ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

ФИЗИКА
PHYSICS

УДК 539.12 Поступила в редакцию 19.02.2018
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-300-315 Received 19.02.2018

Е. М. Овсиюк, А. А. Голуб, А. Д. Коральков

Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Беларусь

ОТРАЖЕНИЕ ОТ КОСМОЛОГИЧЕСКОГО БАРЬЕРА В ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ВСЕЛЕННОЙ ДЕ СИТТЕРА ЧАСТИЦ ДИРАКА, МАЙОРАНЫ И ВЕЙЛЯ

Аннотация. Известно, что геометрия пространства Лобачевского действует на поля частиц со спинами 0, 1/2, 1 как распределенное в пространстве идеальное зеркало. Глубина проникновения поля в такую среду растет с увеличением энергии поля. В силу того, что модель Лобачевского входит составным элементом в некоторые космологические модели, отмеченное свойство означает, что в таких моделях необходимо учитывать эффект наличия «космологического зеркала»: оно должно вести к перераспределению плотности частиц в пространстве. Выполненный ранее анализ предполагал статический характер геометрии пространства-времени. В настоящей работе проведено обобщение исследования для полей со спином 1/2 в случае осциллирующей модели Вселенной де Ситтера. Уравнение Дирака решено в нестатических квазидекартовых координатах, при этом используется диагонализация обобщенного оператора спиральности. Волновые функции частицы зависят от временной координаты нетривиальным образом, однако эффект полного отражения от эффективного потенциально барьера сохраняется и в нестатическом пространстве-времени, при этом он не зависит от времени. Аналогичные результаты имеют место для вещественного биспинорного поля Майораны. Для построения решений, описывающих эффект отражения, нужно использовать комбинации решений с противоположными спиральностями. Такие комбинации запрещены для вейлевских фермионов, поэтому эффект отражения отсутствует для вейлевских частиц. Показано, что периодическое обращение в нуль множителя $\cos^2 t = 0$ в осциллирующей метрике пространства-времени де Ситтера не приводит к сингулярному поведению решений уравнения для спинорного поля: около этих особых точек имеем простые асимптотики решений по временной переменной t в виде чистых фазовых множителей.

Ключевые слова: поле со спином 1/2, уравнения Дирака, Майораны, Вейля, осциллирующая Вселенная де Ситтера, эффективный потенциальный барьер, полное отражение частиц

Для цитирования. Овсиюк, Е. М. Отражение от космологического барьера в осциллирующей вселенной де Ситтера частиц Дирака, Майораны и Вейля / Е. М. Овсиюк, А. А. Голуб, А. Д. Коральков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 3. – С. 300–315. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-300-315

E. M. Ovsiyuk, A. A. Golub, A. D. Koralkov

Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Belarus

DIRAC, MAJORANA AND WEYL PARTICLES IN THE OSCILLATING DE SITTER UNIVERSE, REFLECTION FROM THE COSMOLOGICAL BARRIER

Abstract. It is known that the geometry of the Lobachevsky space acts on the fields of particles with spins 0, 1/2, 1 as an ideal mirror distributed in space. The depth of penetration of the field in such a medium increases with increasing field energy. Since the Lobachevsky model is a constituent element in some cosmological models, this property means that in such models it is necessary to take into account the effect of the presence of a “cosmological mirror”; it must lead to a redistribution of the particle density in space. The earlier analysis assumed the static nature of the space-time geometry. In this article, we generalize the research of the spin 1/2 field in the case of the oscillating model of the de Sitter universe. The Dirac equation is solved in the non-static quasi-Cartesian coordinates. At this, we substantially use the diagonalization of a generalized helicity operator. The wave functions of the particle are nontrivially time-dependent; however the effect of a complete reflection of the particles from an effective potential barrier is preserved. For the real Majorana 4-spinor field, the similar results are valid. For the solutions describing the reflection effect to be constructed, we must use linear combinations of solutions with opposite helicities. Such combinations are forbidden for 2-component Weyl particles, for this reason such particles cannot be reflected by the cosmological barrier.

Keywords: field with spin 1/2, Dirac, Majorana and Weyl equations, oscillating de Sitter universe, effective potential barrier, complete reflection of the particles

For citation. Ovsiyuk E. M., Golub A. A., Koralkov A. D. Dirac, Majorana and Weyl particles in the oscillating de Sitter universe, reflection from the cosmological barrier. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 300–315 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-300-315

Введение. В недавних работах [1–7] на основе построения решений уравнений Шредингера, Максвелла и Дирака в квазидекартовых координатах пространства Лобачевского

$$dS^2 = dt^2 - \left[e^{-2z}(dx^2 + dy^2) + dz^2 \right] \qquad (1)$$

было показано, что геометрия Лобачевского оказывает на все три поля в некотором смысле одно и то же действие: квазиплоские волны, распространяющиеся в пространстве Лобачевского, в некоторой точке отражаются от эффективного потенциального барьера, создаваемого геометрией пространства, и двигаются в обратную сторону. Другими словами, пространство Лобачевского действует на поля как распределенное в пространстве идеальное зеркало. Глубина проникновения поля в такую среду растет с увеличением энергии частицы, также эта величина зависит от радиуса кривизны пространства Лобачевского. В силу того, что модель Лобачевского входит составным элементом в некоторые космологические модели, отмеченное свойство означает, что в таких моделях необходимо учитывать эффект наличия «космологического зеркала»; оно эффективно должно вести к перераспределению плотности частиц в пространстве.

Выполненный ранее анализ предполагал статический характер геометрии пространства-времени. В настоящей работе проведено обобщение исследований [1–7] для спинорного поля в случае осциллирующей модели де Ситтера (обобщение для более простого случая скалярного поля было сделано в [8]). Анализ может быть обобщен и на случай расширяющейся вселенной де Ситтера, однако это требует отдельного рассмотрения, поскольку предполагает использование комплексных координат в вещественном пространстве-времени (примеры такого рода анализа см. в [9, 10]).

Разделение переменных в уравнении Дирака. Рассмотрим частицу со спином 1/2 в нестатических квазидекартовых координатах (1) пространства анти-де Ситтера

$$dS^2 = dt^2 - \cos^2 t \left[e^{-2z}(dx^2 + dy^2) + dz^2 \right]. \qquad (2)$$

Будем исходить из общековариантной формы уравнения Дирака

$$\left[i\gamma^a \left(e^{\alpha}_{(a)} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \sqrt{-g}\, e^{\alpha}_{(a)} \right) \right) - M \right] \Psi(x) = 0; \qquad (3)$$

используем диагональную тетраду, уравнение (3) принимает вид

$$\left[i\gamma^0 \cos t \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{3}{2} \operatorname{tg} t \right) + i\gamma^1 e^z \frac{\partial}{\partial x} + i\gamma^2 e^z \frac{\partial}{\partial y} + i\gamma^3 \left(\frac{\partial}{\partial z} - 1 \right) - M \cos t \right] \Psi = 0. \qquad (4)$$

Выделяя в волновой функции простой множитель $\Psi = (e^z / \cos^{3/2} t)\, \psi,$ приводим уравнение к более простой форме

$$\left(i\gamma^0 \cos t \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^1 e^z \frac{\partial}{\partial x} + i\gamma^2 e^z \frac{\partial}{\partial y} + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - M \cos t \right) \psi = 0. \qquad (5)$$

Решения ищем в виде

$$\psi = e^{ik_1 x}\, e^{ik_2 y} \begin{vmatrix} f_1(t,z) \\ f_2(t,z) \\ f_3(t,z) \\ f_4(t,z) \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Используя матрицы Дирака в спинорном базисе, из (5) находим систему уравнений для четырех функций $f_i(z)$ (пусть $k_1 = a$, $k_2 = b$):

$$i\cos t\frac{\partial}{\partial t}f_3 - M\cos t\, f_1 + e^z(a-ib)f_4 - i\frac{\partial}{\partial z}f_3 = 0,$$
$$i\cos t\frac{\partial}{\partial t}f_4 - M\cos t\, f_2 + e^z(a+ib)f_3 + i\frac{\partial}{\partial z}f_4 = 0,$$
$$i\cos t\frac{\partial}{\partial t}f_1 - M\cos t\, f_3 - e^z(a-ib)f_2 + i\frac{\partial}{\partial z}f_1 = 0,$$
$$i\cos t\frac{\partial}{\partial t}f_2 - M\cos t\, f_4 - e^z(a+ib)f_1 - i\frac{\partial}{\partial z}f_2 = 0. \tag{7}$$

