Открытая дуга $\overset{\frown}{pq} \subset \partial\Omega$ с концами p и q называется *дугой максимумов* (*минимумов*), если $f(p) = f(q) = M_+$ $\left(f(p) = f(q) = M_-\right)$, на самой дуге функция $f(x)$ не принимает значения M_- (M_+) и дуга $\overset{\frown}{pq}$ не является частью дуги с описанными выше двумя свойствами. Дуги максимума и минимума могут вырождаться в точку. Легко проверяется, что дуги максимума и минимума существуют, их конечное число и число дуг максимума совпадает с числом дуг минимума; пусть m – это число. Дугу $\overset{\frown}{pq}$ максимума (минимума) назовем регулярной, если на ней между p и q нет точек ξ локального максимума с $f(\xi) < M_+$ (минимума с $f(\xi) = M_-$).

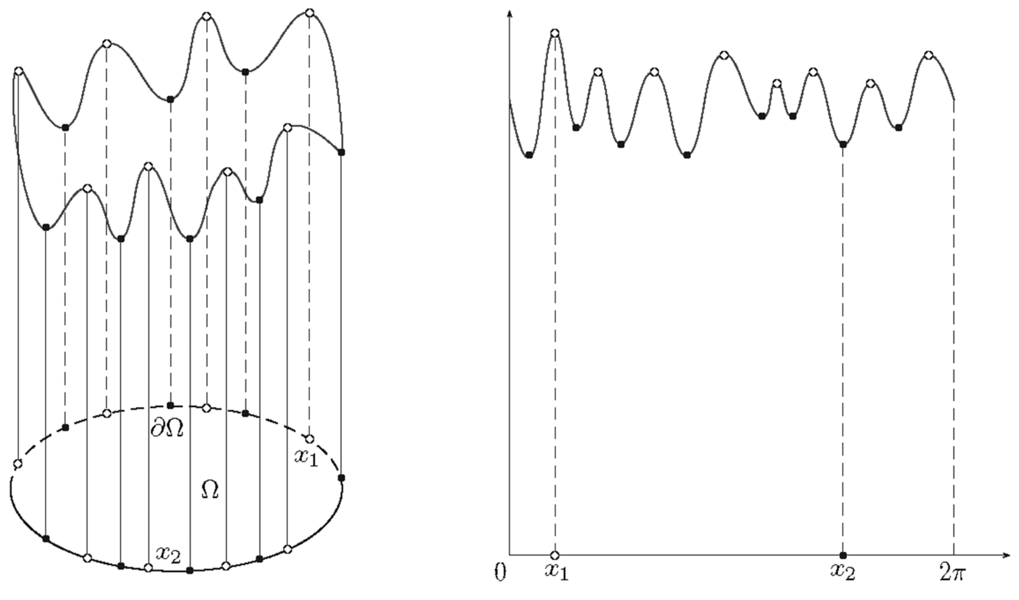
Открытые дуги, соединяющие соседние дуги максимума и минимума, будем называть *промежуточными*. Промежуточную дугу будем называть *регулярной*, если на ней нет точек локального экстремума.

Дугу максимума, минимума или промежуточную будем называть *квазирегулярной*, если на ней имеется лишь конечное число точек строгого максимума или минимума. Если все дуги (максимума, минимума и промежуточные) являются квазирегулярными, то обозначим через k число дуг, соединяющих соседние точки строгого экстремума, отличных от M_+ и M_-.

В работе [5] установлены следующие утверждения.

1. *Если дуги максимума и минимума функции $f(x)$ на $\partial\Omega$ и промежуточные дуги регулярны и если $m \neq 1$, то функция $f(x)$ имеет в Ω по крайней мере одну критическую точку.*

2. *Если дуги максимума и минимума и промежуточные дуги функции $f(x)$ на $\partial\Omega$ квазирегулярны и $m \neq 1$, причем $k < m - 1$, то функция $f(x)$ имеет в Ω по крайней мере одну критическую точку.*



a *b*

Рис. 4. График функции $f(x)$ на границе $\partial\Omega$

Fig. 4. Graph of the function $f(x)$ on the boundary $\partial\Omega$

Обе теоремы А. И. Перова, как нетрудно видеть, вытекают из теоремы 2. Более того, из теоремы 2 вытекают некоторые более общие, чем теоремы А. И. Перова, утверждения.

