

УДК 514.142

А. В. ПРОКОПЧУК, В. И. ЯНЧЕВСКИЙ

О НЕЦИКЛИЧЕСКИХ УНИТАРНЫХ ИНВОЛЮЦИЯХ ГЕНЗЕЛЕВЫХ ДИСКРЕТНО НОРМИРОВАННЫХ АЛГЕБР С ДЕЛЕНИЕМ

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 27.12.2013)

В этой статье нас будут интересовать унитарные инволюции конечномерных центральных алгебр с делением. Напомним вначале необходимые определения.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть \mathcal{D} – конечномерная центральная алгебра с делением над полем K . Для квадратичного сепарабельного расширения полей K/k инволютивный антиавтоморфизм алгебры \mathcal{D} называется унитарной K/k -инволюцией, если его ограничение на K – нетривиальный автоморфизм с полем инвариантов k .

Среди унитарных инволюций с точки зрения изучения внешних анизотропных форм алгебраических групп типа A_n (см, напр., [3]) важную роль играют так называемые циклические.

О п р е д е л е н и е 2. K/k -инволюция τ алгебры \mathcal{D} называется циклической, если существует циклическое расширение χ/k , линейно разделенное над k с полем K такое, что композит χK – максимальное подполе алгебры \mathcal{D} .

Описание циклических K/k -инволюций для произвольных полей k является малореальной задачей, поэтому при исследовании проблемы цикличности инволюций обычно ограничиваются рассмотрением важных для приложений специальных классов расширений K/k . Среди первоначальных результатов о цикличности инволюций, которые получены к настоящему времени, отметим следующие ([1, 2]), связанные с различными условиями на поле k и алгебру \mathcal{D} (которая не обязательно алгебра с делением):

- (i) k – конечное поле и степень алгебры \mathcal{D} нечетна;
- (ii) поле k обладает свойством, что всякая квадратичная k -форма от 8 переменных изотропна, степень алгебры \mathcal{D} равна 3 и k содержит примитивный корень степени 3, если $\text{char } k \neq 3$;
- (iii) k – глобальное поле и алгебра \mathcal{D} нечетной степени расщеплена;
- (iv) k – локальное недиадическое поле и степень алгебры \mathcal{D} нечетна;
- (v) k – поле алгебраических чисел.

До сих пор до конца не рассмотрена ситуация гензелевых полей k , что является предметом рассмотрения настоящей статьи в случае, когда группа значений нормирования поля k дискретна (т. е. изоморфна \mathbb{Z}).

Пусть v_k – гензелево дискретное нормирование поля k , а v_K и $v_{\mathcal{D}}$ – их однозначные продолжения соответственно на поле K и алгебру \mathcal{D} с группами значений Γ_K и $\Gamma_{\mathcal{D}}$. Пусть $V_{\mathcal{D}}$, $M_{\mathcal{D}}$ и $\overline{\mathcal{D}} = V_{\mathcal{D}} / M_{\mathcal{D}}$ – соответственно кольцо, идеал и алгебра вычетов нормирования $V_{\mathcal{D}}$.

Проблема существования циклических унитарных инволюций в центральных гензелевых алгебрах с делением решается различно в зависимости от того, является ли рассматриваемая алгебра неразветвленной или нет. В случае неразветвленных алгебр имеется простая редукция этой проблемы к аналогичной задаче, связанной с алгебрами вычетов рассматриваемых алгебр. Напомним определение неразветвленных над K алгебр \mathcal{D} .

О п р е д е л е н и е 3. Алгебра \mathcal{D} называется неразветвленной над K , если $[\overline{\mathcal{D}} : \overline{K}] = [\mathcal{D} : K]$ и $Z(\overline{\mathcal{D}}) / \overline{K}$ – сепарабельное расширение полей (здесь $Z(\overline{\mathcal{D}})$ – центр алгебры $\overline{\mathcal{D}}$) и разветвленной в противном случае.

В случае неразветвленных над K алгебр \mathcal{D} имеет место следующая теорема редукции.