Существует коммутирующий с оператором из (5) обобщенный оператор спиральности

$$\Sigma = \frac{1}{2}\left(e^z\gamma^2\gamma^3\frac{\partial}{\partial x} + e^z\gamma^3\gamma^1\frac{\partial}{\partial y} + \gamma^1\gamma^2\frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{8}$$

Из уравнения $\Sigma\Psi = p\Psi$ получим

$$\begin{gathered} e^z(a-ib)f_2(t,z) = \left(+i\frac{\partial}{\partial z} + p\right)f_1(t,z), \quad e^z(a+ib)f_1(t,z) = \left(-i\frac{\partial}{\partial z} + p\right)f_2(t,z), \\ e^z(a-ib)f_4(t,z) = \left(+i\frac{\partial}{\partial z} + p\right)f_3(t,z), \quad e^z(a+ib)f_3(t,z) = \left(-i\frac{\partial}{\partial z} + p\right)f_4(t,z). \end{gathered} \tag{9}$$

Отметим, что из анализа аналогичной задачи в плоском пространстве и статической метрике Лобачевского известно вырождение собственных значений оператора спиральности по знаку и явный вид собственных значений (индекс 0 служит для отличия от похожих обозначений ниже)

$$p_0 = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - M^2}, \quad f_3(z) = \lambda_0 f_1(z), \quad f_4(z) = \lambda_0 f_2(z), \quad \lambda_0 = \frac{\varepsilon - p}{M}. \tag{10}$$

Из уравнений (9) можно получить четыре дифференциальных уравнения для отдельных функций – разбиваем их на пары:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{d}{dz} - e^{2z}(a^2+b^2) + p(i+p)\right)f_1 = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{d}{dz} - e^{2z}(a^2+b^2) - p(i-p)\right)f_2 = 0; \tag{11}$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{d}{dz} - e^{2z}(a^2+b^2) + p(i+p)\right)f_3 = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{d}{dz} - e^{2z}(a^2+b^2) - p(i-p)\right)f_4 = 0. \tag{12}$$

Отсюда следует, что вместе с решением для каждого собственного значения $(+p)$ будет существовать решение с противоположным по знаку собственным значением $(-p)$; из физических соображений подразумеваем вещественность $\pm p$.

Структура уравнений (9) такова, что пары функций $f_1(t,z) - f_2(t,z)$ и $f_3(t,z) - f_4(t,z)$ должны иметь вполне определенную структуру:

$$f_1(t,z) = F(t)f_1(z),\ f_2(t,z) = F(t)f_2(z), \quad f_3(t,z) = G(t)f_3(z),\ f_4(t,z) = G(t)f_4(z); \tag{13}$$

при этом (9) принимает вид двух несвязанных подсистем по переменной z:

$$e^z(a-ib)f_2(z) = \left(+i\frac{d}{dz} + p\right)f_1(z), \quad e^z(a+ib)f_1(z) = \left(-i\frac{d}{dz} + p\right)f_2(z); \tag{14}$$

$$e^z(a-ib)f_4(z) = \left(+i\frac{d}{dz} + p\right)f_3(z), \quad e^z(a+ib)f_3(z) = \left(-i\frac{d}{dz} + p\right)f_4(z). \tag{15}$$

Учтем (14)–(15) в уравнениях (7), получим две подсистемы по двум переменным:

$$f_3(z)\left[i\cos t\frac{\partial}{\partial t}+p\right]G(t)-M\cos t\,F(t)f_1(z)=0,$$
$$f_1(z)\left[i\cos t\frac{\partial}{\partial t}-p\right]F(t)-M\cos t\,G(t)f_3(z)=0; \tag{16}$$

$$f_4(z)\left[i\cos t\frac{\partial}{\partial t}+p\right]G(t)-M\cos t\,G(t)f_2(z)=0,$$
$$f_2(z)f_1(z)\left[i\cos t\frac{\partial}{\partial t}-p\right]F(t)-M\cos t\,G(t)f_4=0. \tag{17}$$

Структура этих уравнений подразумевает следующие ограничения: $f_3(z)=\lambda f_1(z),\ \ f_4(z)=\lambda f_2(z)$; с учетом чего находим (одну и ту же) систему уравнений по переменой t:

$$\left(i\cos t\frac{\partial}{\partial t}+p\right)G(t)-\frac{M}{\lambda}\cos t\,F(t)=0,\quad \left(i\cos t\frac{\partial}{\partial t}-p\right)F(t)-\lambda M\cos t\,G(t)=0. \tag{18}$$

Очевидно, что параметр λ можно внести в обозначение функции $F(t)$: $F(t)/\lambda --> F(t)$, тогда параметр λ из уравнений (18) исчезает; без ограничения общности в уравнениях (18) можно положить $\lambda = 1$ – это влияет лишь на общий нормировочный множитель при полной биспинорной волновой функции. Понятно также, что функции $F(t)$, $G(t)$ будут зависеть от знака при $\pm p$.

Таким образом, получены системы уравнений по переменным t и z соответственно:

$$\left(i\cos t\frac{\partial}{\partial t}+p\right)G(t)-M\cos t\,F(t)=0,\quad \left(i\cos t\frac{\partial}{\partial t}-p\right)F(t)-M\cos t\,G(t)=0; \tag{19}$$

$$e^z(a-ib)f_2(z)=\left(+i\frac{d}{dz}+p\right)f_1(z),\quad e^z(a+ib)f_1(z)=\left(-i\frac{d}{dz}+p\right)f_2(z). \tag{20}$$

Решения этих уравнений определяют волновые функции следующего вида:

$$\Psi=e^{ik_1x}e^{ik_2y}\begin{vmatrix}F(t)\ f_1(z)\\ F(t)\ f_2(z)\\ \lambda G(t)\ f_1(z)\\ \lambda G(t)\ f_2(z)\end{vmatrix}. \tag{21}$$

Решение уравнений по переменной *t*. Из системы (19) получаем уравнения 2-го порядка для функций $F(t)$ и $G(t)$:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+M^2+\frac{ip(\sin t-ip)}{\cos^2 t}\right)F=0,\quad \left(\frac{d^2}{dt^2}+M^2-\frac{ip(\sin t+ip)}{\cos^2 t}\right)G=0. \tag{22}$$

Перейдем в уравнениях к переменной $\tau=(1+\sin t)/2$:

$$\tau(1-\tau)\frac{d^2F}{d\tau^2}+\left(\frac{1}{2}-\tau\right)\frac{dF}{d\tau}+\left(M^2+\frac{1}{4}\frac{p(p+i)}{1-\tau}+\frac{1}{4}\frac{p(p-i)}{\tau}\right)F=0; \tag{23}$$

$$\tau(1-\tau)\frac{d^2G}{d\tau^2}+\left(\frac{1}{2}-\tau\right)\frac{dG}{d\tau}+\left(M^2+\frac{1}{4}\frac{p(p-i)}{1-\tau}+\frac{1}{4}\frac{p(p+i)}{\tau}\right)G=0. \tag{24}$$

Достаточно получить решение одного из уравнений, решение другого получится при формальной замене $p \to -p$. Отметим, что уравнения и их решения связаны операцией комплексного сопряжения $G = \text{const}\, F^*$. Рассмотрим уравнение для функции *F*. Введем подстановку $F = \tau^A (1-\tau)^B f(\tau)$. Для функции $f(\tau)$ находим уравнение

$$\tau(1-\tau)\frac{d^2 f}{d\tau^2} + \left(2A + \frac{1}{2} - (2A+2B+1)\tau\right)\frac{df}{d\tau} +$$
$$+\left(M^2 - (A+B)^2 + \frac{1}{4}\frac{2B(2B-1)+p(p+i)}{1-\tau} + \frac{1}{4}\frac{2A(2A-1)+p(p-i)}{\tau}\right) f = 0.$$