Напомним, что в точках экстремума функции $f(x)$ на $\partial\Omega$ вектор $f'(x)$ направлен по нормали к кривой $\partial\Omega$.

Рассмотрим простейший случай, когда функция $f(x)$ имеет на границе $\partial\Omega$ области Ω конечное число точек экстремума. Разобьем множество точек экстремума функции $f(x)$ на $\partial\Omega$ на два класса: точки, в которых нормаль направлена вне области Ω, и точки, в которых нормаль направлена внутрь области Ω. Точки первого класса будем называть *out-точками экстремума*, а точки второго класса – *in-точками экстремума*. В результате, точки максимума могут быть *out-* и *in-точками максимума* и, аналогично, точки минимума – *out-* и *in-точками минимума* (рис. 5).

Обозначим через $\mathcal{O}(f,\partial\Omega)$ множество *out*-точек экстремума функции f на $\partial\Omega$. В свою очередь, обозначим через $\mathcal{I}(f,\partial\Omega)$ – множество *in*-точек экстремума функции f на $\partial\Omega$.

Проанализируем поведение вектора $f'(x)$ при обходе в положительном направлении (против часовой стрелки) границы $\partial\Omega$ через точки множества $\mathcal{O}(f,\partial\Omega)$. При переходе через *out*-точки минимума (см. рис. 5) направление вектора $f'(x)$ меняется в сторону направления обхода границы $\partial\Omega$. В свою очередь, при переходе через *out*-точки максимума направление вектора $f'(x)$ меняется в противоположную сторону направления обхода границы $\partial\Omega$. Тогда общее количество оборотов вектора $f'(x)$ будет определяться по следующим возможным случаям:

1) вектор $f'(x)$ совершает один полный оборот в сторону положительного обхода $\partial\Omega$ между двумя соседними *out*-точками минимума;

2) вектор $f'(x)$ совершает один полный оборот в противоположную сторону относительно положительного обхода $\partial\Omega$ между двумя соседними *out*-точками максимума;

3) вектор $f'(x)$ не совершает оборотов между подряд идущими *out*-точкой минимума и *out*-точкой максимума и, наоборот, между соседними *out*-точкой максимума и *out*-точкой минимума.

Обозначим через d^+ количество *out*-точек минимума функции $f(x)$ на границе $\partial\Omega$ и d^- – количество *out*-точек максимума функции $f(x)$ на границе $\partial\Omega$.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $f:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ *– непрерывно дифференцируемая функция и граница* $\partial\Omega$ *области* Ω *– гладкая кривая. И пусть* $d^+ - d^- \neq 1$. *Тогда функция* $f(x)$ *имеет в* $\overline{\Omega}$ *по крайней мере одну критическую точку.*

Аналогичные рассуждения можно повторить и для точек множества $\mathcal{I}(f,\partial\Omega)$.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая. В предположении, что $f'(x)\neq 0$ для $x\in\partial\Omega$, множество

$$N\big(f'(x),\partial\Omega\big)=\{x\in\partial\Omega: f'(x)\uparrow\uparrow n\}$$