Т е о р е м а 1. Пусть \mathcal{D} – неразветвленная над K алгебра с делением и унитарной K / k -инволюцией. Тогда \mathcal{D} обладает циклической K / k -инволюцией тогда и только тогда, когда в $\overline{\mathcal{D}}$ существует циклическое расширение $\mathcal{E} / \overline{k}$, линейно разделенное с $\overline{K} / \overline{k}$, и такое, что $\mathcal{E}\overline{K}$ – подполе в $\overline{\mathcal{D}}$.

Для алгебр \mathcal{D} с ветвлением над K мы описываем важное необходимое условие для существования циклических инволюций в случае слабо разветвленных алгебр \mathcal{D} .

О п р е д е л е н и е 4. Алгебра \mathcal{D} слабо разветвлена над K , если порядок группы $\Gamma_{\mathcal{D}} / \Gamma_K$ взаимно просто с характеристикой поля \overline{K} .

Для таких алгебр имеет место следующая

Т е о р е м а 2. Пусть k – гензелево поле, \mathcal{D} / K – центральная алгебра с делением нечетного индекса с K / k -инволюцией, где K / k – неразветвленное квадратичное расширение. Если \mathcal{D} обладает циклической K / k -инволюцией, то примитивный корень степени p лежит в \overline{k} для любого простого делителя p индекса \mathcal{D} .

З а м е ч а н и е. Заметим, что в случае ветвящихся алгебр нечетного индекса расширение K / k всегда не разветвлено.

Из последней теоремы немедленно вытекает основное утверждение, описывающее нециклические K / k -инволюции в слабо разветвленных алгебрах нечетных индексов.

С л е д с т в и е. В обозначениях последней теоремы все K / k -инволюции алгебры \mathcal{D} нециклические при условии отсутствия примитивного корня из единицы степени p хотя бы для одного простого делителя p индекса \mathcal{D} .

Кроме того, при доказательстве теоремы 2 будет использовано следующее свойство центров $\overline{\mathcal{D}}$.

П р е д л о ж е н и е. Пусть \mathcal{D} / k , как и выше, – алгебра нечетного индекса, с K / k -инволюцией и K / k неразветвлено. Тогда группа Галуа центра $\overline{\mathcal{D}}$ над \overline{k} является группой диэдра.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $Z(\overline{\mathcal{D}})$ центр $\overline{\mathcal{D}}$. Тогда для алгебры инерции I алгебры \mathcal{D} ввиду леммы 3.17 [3] существует K / k -инволюция τ алгебры \mathcal{D} и простой элемент Π кольца $V_{\mathcal{D}}$ такие, что, $I^{\tau} = I$, $I^{i_{\Pi}} = I$ и $\Pi^{\tau} = \Pi$ (здесь i_{Π} – внутренний автоморфизм, индуцируемый элементом Π). Из последнего немедленно следует, что ограничения τ и $\tau_{i_{\Pi}}$ над I являются инволюциями этой алгебры с одинаковым действием на поле K . Тогда их редукции – инволюции $\overline{\mathcal{D}}$ с одинаковым действием на \overline{K} . Расширение $Z(\overline{\mathcal{D}} / \overline{k})$ является расширением Галуа с образующими $\overline{\tau}|_{Z(\overline{\mathcal{D}})}$ и $\overline{\tau_{i_{\Pi}}}|_{Z(\overline{\mathcal{D}})}$ (заметим, что их композиция совпадает с редукцией автоморфизма i_{Π} , который, в свою очередь, является образующей группы Галуа $Z(\overline{\mathcal{D}} / \overline{K})$, см. [4]). Откуда уже легко усмотреть, что группа Галуа $Z(\overline{\mathcal{D}})$ над \overline{k} является группой диэдра.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Нетрудно видеть, что достаточно доказать теорему в случае алгебр \mathcal{D} примарных индексов. Пусть $\text{ind } \mathcal{D} = p^n$ для простого p .

τ – циклическая K / k -инволюция такая, что χ / k – τ -инвариантное циклическое расширение со свойством: $\chi K / K$ – максимальное подполе в \mathcal{D} .