При *A* и *B*, выбранных согласно

$$A = \frac{1}{2}(ip+1), -\frac{1}{2}ip, \quad B = \frac{1}{2}(-ip+1), \frac{1}{2}ip,$$

уравнение упрощается

$$\tau(1-\tau)\frac{d^2 f}{d\tau^2} + \left(2A + \frac{1}{2} - (2A+2B+1)\tau\right)\frac{df}{d\tau} + \left[M^2 - (A+B)^2\right] f = 0 \tag{25}$$

и является уравнением гипергеометрического типа с параметрами α, β, γ:

$$\alpha = A + B - M, \quad \beta = A + B + M, \quad \gamma = 2A + \frac{1}{2}.$$

Дальше будем пользоваться следующими представлениями двух независимых решений (см. обозначения в [11]):

$$A = \frac{-ip}{2}, \quad B = \frac{ip}{2}, \quad \alpha = -M, \quad \beta = +M, \quad \gamma = -ip + \frac{1}{2},$$
$$F^{(1)}(\tau) = \tau^A (1-\tau)^B F(\alpha,\beta,\gamma;\tau) = \tau^A (1-\tau)^B U_1(\tau); \tag{26}$$

$$A' = \frac{ip+1}{2}, \quad B' = \frac{-ip+1}{2}, \quad \alpha' = 1 - M, \quad \beta' = 1 + M, \quad \gamma' = ip + \frac{3}{2},$$
$$F^{(2)}(\tau) = \tau^{A'} (1-\tau)^{B'} F(\alpha',\beta',\gamma';\tau) = \tau^A (1-\tau)^B U_5(\tau), \tag{27}$$

где использованы два решения Куммера [11] для гипергеометрического уравнения:

$$U_1(\tau) = F(a,b,c;\tau) \quad \Rightarrow \quad F^{(1)}(\tau),$$
$$U_5(\tau) = y^{1-c}(1-y)^{c-a-b} F(1-a, 1-b, 2-c;\tau) \quad \Rightarrow \quad F^{(2)}(\tau). \tag{28}$$

Проводя формальную замену $p \to -p$, получаем аналогичные решения для функции $G(\tau)$ (напоминаем о симметрии относительно комплексного сопряжения):

$$A_* = \frac{ip}{2}, \quad B_* = \frac{-ip}{2}, \quad \alpha = -M, \quad \beta = +M, \quad \gamma_* = ip + \frac{1}{2},$$
$$G^{(1)} = \tau^{A_*} (1-\tau)^{B_*} F(\alpha,\beta,\gamma_*;\tau) = \tau^{A_*} (1-\tau)^{B_*} U_1(\tau); \tag{29}$$

$$A'_* = \frac{-ip+1}{2}, \quad B'_* = \frac{ip+1}{2}, \quad \alpha' = 1 - M, \quad \beta' = 1 + M, \quad \gamma'_* = -ip + \frac{3}{2},$$
$$G^{(2)} = \tau^{A'_*} (1-\tau)^{B'_*} F(\alpha',\beta',\gamma'_*;\tau) = \tau^{A_*} (1-\tau)^{B_*} U_5(\tau). \tag{30}$$

Свяжем эти четыре решения в пары. Рассмотрим сначала решения (26) и (30):

$$F^{(1)}(\tau) = \nu\tau^A (1-\tau)^B F(\alpha,\beta,\gamma;\tau), \quad A = \frac{-ip}{2}, \quad B = \frac{ip}{2}, \quad \alpha = -M, \quad \beta = +M, \quad \gamma = -ip + \frac{1}{2}, \tag{31}$$

и

$$G^{(2)}(\tau)=\nu'\tau^{A'_*}(1-\tau)^{B'_*}F(\alpha',\beta',\gamma'_*;\tau)=\nu'(1-\tau)^{B'_*}F(1+\alpha,1+\beta,1+\gamma;\tau),$$
$$A'_*=\frac{-ip+1}{2},\quad B'_*=\frac{ip+1}{2},\quad \alpha'=1-M,\quad \beta'=1+M,\quad \gamma'_*=-ip+\frac{3}{2}. \tag{32}$$

Чтобы вычислить относительный множитель между коэффициентами ν и ν', обратимся к дифференциальному соотношению из (18), записанному в переменной $\tau=(1+\sin t)/2$:

$$G^{(2)}(\tau)=\frac{1}{M}\left(i\sqrt{\tau(1-\tau)}\frac{d}{d\tau}-\frac{1}{2}\frac{p}{\sqrt{\tau(1-\tau)}}\right)F^{(1)}(\tau); \tag{33}$$

оно принимает вид

$$M\frac{\nu'}{\nu}\tau^{\frac{-ip+1}{2}}(1-\tau)^{\frac{ip+1}{2}}F(1+\alpha,1+\beta,1+\gamma;\tau)=\left(i\tau^{1/2}(1-\tau)^{1/2}\frac{d}{d\tau}-\frac{p}{2}\tau^{-1/2}(1-\tau)^{-1/2}\right)\tau^{\frac{-ip}{2}}(1-\tau)^{\frac{ip}{2}}F(\alpha,\beta,\gamma;\tau)$$

или

$$M\frac{\nu'}{\nu}F(1+\alpha,1+\beta,1+\gamma;\tau)=i\frac{d}{d\tau}F(\alpha,\beta,\gamma;\tau).$$

Отсюда находим

$$M\frac{\nu'}{\nu}=i\frac{\alpha\beta}{\gamma}\quad\Rightarrow\quad \nu'=\frac{-iM}{-ip+1/2}\nu. \tag{34}$$

Теперь рассмотрим решения (27) и (29):

$$F^{(2)}=\mu'\tau^{A'}(1-\tau)^{B'}F(\alpha',\beta',\gamma';\tau)=\mu'\tau^{A'}(1-\tau)^{B'}F(1+\alpha,1+\beta,1+\gamma_*;\tau),$$
$$A'=\frac{ip+1}{2},\quad B'=\frac{-ip+1}{2},\quad \alpha'=1-M,\quad \beta'=1+M,\quad \gamma'=ip+\frac{3}{2}, \tag{35}$$

и

$$G^{(1)}=\mu L_*\tau^{A_*}(1-\tau)^{B_*}F(\alpha,\beta,\gamma_*;\tau),\quad A_*=\frac{ip}{2}, B_*=\frac{-ip}{2}, \alpha=-M,\quad \beta=+M, \gamma_*=ip+\frac{1}{2}. \tag{36}$$

Чтобы вычислить относительный множитель между коэффициентами μ' и μ, обратимся к дифференциальному соотношению из (18), записанному в переменной $\tau=(1+\sin t)/2$:

$$F^{(2)}(\tau)=\frac{1}{M}\left(i\sqrt{\tau(1-\tau)}\frac{d}{d\tau}+\frac{1}{2}\frac{p}{\sqrt{\tau(1-\tau)}}\right)G^{(1)}(\tau).$$

Оно принимает вид

$$M\frac{\mu'}{\mu}\tau^{\frac{ip+1}{2}}(1-\tau)^{\frac{-ip+1}{2}}F(1+\alpha,1+\beta,1+\gamma_*;\tau)=\left(i\tau^{1/2}(1-\tau)^{1/2}\frac{d}{d\tau}+\frac{p}{2}\tau^{-1/2}(1-\tau)^{-1/2}\right)\tau^{\frac{ip}{2}}(1-\tau)^{\frac{-ip}{2}}F(\alpha,\beta,\gamma_*;\tau)$$

или

$$M\frac{\mu'}{\mu}F(1+\alpha,1+\beta,1+\gamma_*;\tau)=i\frac{d}{d\tau}F(\alpha,\beta,\gamma_*;\tau).$$

Отсюда находим

$$M\frac{\mu'}{\mu}=i\frac{\alpha\beta}{\gamma_*}\quad\Rightarrow\quad \mu'=\frac{iM}{ip+1/2}\mu. \tag{37}$$