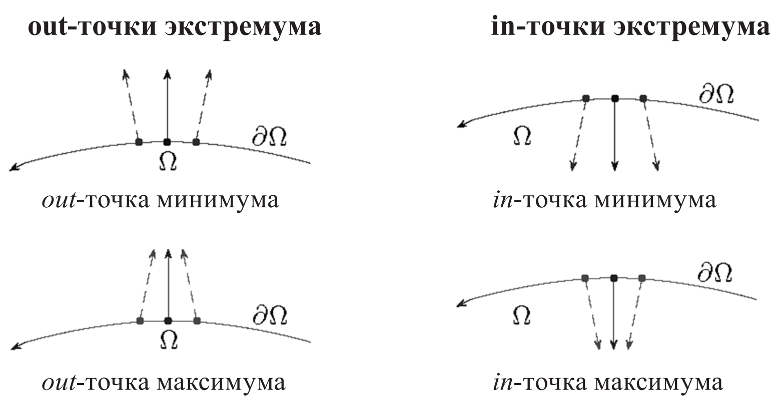


Рис. 5. Точки экстремума функции $f(x)$ на $\partial\Omega$

Fig. 5. Extremum points of the function $f(x)$ on $\partial\Omega$

является замкнутым. Следовательно, дополнение $\partial\Omega \setminus N\left(f'(x), \partial\Omega\right)$ является открытым множеством и представимо в виде объединения конечного или счетного числа интервалов $J_\sigma = (a_\sigma, b_\sigma)$, где $a_\sigma, b_\sigma \in N\left(f'(x), \partial\Omega\right)$, $\sigma = 1, 2, \ldots, \tilde{n}$ или $\sigma = 1, 2, \ldots$ соответственно.

Пусть $x_0 \in \partial\Omega$. В силу непрерывной дифференцируемости функции $f(x)$ на границе $\partial\Omega$, существует достаточно малое $\delta > 0$ такое, что для любого $\xi \in \partial\Omega$, удовлетворяющего неравенству $\| x_0 - \xi \| \leq \delta$, направление вектора $f'(\xi)$ «почти» совпадает с направлением вектора $f'(x_0)$. Поэтому, если для интервала $J_\sigma = (a_\sigma, b_\sigma)$ выполнено условие $\| a_\sigma - b_\sigma \| \leq \delta$, то точки a_σ и b_σ не могут быть одновременно *out*-точками экстремума. Значит, количество интервалов $J_\sigma = (a_\sigma, b_\sigma)$, для которых точки a_σ и b_σ являются одновременно *out*-точками экстремума, конечное число, и это число не зависит от числа δ.

Рассмотрим интервал $J_\sigma = (a_\sigma, b_\sigma)$, для которого точки a_σ и b_σ являются *out*-точками экстремума. При этом возможны следующие четыре случая (рис. 6):

1) a_σ и b_σ являются *out*-точками минимума; тогда вектор $f'(x)$ совершает один полный оборот в сторону положительного обхода $\partial\Omega$ между точками a_σ и b_σ (рис. 6, *a*);

2) a_σ и b_σ являются *out*-точками максимума; тогда вектор $f'(x)$ совершает один полный оборот в противоположную сторону относительно положительного обхода $\partial\Omega$ между точками a_σ и b_σ (рис. 6, *b*);

3) a_σ – *out*-точка минимума, b_σ – *out*-точка максимума и наоборот. В таких случаях $f'(x)$ не совершает оборотов между точками a_σ и b_σ (рис. 6, *c* и 6, *d*).

Таким образом, количество оборотов вектора $f'(x)$ зависит только от количества интервалов $J_\sigma = (a_\sigma, b_\sigma)$, для которых точки a_σ и b_σ являются одновременно *out*-точками минимума или *out*-точками максимума.

Обозначим через p^+ количество интервалов $J_\sigma = (a_\sigma, b_\sigma)$, для которых точки a_σ и b_σ являются *out*-точками минимума. В свою очередь, через p^- – количество интервалов $J_\sigma = (a_\sigma, b_\sigma)$, для которых точки a_σ и b_σ являются *out*-точками максимума.

Теорема 4. *Пусть* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *– непрерывно дифференцируемая функция,* $f'(x) \neq 0$*, граница* $\partial\Omega$ *области* Ω *– гладкая кривая. И пусть* $p^+ - p^- \neq 1$*. Тогда функция* $f(x)$ *имеет в* $\overline{\Omega}$ *по крайней мере одну критическую точку.*

Отметим, что из теорем 3 и 4 также вытекает равенство

$$d^+ - d^- = p^+ - p^-.$$

Аналогичные рассуждения можно повторить и для *in*-точек экстремума.