Рассмотрим два случая:

- (i) χ / k – расширение с ветвлением;
- (ii) χ – неразветвленное расширение k .

В случае (i) χ / k разлагается в башню $k \subseteq \chi_n \subseteq \chi$, где χ_n – максимальное неразветвленное подрасширение k в χ . Ввиду наших предположений об индексе алгебры \mathcal{D} и характеристики \overline{k} , расширение χ / χ_n – слабо вполне разветвлено степени, скажем, $p^s, s > 0$, и, следовательно, куммерово (т. е. $\chi = \chi_n(\sqrt[p^s]{\pi})$, где π – простой элемент кольца целых поля χ_n). Поскольку χ / χ_n циклично, примитивный корень степени p^s из единицы обязан принадлежать полю χ_n . Тогда

полю χ_n должен принадлежать корень ε_p p -й степени из единицы. Заметим, что это так в том и только в том случае, когда $\varepsilon_p \in k$. Действительно, $k \subseteq k(\varepsilon_p) \subseteq \chi_n$, и так как степень $[k(\varepsilon_p) : k]$ делит $p-1$ и одновременно делит p^s , то $k(\varepsilon_p) = k$. Ввиду нашего предположения о взаимной простоте p и характеристики поля вычетов \bar{k} поля k , $\varepsilon_p \in k$ тогда и только тогда, когда его вычет принадлежит полю \bar{k} . Таким образом, отсутствие примитивного корня p -й степени в \bar{k} противоречит цикличности τ .

В случае (ii) в алгебре \mathcal{D} имеется подалгебра инерции I такая, что $\mathcal{D} \supseteq I \supseteq \chi \supseteq k$. Так как $\text{Gal}(Z(\bar{\mathcal{D}})/\bar{k})$ – группа диэдра, ввиду $\bar{\mathcal{D}} = \bar{I} \text{Gal}(Z(\bar{I})/\bar{k})$ – группа диэдра. Значит, $\text{Gal}(Z(I)/k) \cong \text{Gal}(Z(\bar{\mathcal{D}})/\bar{k})$, здесь $Z(\bar{\mathcal{D}}), Z(\bar{I})$ – центр \mathcal{D} и I соответственно.

С другой стороны, $Z(I) \subseteq \chi K$, так как любой элемент из χ или K перестановочен с элементами $Z(I)$. Следовательно, $k \subseteq Z(I) \subseteq \chi K$. Группа $\text{Gal}(\chi K/k)$ абелева, поскольку расширения χ/k и K/k линейно разделены и цикличны. Следовательно, $\text{Gal}(Z(I)/k) \cong \text{Gal}(\chi K/k) / \text{Gal}(\chi K/Z(I))$, и потому $\text{Gal}(Z(I)/k)$ – абелева, что противоречит тому, что $\text{Gal}(Z(I)/k)$ – группа диэдра (которая некоммутативна).

Литература

1. Прокопчук А. В., Тихонов С. В., Янчевский В. И. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2013. № 1. С. 36–40.
2. Янчевский В. И. // Докл. НАН Беларусі. 2013. Т. 57, № 2. С. 32–37.
3. Платонов В. П., Рапичук А. С. Алгебраические группы и теория чисел. М., 1991.
4. Jacob B., Wadsworth A. // J. Algebra. 1990. Vol. 128. P. 126–179.

A. V. PROKOPCHUK, V. I. YANCHEVSKII

NON-CYCLIC UNITARY INVOLUTIONS OF HENSELIAN DISCRETELY VALUED DIVISION ALGEBRAS

Summary

Let \mathcal{D}/K be a Henselian discrete valued tamely ramified central division K -algebra of odd degree. The following necessary condition for existence of the cyclic unitary K/k -involution of \mathcal{D} (K/k is a separable extension of degree 2) is proved: the primitive root of unity of p^{th} degree for any prime divisor of index \mathcal{D} lies in the residue field \bar{k} of k . The description of the wide class of non-cyclic involutions of above algebras follows immediately from the above condition.