Анализ решений по переменной *t* в особых точках. Исследуем поведение решений в особых точках $\cos t=0$. Точке $t=-\pi/2$ соответствует значение $\tau=0$, решения ведут себя так:

пара

$$F^{(1)} \sim \tau^{A} = \left(\frac{1+\sin t}{2}\right)^{-ip/2}, \quad G^{(2)} \sim \frac{+iM}{1/2-ip}\tau^{A'*} = \frac{-iM}{1/2-ip}\left(\frac{1+\sin t}{2}\right)^{1/2-ip/2}; \tag{38}$$

пара

$$F^{(2)} \sim \frac{+iM}{1/2+ip}\tau^{A'} = \frac{+iM}{1/2+ip}\left(\frac{1+\sin t}{2}\right)^{1/2+ip/2}, \quad G^{(1)} \sim \tau^{A'*} = \left(\frac{1+\sin t}{2}\right)^{+ip/2}. \tag{39}$$

Учитывая формулу $t \approx -\pi/2 + 2\Delta,\ \Delta \to 0,$ получим

$$F^{(1)} \sim e^{-ip/2\ln\Delta}, \quad G^{(2)} \sim \frac{-iM}{1/2-ip}\sqrt{\Delta}e^{-ip/2\ln\Delta} \to 0; \tag{40}$$

$$F^{(2)} \sim \frac{+iM}{1/2+ip}\sqrt{\Delta}e^{+ip/2\ln\Delta} \to 0, \quad G^{(1)} \sim e^{+ip/2\ln\Delta}. \tag{41}$$

В особой точке $t = +\pi/2$ асимптотическое поведение будет похожим. Это можно установить, разложив использованные решения U_1, U_5 по решениям Куммера [11] от аргумента $(1 - \tau)$:

$$U_2 = F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-c; 1-\tau),$$
$$U_6 = (1-\tau)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta; 1-\tau).$$

В точке $\tau \to 1$ эти формулы дают [11]:

$$U_1 = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\cdot 1 + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-\tau)^{\gamma-\alpha-\beta},$$
$$U_5 = \frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\cdot 1 + \frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}(1-\tau)^{\gamma-\alpha-\beta}.$$

Отсюда с учетом тождества $\gamma-\alpha-\beta = 1/2 - ip$ находим асимптотики для функций $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ из (26), (27):

$$F^{(1)} \sim \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(1-\tau)^{+ip/2}, \quad F^{(2)} \sim \frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha')\Gamma(1-\beta)}(1-\tau)^{+ip/2}.$$

В окрестности точки $t = +\pi/2$ имеем

$$t = +\frac{\pi}{2} + 2\Delta, \quad (1-\tau) = \frac{1-\sin t}{2} = \Delta, \quad (1-\tau)^{+ip/2} = e^{+ip/2\ln\Delta}.$$

Построение и анализ дираковских решений. Возвратимся к уравнениям (20) по переменной z:

$$e^{z}(a-ib)f_2(z) = \left(+i\frac{d}{dz}+p\right)f_1(z), \quad e^{z}(a+ib)f_1(z) = \left(-i\frac{d}{dz}+p\right)f_2(z), \tag{42}$$

отсюда следуют уравнения второго порядка

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{d}{dz} - e^{2z}(a^2+b^2) + p(i+p)\right)f_1 = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{d}{dz} - e^{2z}(a^2+b^2) - p(i-p)\right)f_2 = 0. \tag{43}$$

Прямая интерпретация в терминах барьер – отражение затруднена ввиду того, что уравнения (43) содержат комплексные потенциалы. Перейдем в уравнениях (42) и (43) к переменной $Z = e^{z}$, $Z \in (0, +\infty)$:

$$\left(\frac{d}{dZ}-\frac{ip}{Z}\right)f_1+i(a-ib)f_2=0, \quad \left(\frac{d}{dZ}+\frac{ip}{Z}\right)f_2-i(a+ib)f_1=0; \tag{44}$$

$$\left(\frac{d^2}{dZ^2}+\frac{p^2+ip}{Z^2}-a^2-b^2\right)f_1=0, \quad \left(\frac{d^2}{dZ^2}+\frac{p^2-ip}{Z^2}-a^2-b^2\right)f_2=0. \tag{45}$$

Поскольку структура уравнений предполагает выполнение условия $f_2=f_1^*$, то можно получить уравнения с вещественными потенциалами комбинированием функций согласно правилам

$$H=cf_1+c^*f_2, \quad G=cf_1-c^*f_2; \tag{46}$$

коэффициент c может быть любым, в частности и равным 1. Легко находим

$$\left(\frac{d^2}{dZ^2}+\frac{p^2}{Z^2}-(a^2+b^2)\right)H+\frac{ip}{Z^2}G=0, \quad \left(\frac{d^2}{dZ^2}+\frac{p^2}{Z^2}-(a^2+b^2)\right)G+\frac{ip}{Z^2}H=0. \tag{47}$$

В координате $z=\ln Z$ уравнения (47) выглядят так (удобно выделить простой множитель согласно формулам $H\Rightarrow e^{z/2}H,\ G\Rightarrow e^{z/2}G$):

$$\left[\frac{d^2}{dz^2}+p^2-\frac{1}{4}-(a^2+b^2)e^{2z}\right]H+ipG=0, \quad \left[\frac{d^2}{dz^2}+p^2-\frac{1}{4}-(a^2+b^2)e^{2z}\right]G+ipH=0. \tag{48}$$

Легко найти точку, после которой функции должны резко спадать до нуля:

$$p^2-1/4=(k_1^2+k_2^2)e^{2z_0}\Rightarrow z_0=\ln\sqrt{\frac{p^2-1/4}{a^2+b^2}}. \tag{49}$$

В окрестности точки z_0 уравнения упрощаются:

$$\frac{d^2}{dz^2}H+ipG=0, \quad \frac{d^2}{dz^2}G+ipH=0. \tag{50}$$

Их решения могут иметь только экспоненциальный вид: $H=H_0e^{\nu(z-z_0)},\ G=G_0e^{\nu(z-z_0)}$; при этом уравнения дают алгебраическую систему с 4 решениями:

$$\begin{vmatrix}\nu^2 & ip\\ ip & \nu^2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}H_0\\ G_0\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad \nu=-\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\sqrt{p},+\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\sqrt{p}; \tag{51}$$

две возможности из четырех соответствуют затухающим справа от точки z_0 решениям. Добавим, что в обычных единицах точка z_0 описывается соотношением

$$z_0=\rho\ln\sqrt{\frac{(E^2-M^2c^4)/c^2\hbar^2-1/4\rho^2}{(K_1^2+K_2^2)}}; \tag{52}$$

здесь волновые числа K_1, K_2 имеют размерность обратного метра. Отмечаем, что при устремлении к нулю величин K_1, K_2 глубина проникновения поля в область положительных z неограниченно увеличивается – это находится в согласии с явным видом уравнений при $a^2+b^2=0$: в них исчезает эффективный потенциал отталкивания.

Это рассмотрение указывает на то, что нужные решения полного уравнения Дирака, которые можно сопоставить ситуации отражения частиц от барьера, должны строиться комбинированием решений с противоположными значениями спиральности $+p$ и $-p$.