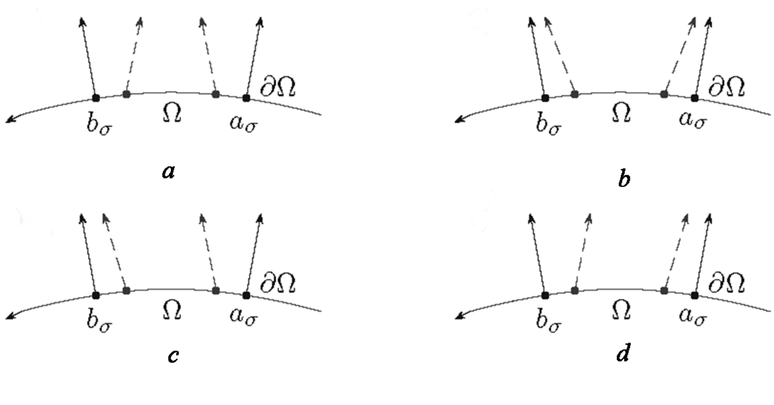


Рис. 6. *Out*-точки экстремума функции $f(x)$ на $\partial\Omega$

Fig. 6. Extremum *out*-points of the function $f(x)$ on $\partial\Omega$

Теорема 4 является обобщением основной теоремы А. И. Перова [5]: в последней дополнительно требовалось, чтобы значения функции $f(x)$ во всех точках *out*-максимума (и во всех точках *in*-минимума) совпадали с наибольшим (наименьшим) значением функции $f(x)$ на $\partial\Omega$.

Список использованных источников

1. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – М.: Гостехтеоретиздат, 1949. – Т. 1. – 690 с.

2. Красносельский, М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. – 332 с.

3. Векторные поля на плоскости / М. А. Красносельский [и др.]. – М.: Физматгиз, 1963. – 245 с.

4. Красносельский, М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. – 512 с.

5. Перов, А. И. Об одном обобщении теоремы Ролля / А. И. Перов // Тр. семинара по функцион. анализу. – Воронеж: Воронеж. ун-т, 1958. – Вып. 6. – С. 94–98.

References

1. Fihtengoltz G. M. *Course on Differential and Integral Calculus. Vol. 1.* Moscow, State Publishing House of Theoretical Literature. 690 p. (in Russian).

2. Krasnoselskii M. A. *The operator of translation along the trajectories of differential equations.* Moscow, Science, The Main Edition of Physical and Mathematical Literature, 1966. 332 p. (in Russian).

3. Krasnoselskii M. A., Perov A. I., Povolockii A. I., Zabreiko P. P. *Plane Vector Fields.* Moscow, State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 1963. 245 p. (in Russian).

4. Krasnoselskii M. A., Zabreiko P. P. *Geometric methods of nonlinear analysis.* Moscow, Science, The Main Edition of Physical and Mathematical Literature, 1975. 512 p. (in Russian).

5. Perov A. I. On a generalization of Rolle's theorem. *Trudy seminara po funktsional'nomu analizu* [Proceedings of the Seminar on Functional Analysis]. Voronezh, Voronezh University, 1958, no. 6, pp. 94–98 (in Russian).

Информация об авторах

Забрейко Петр Петрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: zabreiko@mail.ru

Кривко-Красько Алексей Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры инновационного управления, Институт бизнеса Белорусского государственного университета (ул. Московская, 5, 220007, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: sbmt@mail.ru.

Information about the authors

Petr P. Zabreiko – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor of the Department of Functional Analysis and Analytical Economics of the Faculty of Physics and the Faculty of Mathematics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: zabreiko@mail.ru

Aleksey V. Krivko-Krasko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Assistant Professor of the Department of Innovation Management of the School of Business, Belarusian State University (5, Moskovskaya Str., 220007, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: sbmt@mail.ru