Обратимся к построению точных решений уравнений (45). Следим за уравнением для f_1. Для функции $f_1(Z)$ используем подстановку $f_1(Z)=Z^Ae^{BZ}\,\overline{f}_1(Z)$, в результате получаем

$$\bar{f}''_1 + \left(\frac{2A}{Z} + 2B\right)\bar{f}'_1 + \frac{2AB}{Z}\bar{f}_1 + \left(\frac{A(A-1)}{Z^2} + \frac{p^2 + ip}{Z^2}\right)\bar{f}_1 + \left(B^2 - (a^2 + b^2)\right)\bar{f}_1 = 0 .$$

Фиксируем $A, B : A = +ip,\ 1 - ip,\ B = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$; уравнение для $\bar{F}_1$ упрощается

$$Z\bar{f}''_1 + \left(2A + 2BZ\right)\bar{f}'_1 + 2AB\bar{f}_1 = 0 .$$

Не теряя в общности, выбираем значения

$$A = +ip, \quad B = -\sqrt{a^2 + b^2} \ ; \tag{53}$$

переход к случаю противоположной спиральности достигается заменой $A \Rightarrow -A$. Перейдя к переменной $y = -2BZ = 2\sqrt{a^2 + b^2}e^z$, получим уравнение

$$y\frac{d^2}{dy^2}\bar{f}_1 + (2A - y)\frac{d}{dy}\bar{f}_1 - A\bar{f}_1 = 0 ,$$

которое отождествляется с вырожденным гипергеометрическим уравнением

$$\Phi'' + (\gamma - y)\Phi' - \alpha\Phi = 0, \quad \alpha = A = ip, \quad \gamma = 2A = 2ip . \tag{54}$$

В качестве двух линейно независимых решений можно выбрать следующие [11]:

$$\bar{f}_1^{(1)}(y) = \Phi(\alpha, \gamma; y) = \Phi(ip, 2ip; y) ,$$
$$\bar{f}_1^{(2)}(y) = y^{1-\gamma}\Phi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma; y) = y^{1-2ip}\Phi(1 - ip, 2 - 2ip; y) , \tag{55}$$

что приводит к двум выражениям для полной функции $F_1(Z) = Z^A e^{BZ}\bar{F}_1$:

$$f_1^{(1)} = y^{ip}e^{-y/2}\,\Phi(ip, 2ip; y) , \quad f_1^{(2)} = y^{1-ip}e^{-y/2}\,\Phi(1 - ip, 2 - 2ip; y) . \tag{56}$$

Воспользовавшись отмеченной выше симметрией, можно получить (с точностью до числовых множителей) линейно независимые решения уравнения и для функции F_2:

$$\grave{a}_2^{(1)} = y^{1+ip}e^{-y/2}\,\Phi(1 + ip, 2 + 2ip; y) , \quad \grave{a}_2^{(2)} = y^{-ip}e^{-y/2}\,\Phi(-ip, -2ip; y) . \tag{57}$$

Вопрос о характере связывания отдельных решений из $\{f_1^{(1)}, f_1^{(2)};\ f_2^{(1)}, f_2^{(2)}\}$ в пары (с учетом уравнений первого порядка (42)) и вычислении соответствующих относительных коэффициентов требует специального рассмотрения. Сформулируем ответы, а потом докажем их (в дальнейшем потребуются две возможности, различающиеся знаком при A: $+A$, $-A$; поэтому следим за обеими):

$$\text{I}^+. \qquad f_1^{+(1)} = e^{-y/2}y^A\,\Phi(A, 2A, y) = f ,$$
$$f_2^{+(1)} = Le^{-y/2}y^{1+A}\,\Phi(1 + A, 2 + 2A, y) = g ,$$
$$\text{II}^+. \qquad f_1^{+(2)} = L^*e^{-y/2}y^{1-A}\Phi(1 - A, 2 - 2A, y) = g^* ,$$
$$f_2^{+(2)} = e^{-y/2}y^{-A}\Phi(-A, -2A, y) = f^* ; \tag{58}$$

$A \Rightarrow -A$

$$\text{I}^-. \qquad f_1^{-(1)} = e^{-y/2}y^{-A}\,\Phi(-A, -2A, y) = f^* ,$$
$$f_2^{-(1)} = L^*e^{-y/2}y^{1-A}\,\Phi(1 - A, 2 - 2A, y) = g^* ,$$

$$\text{II}^-. \qquad f_1^{-(2)} = Le^{-y/2} y^{1+A} \Phi(1+A, 2+2A, y) = g\,,$$
$$f_2^{-(2)} = e^{-y/2} y^A \Phi(A, 2A, y) = f\,. \tag{59}$$

Вычислим числовой коэффициент L. Функции f_1, f_2 не могут рассматриваться независимо – они связаны уравнениями первого порядка (напоминаем, что $A = ip$)

$$\left(\frac{d}{dy} - \frac{A}{y}\right) f_1 + \frac{e^{i\alpha}}{2} f_2 = 0\,, \quad \left(\frac{d}{dy} + \frac{A}{y}\right) f_2 + \frac{e^{-i\alpha}}{2} f_1 = 0\,;$$

используем обозначения

$$e^{i\alpha} = i\frac{a - ib}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad e^{-i\alpha} = -i\frac{a + ib}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

Покажем, что этими уравнениями первого порядка связаны следующие две пары функций:

пара

$$f_1^{+(1)} = e^{-y/2} y^A \, \Phi(A, 2A, y) = f\,, \quad f_2^{+(1)} = Le^{-y/2} y^{1+A} \, \Phi(1+A, 2+2A, y) = g\,;$$

пара

$$f_2^{+(2)} = e^{-y/2} y^{-A} \Phi(-A, -2A, y) = f^*, \quad f_1^{+(2)} = L^* e^{-y/2} y^{1-A} \Phi(1-A, 2-2A, y) = g^*\,.$$

Достаточно проверить связь решений в первой строке. Подставляем эти функции в первое уравнение:

$$\left(\frac{d}{dy} - \frac{A}{y}\right) e^{-y/2} y^A \, \Phi(A, 2A, y) + \frac{e^{i\alpha}}{2} Le^{-y/2} y^{1+A} \, \Phi(1+A, 2+2A, y) = 0,$$

дальше получаем

$$-\Phi(A, 2A) + \Phi(A+1, 2A+1) + e^{i\alpha} Ly\Phi(1+A, 2+2A) = 0\,.$$

Легко убедиться (например, исследовав несколько первых коэффициентов рядов) в выполнении равенства

$$-\Phi(A, 2A) + \Phi(A+1, 2A+1) = x\frac{1}{2(2A+1)}\, \Phi(A+1, 2A+2)\,;$$

следовательно, приходим к равенству

$$\frac{1}{2(2A+1)} + e^{i\alpha} L = 0 \quad \Rightarrow \quad L = -\frac{e^{-i\alpha}}{2(2A+1)} = \frac{i/2}{2A+1} \frac{a+ib}{\sqrt{a^2+b^2}}\,. \tag{60}$$

Найдем асимптотическое поведение функций $f(z)$, $g(z)$ в области $z \to -\infty$ (т. е. при $y \to 0$):

$$f \sim y^A = (2\sqrt{a^2+b^2})^{ip} e^{ipz}, \quad g \sim L(2\sqrt{a^2+b^2})^{1+ip} e^{(1+ip)z} \to 0\,. \tag{61}$$

С использованием асимптотической формулы

$$\Phi(\alpha, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^x (x)^{\alpha-\gamma}, \quad \operatorname{Re} x \to +\infty$$

находим поведение решений в области $z \to +\infty$ ($y \to +\infty$):

$$f \sim e^{-y/2} y^{ip} \frac{\Gamma(2ip)}{\Gamma(ip)} e^y y^{-ip} \to \infty\,, \quad g \sim Le^{-y/2} y^{1-ip} \frac{\Gamma(2ip+2)}{\Gamma(ip+1)} e^y y^{1-ip} \to \infty\,. \tag{62}$$

Соотношения (62) указывают на то, что решения на основе f, g не имеют нужного поведения в $z \to +\infty$, чтобы их можно было связать с ситуацией отражения частицы. Дальше будем рассматривать функцию f_1 как основную и строить для нее решения, а потом находить сопутствующую ей функцию f_2. Сначала напомним процедуру нахождения нужных решений в статическом случае пространства Лобачевского, после чего обобщим ее на случай нестатического пространства.

Выше использована вполне определенная пара линейно независимых решений вырожденного гипергеометрического уравнения (с двумя возможностями для A: $+A$, $-A$):

$$\begin{gathered} Y^{+(1)} = \Phi(A, 2A, y)\,, \quad Y^{+(2)} = y^{1-2A}\Phi(1-A, 2-2A, y)\,; \\ Y^{-(1)} = \Phi(-A, -2A, y)\,, \quad Y^{-(2)} = y^{1+2A}\Phi(1+A, 2+2A, y)\,. \end{gathered} \tag{63}$$

Ниже для построения решений с нужным асимптотическим поведением потребуется еще одна пара линейно независимых решений [11] (также с двумя возможностями для A: $+A$, $-A$):

$$\begin{gathered} Y^{+(5)} = \Psi(A, 2A, y)\,, \quad Y^{+(7)} = e^{y}\Psi(A, 2A, -y)\,; \\ Y^{-(5)} = \Psi(-A, -2A, y)\,, \quad Y^{-(7)} = e^{y}\Psi(-A, -2A, -y)\,. \end{gathered} \tag{64}$$

Пары решений (63)–(64) связаны линейными соотношениями Куммера [11]:

$$Y^{+(5)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} Y^{+(1)} + \frac{\Gamma(2A-1)}{\Gamma(A)} Y^{+(2)}\,, \quad Y^{+(7)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} Y^{+(1)} - \frac{\Gamma(2A-1)}{\Gamma(A)} Y^{+(2)}\,;$$

$$Y^{-(5)} = \frac{\Gamma(1+2A)}{\Gamma(1+A)} Y^{-(1)} + \frac{\Gamma(-2A-1)}{\Gamma(-A)} Y^{-(2)}\,, \quad Y^{-(7)} = \frac{\Gamma(1+2A)}{\Gamma(1+A)} Y^{-(1)} - \frac{\Gamma(-2A-1)}{\Gamma(-A)} Y^{-(2)}\,,$$

которые после умножения на $y^{A}e^{-y/2}$ (и соответственно на $y^{-A}e^{-y/2}$) принимают вид

$$f_1^{+(5)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} f + \frac{\Gamma(2A-1)}{\Gamma(A)} \frac{1}{L^*} g^*, \quad f_1^{+(7)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} f - \frac{\Gamma(2A-1)}{\Gamma(A)} \frac{1}{L^*} g^*; \tag{65}$$

$$f_1^{-(5)} = \frac{\Gamma(1+2A)}{\Gamma(1+A)} f^* + \frac{\Gamma(-2A-1)}{\Gamma(-A)} \frac{1}{L} g, \quad f_1^{-(7)} = \frac{\Gamma(1+2A)}{\Gamma(1+A)} f^* - \frac{\Gamma(-2A-1)}{\Gamma(-A)} \frac{1}{L} g. \tag{66}$$

Эти формулы осуществляют линейные разложения новых двух решений для функции F_1 (типов (5) и (7)) по старым двум решениям типов (1) и (2).

Функции $f_1^{\pm(5)}$ и $f_1^{\pm(7)}$ при отрицательных $z \to -\infty$ ведут себя так:

$$f_1^{+(5)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} \left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{+ip} e^{+ipz}, \quad f_1^{+(7)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} \left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{+ip} e^{+ipz}. \tag{67}$$

В силу очевидной симметрии соответствующие решения в случае противоположной поляризации получаются формальной заменой: $p \Rightarrow -p$, $a = ip \Rightarrow -a$, и для этого типа волн имеем следующие асимптотики при $z \to -\infty$:

$$f_1^{-(5)} = \frac{\Gamma(1+2A)}{\Gamma(1+A)} \left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{-ip} e^{-ipz}, \quad f_1^{-(7)} = \frac{\Gamma(1+2A)}{\Gamma(1+A)} \left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{-ip} e^{-ipz}. \tag{68}$$

Найдем поведение решений $f_1^{\pm(5)}z$ в области больших $z \to +\infty$. Применяя известное [11] асимптотическое соотношение

$$Y_5 = \Psi(A, 2A, y) \sim y^{-A},$$

получим $\left(y \to +\infty\, (z \to +\infty)\right)$

$$f_1^{+(5)} = y^A e^{-y/2}\, y^{-A} \sim e^{-y/2} \sim \exp\left(-\sqrt{a^2+b^2}\,e^z\right) \to 0\,,$$
$$f_1^{-(5)} = y^{-A} e^{-y/2}\, y^{+A} \sim e^{-y/2} \sim \exp\left(-\sqrt{a^2+b^2}\,e^z\right) \to 0\,. \tag{69}$$

Аналогично, применяя асимптотическое соотношение $Y_7 = e^y \Psi(A, 2A, -y) \sim e^y y^{-A}$, получим $\left(y \to +\infty\ (z \to +\infty)\right)$

$$f_1^{+(7)} \sim y^A e^{-y/2}\, e^y y^{-A} \sim e^{+y/2} \sim \exp\left(+\sqrt{a^2+b^2}\,e^z\right) \to \infty\,,$$
$$f_1^{-(7)} \sim y^{-A} e^{-y/2}\, e^y y^{+A} \sim e^{+y/2} \sim \exp\left(+\sqrt{a^2+b^2}\,e^z\right) \to \infty\,. \tag{70}$$

Наибольший интерес представляют решения типа ±(5) с асимптотиками (69), поскольку эти решения обращаются в нуль при $z \to \infty$ и имеют асимптотики плоских волн при $z \to -\infty$. Введем новые решения с помощью линейных комбинаций из $F_1^{+(5)}$ и $F_1^{-(5)}$:

$$H_1 = f_1^{+(5)} + f_1^{-(5)}\,, \quad H^* = H\,; \quad G_1 = f_1^{+(5)} - f_1^{-(5)}\,, \quad G^* = -G\,. \tag{71}$$

Поведение этих решений при $z \to -\infty$ следующее:

$$H_1(z \to -\infty) \sim M_+\, e^{+ipz} + M_-\, e^{-ipz}\,, \quad G_1(z \to -\infty) \sim M_+\, e^{+ipz} - M_-\, e^{-ipz}\,, \tag{72}$$

где

$$M_+ = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)}\left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{+ip}, \quad M_- = \frac{\Gamma(1+2A)}{\Gamma(1+A)}\left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{-ip}, \quad M_- = (M_+)^*.$$

Для этих решений можно определить коэффициент отражения как квадрат модуля отношения амплитуд в суперпозиции плоских волн (следим одновременно за обеими возможностями)

$$H_\pm(z) \sim M_- e^{-ipz} \pm M_+ e^{+ipz}, \quad R = \left|\frac{M_-}{M_+}\right|^2 = 1. \tag{73}$$

Выделив решения, отвечающие отражению частиц, можно восстановить сопутствующие им функции. Эта задача относительно легко решается – не будем останавливаться на деталях.

Теперь обобщим такой подход на случай нестатической метрики. Следим за первой компонентой биспинорной волновой функции. Напомним уравнение для функции $F(t)$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + M^2 + \frac{ip(\sin t - ip)}{\cos^2 t}\right)F = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} + M^2 - \frac{ip(\sin t + ip)}{\cos^2 t}\right)G = 0. \tag{74}$$

Очевидно, что собственным значениям оператора спиральности ($+p$) и ($-p$) отвечают комплексно сопряженные функции $F_{-p}(t) = [F_{+p}(t)]^*$. С учетом того, что зависящая от времени функция $F(t)$ таким образом зависит от знака параметра спиральности $\pm p$, решения, описывающие полное отражение частиц от эффективного барьера в нестатическом случае, имеют вид

$$H_\pm(t,z) = e^{iax} e^{iby} \cdot \left\{F_{+p}(t) f_1^{+(5)}(z) \pm F_{-p}(t) f_1^{-(5)}(z)\right\}. \tag{75}$$

Майорановское спинорное поле. Выберем базис Майораны следующим преобразованием спинорного базиса [12]:

$$\Psi_M = A\,\Psi\,, \quad \Gamma_M^a = A\gamma^a A^{-1}\,, \quad A = \frac{1-\gamma^2}{\sqrt{2}}\,, \quad A^{-1} = \frac{1+\gamma^2}{\sqrt{2}}\,;$$
$$\gamma_M^0 = \gamma^0\gamma^2\,, \quad \gamma_M^1 = \gamma^1\gamma^2\,, \quad \gamma_M^2 = \gamma^2, \quad \gamma_M^3 = \gamma^3\gamma^2\,. \tag{76}$$

Явный вид матриц Дирака в этом майорановском базисе следующий:

$$\gamma_M^0 = \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_M^1 = \begin{vmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{vmatrix}, \quad \gamma_M^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_M^3 = \begin{vmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{vmatrix}.$$

Отмечаем выполнимость требуемых свойств относительно операции комплексного сопряжения: матрицы Дирака здесь чисто мнимые. Это означает, что в майорановском базисе оператор Дирака является вещественным $(i\gamma^a \partial_a - m)\Psi_M = 0;$ следовательно, вещественная и мнимая части комплексной волновой функции Дирака Ψ_M не смешиваются этим оператором:

$$\Psi_M = \mathrm{Re}\,\Psi + i\,\mathrm{Im}\Psi = \Psi_+ + \Psi_-, \quad (i\gamma^a \partial_a - m)\Psi_+ = 0, \quad (i\gamma^a \partial_a - m)\Psi_- = 0; \tag{77}$$

т. е. вместо одного уравнения Дирака для комплексной функции получены отдельные уравнения для вещественной и чисто мнимой функций. Причем оба этих уравнения Лоренц-инварантные. Они описывают (по определению) майорнановские фермионы Ψ_+ и Ψ_- с зарядовой четностью соответственно +1 и –1.

Чтобы описать взаимодействие майорановских частиц с гравитационным полем, обратимся к общековариантному уравнению Дирака

$$\left\{ \gamma^\alpha(x) \left[i\big(\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x)\big) - eA_\alpha \right] - m \right\} \Psi(x) = 0, \;\; \gamma^\alpha(x) = \gamma^a\, e^\alpha_{(a)}(x), \quad \Gamma_\alpha(x) = \frac{1}{2}\sigma^{ab}\, e^\beta_{(a)}\, \nabla_\alpha\, (e^\alpha_{(b);\beta}). \tag{78}$$

Если предполагать использование майорановского базиса матриц Дирака со свойствами

$$(i\gamma_M^a)^* = +\gamma_M^a, \quad (\sigma_M^{ab})^* = +\sigma_M^{ab}, \quad (i\gamma_M^5)^* = +\gamma_M^5, \tag{79}$$

то при отсутствии электромагнитного поля и наличии только гравитационного волновой оператор в уравнении Дирака будет вещественным (вещественность матриц σ^{ab} приводит к вещественности связности $\Gamma_\alpha(x)$):

$$\left[i\gamma^\alpha(x)(\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x)) - m \right] = \left[i\gamma^\alpha(x)(\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x)) - m \right]. \tag{80}$$

Это означает, что существуют общековариантные волновые уравнения, отдельные для поля Ψ_+ и поля Ψ_-: $\Psi_M = \Psi_+ + i\Psi_-$.

Выделение майорановских компонент. Выведенные уравнения по переменным z и t определяют решения уравнения Дирака, которые имеют вид (21). Разложение квазиплоских дираковских решений в сумму двух майорановских компонент $\Psi = \Psi_+ + \Psi_-$ в спинорном базисе

$$\Psi^c = \gamma^2 \Psi^* = \begin{vmatrix} -\sigma^2 \eta^* \\ \sigma^2 \xi^* \end{vmatrix}, \quad \Psi = \Psi_+ + \Psi_- = \frac{\Psi + \Psi^c}{2} + \frac{\Psi - \Psi^c}{2}$$

выглядит следующим образом:

$$\Psi_+ = \begin{vmatrix} \xi_+ = (\xi - \sigma_2 \eta^*)/2 \\ \eta_+ = (\eta + \sigma_2 \xi^*)/2 \end{vmatrix}, \quad \Psi_- = \begin{vmatrix} \xi_- = (\xi + \sigma_2 \eta^*)/2 \\ \eta_- = (\eta - \sigma_2 \xi^*)/2 \end{vmatrix}. \tag{81}$$

Введем обозначения для волновых функций в спинорном базисе:

$$\varphi = e^{iax}\, e^{iby}, \quad \varphi^* = e^{-iax}\, e^{-iby},$$

$$\xi = \varphi F(t) \begin{vmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{vmatrix}, \quad \xi^* = \varphi^* F^*(t) \begin{vmatrix} f_1^*(z) \\ f_2^*(z) \end{vmatrix}, \quad \eta = \varphi G(t) \begin{vmatrix} Kf_1(z) \\ Kf_2(z) \end{vmatrix}, \quad \eta^* = \varphi^* G^*(t) \begin{vmatrix} Kf_1^*(z) \\ Kf_2^*(z) \end{vmatrix}. \tag{82}$$

Дальше получаем (несущественный числовой множитель 1/2 опускаем)

$$\Psi_{+}=\begin{vmatrix}\varphi F(t)f_1(z)+i\varphi^{*}G^{*}(t)Kf_2^{*}(z)\\ \varphi F(t)f_2(z)-i\varphi^{*}G^{*}(t)Kf_1^{*}(z)\\ \varphi G(t)Kf_1(z)-i\varphi^{*}F^{*}(t)f_2^{*}(z)\\ \varphi G(t)Kf_2(z)+i\varphi F^{*}(t)f_1^{*}(z)\end{vmatrix},\quad \Psi_{-}=\begin{vmatrix}\varphi F(t)f_1(z)-i\varphi^{*}G^{*}(t)Kf_2^{*}(z)\\ \varphi F(t)f_2(z)+i\varphi^{*}G^{*}(t)Kf_1^{*}(z)\\ \varphi G(t)Kf_1(z)+i\varphi^{*}F^{*}(t)f_2^{*}(z)\\ \varphi G(t)Kf_2(z)-i\varphi^{*}F^{*}(t)f_1^{*}(z)\end{vmatrix}. \tag{83}$$

Это представление майорановских компонент относится к спинорному базису. Структура майорановских решений может быть более понятной после их преобразования к майорановскому базису матриц Дирака с помощью соотношения

$$\Psi_{\pm}^{M}=\frac{1-\gamma^{2}}{\sqrt{2}}\Psi_{\pm}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1&0&0&-i\\0&1&i&0\\0&i&1&0\\-i&0&0&1\end{vmatrix}\Psi_{\pm}. \tag{84}$$

Так получаем (несущественный числовой множитель опускаем)

$$\Psi_{+}=\begin{vmatrix}[\varphi F(t)f_1(z)+i\varphi^{*}G^{*}(t)Kf_2^{*}(z)]-i[\varphi G(t)Kf_2(z)+i\varphi F^{*}(t)f_1^{*}(z)]\\ [\varphi F(t)f_2(z)-i\varphi^{*}G^{*}(t)Kf_1^{*}(z)]+i[\varphi G(t)Kf_1(z)-i\varphi^{*}F^{*}(t)f_2^{*}(z)]\\ i[\varphi F(t)f_1(z)+i\varphi^{*}G^{*}(t)Kf_2^{*}(z)]+[\varphi G(t)Kf_1(z)-i\varphi^{*}F^{*}(t)f_2^{*}(z)]\\ -i[\varphi F(t)f_1(z)+i\varphi^{*}G^{*}(t)Kf_2^{*}(z)]+[\varphi G(t)Kf_2(z)+i\varphi F^{*}(t)f_1^{*}(z)]\end{vmatrix}=(\Psi_{+})^{*}, \tag{85}$$

$$\Psi_{-}=\begin{vmatrix}[\varphi F(t)f_1(z)-i\varphi^{*}G^{*}(t)Kf_2^{*}(z)]-i[\varphi G(t)Kf_2(z)-i\varphi^{*}F^{*}(t)f_1^{*}(z)]\\ [\varphi F(t)f_2(z)+i\varphi^{*}G^{*}(t)Kf_1^{*}(z)]+i[\varphi G(t)Kf_1(z)+i\varphi^{*}F^{*}(t)f_2^{*}(z)]\\ i[\varphi F(t)f_2(z)+i\varphi^{*}G^{*}(t)Kf_1^{*}(z)]+[\varphi G(t)Kf_1(z)+i\varphi^{*}F^{*}(t)f_2^{*}(z)]\\ -i[\varphi G(t)Kf_2(z)-i\varphi^{*}F^{*}(t)f_1^{*}(z)]+[\varphi G(t)Kf_2(z)-i\varphi^{*}F^{*}(t)f_1^{*}(z)]\end{vmatrix}=-(\Psi_{-})^{*}. \tag{86}$$

Отмечаем, что компоненты Ψ_{+} и Ψ_{-} имеют требуемое поведение относительно операции комплексного сопряжения. Достаточно получить в явном виде решения уравнения Дирака в нестатических координатах, потом из них можно выделить в явном виде решения, отвечающие двум типам майорановских частиц.

Очевидно, что выделение майорановских компонент никак не может затронуть эффект отражения частиц от эффективного потенциального барьера. В заключение также отметим, что поскольку для построения решений, описывающих эффект отражения, нужно использовать комбинации решений с противоположными спиральностями, то эффект отражения отсутствует для вейлевских безмассовых фермионов, так как состояния с противоположными спиральностями относятся к частице и античастице.

Отметим также следующее обстоятельство. Преобразования, позволяющие выделить из решений уравнения Дирака решения для нейтральных (майорановских) частиц двух типов, а также преобразования, позволяющие выделить из уравнения Дирака более простые уравнения для безмассовых вейлевских частиц (нейтрино и антинейтрино), являются одинаковыми в пространствах Минковского и де Ситтера. Связи между фермионами разного типа сохраняются в любом псевдоримановом пространстве-времени. Это обусловлено тетрадным способом обобщения фермионных уравнений на псевдориманово пространство-время [12].

Благодарности. Авторы признательны В. М. Редькову за полезные советы, критику и помощь в работе.

Acknowledgements. The authors are deeply indebted to V. M. Redkov for his professional advice, criticism and help in the work.

Список использованных источников

1. Maxwell equations in Riemannian space-time, geometry effect on material equations in media / V. M. Red'kov [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2009. – Vol. 12, № 3. – P. 232–250.

2. Овсиюк, Е. М. О решениях уравнений Максвелла в квазидекартовых координатах в пространстве Лобачевского / Е. М. Овсиюк, В. М. Редьков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 4. – С. 99–105.

3. Новые задачи квантовой механики и уравнение Гойна / Е. М. Овсиюк [и др.] // Науч.-техн. ведомости СПбГПУ. Сер. физ.-мат. науки. – 2012. – № 1 (141). – С. 137–145.

4. Овсиюк, Е. М. О моделировании потенциального барьера в теории Шредингера геометрией пространства Лобачевского / Е. М. Овсиюк, О. В. Веко // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка, матэматыка. – 2011. – № 2. – С. 30–36.

5. Овсиюк, Е. М. Решения типа плоских волн для частицы со спином 1/2 в пространстве Лобачевского / Е. М. Овсиюк, О. В. Веко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 4. – С. 80–83.

6. Ovsiyuk, E. M. On simulating a medium with special reflecting properties by Lobachevsky geometry / E. M. Ovsiyuk, O. V. Veko, V. M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2013. – Vol. 16, № 4. – P. 331–344.

7. Овсиюк, Е. М. О моделировании среды со свойствами идеального зеркала по отношению к свету и частицам со спином 1/2 / Е. М. Овсиюк, О. В. Веко, В. М. Редьков. // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 1. – С. 76–85.

8. Овсиюк, Е. М. Скалярное поле в осциллирующей Вселенной де Ситтера и отражение от космологического барьера / Е. М. Овсиюк, А. Д. Коральков // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 3. – С. 18–25.

9. Red'kov, V. M. Parabolic coordinates and the hydrogen atom in spaces H3 and S3 / V. M. Red'kov, E. M. Ovsiyuk // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2011. – Vol. 14, № 2. – P. 1–20.

10. Редьков, В. М. Частица в магнитном поле: 2-мерное сферическое пространство Римана и комплексный аналог полуплоскости Пуанкаре / В. М. Редьков, Е. М. Овсиюк, А. М. Ишханян // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 1. – С. 55–62.

11. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдеи. – М.: Наука, 1973. – Т. 1: Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. – 294 с.

12. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск: Белорус. наука, 2009. – 496 с.

References

1. Red'kov V. M., Tokarevskaya N. G., Ovsiyuk E. M., Spix G. J. Maxwell equations in Riemannian space-time, geometry effect on material equations in media. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2009, vol. 12, no 3, pp. 232–250.

2. Ovsiyuk E. M., Red'kov V. M. On solutions of the Maxwell equations in quasicartesian coordinates in Lobachebsky space. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2009, no. 4, pp. 99–105 (in Russian).

3. Ovsiyuk E. M., Veko O. V., Kisel V. V., Red'kov V. M. New problems in quantum mechanics and the Heun equation. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki = St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*, 2012, no. 1 (141), pp. 137–145 (in Russian).

4. Ovsiyuk E. M., Veko O. V. On modeling a potential barrier in Schrödinger theory by geometry of the Lobachevsky space. *Vesnik Brestskaga universiteta Seryia 4. Fizika, matematyka = Vesnik of Brest University. Series 4. Physics, mathematics*, 2011, no. 2, pp. 30–36 (in Russian).

5. Ovsiyuk E. M., Veko O. V. Plane-wave solutions for a particle with spin 1/2 in the Lobachevsky space. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2012, no. 4, pp. 80–83 (in Russian).

6. Ovsiyuk E. M., Veko O. V., Red'kov V. M. On simulating a medium with special reflecting properties by Lobachevsky geometry. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2013, vol. 16, no. 4, pp 331–344.

7. Ovsiyuk E. M., Veko O. V., Red'kov V. M. On simulating a medium with the property of the ideal mirror for the light and spin 1/2 particles. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2015, no. 1, pp. 76–85 (in Russian).

8. Ovsiyuk E. M., Koralkov A. D. The scalar field in the oscillating de Sitter universe and reflection from cosmological barrier. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 3, pp. 18–25 (in Russian).

9. Red'kov V. M., Ovsiyuk E. M. Parabolic coordinates and the hydrogen atom in spaces H3 and S3. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2011, vol. 14, no. 2, pp. 1–20.

10. Red'kov V. M., Ovsiyuk E. M., Ishkhanyan A. M. Particle in the magnetic field: 2D Riemann spherical space and complex analogue of the Poincare half-plane. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2013, vol. 57, no. 1, pp. 55–62 (in Russian).

11. Bateman H., Erdélyi A. *Higher transcendental functions. Vol. 1. Hypergeometric function, Legendre functions*. Moscow, Nauka Publ., 1973. 294 p. (in Russian).

12. Red'kov V. M. *Field particles in Riemannian space and the Lorentz group*. Minsk, Belorusskaya nauka Publ., 2009. 496 p. (in Russian).

Информация об авторах

Овсиюк Елена Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики и математики, Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина (ул. Студенческая, 28, 247760, г. Мозырь, Гомельская обл., Республика Беларусь). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

Голуб Александр Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики и прикладной информатики, Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина (ул. Студенческая, 28, 247760, г. Мозырь, Гомельская обл., Республика Беларусь). E-mail: agolub@tut.by

Коральков Артем Дмитриевич – стажер младшего научного сотрудника, Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина (ул. Студенческая, 28, 247760, г. Мозырь, Гомельская обл., Республика Беларусь). E-mail: artemkoralkov@gmail.com

Information about the authors

Elena M. Ovsiyuk – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Assistant Professor of the Department of Physics and Mathematics, Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin (28, Studencheskaya Str., 247760, Mozyr, Republic of Belarus). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

Alexander A. Golub – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of the Department of Theoretical Physics and Applied Informatics, Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin (28, Studencheskaya Str., 247760, Mozyr, Republic of Belarus). E-mail: agolub@tut.by

Artem D. Koralkov – Assistant Junior Researcher, Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin (28, Studencheskaya Str., 247760, Mozyr, Republic of Belarus). E-mail: artemkoralkov@gmail.com