ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.958
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-391-403

Поступила в редакцию 22.10.2018
Received 22.10.2018

В. И. Корзюк[1,2], И. И. Столярчук[2]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА КЛЕЙНА – ГОРДОНА – ФОКА В ПОЛУПОЛОСЕ С КОСЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Аннотация. Рассматривается смешанная задача для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока в полуполосе с первыми косыми производными в граничных условиях. При решении указанной задачи с помощью метода характеристик возникают эквивалентные интегральные уравнения Вольтерры второго рода. Для полученных интегральных уравнений доказано существование единственного решения в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций при заданной гладкости исходных данных. Показывается, что для гладкости решения поставленной задачи необходимо и достаточно выполнения условий согласования заданных функций при их достаточной гладкости. Метод характеристик сводится к разбиению всей области решения на подобласти, в каждой из которых строятся решения подзадач с использованием начальных и граничных условий. Полученные решения затем склеиваются в общих точках, порождая условия склейки, которые и являются условиями согласования. В настоящей работе рассматривается случай, когда направления производных в граничных условиях не совпадают с характеристическими направлениями. Данный подход позволяет строить как точные решения, так и приближенные. Точные решения могут быть найдены в том случае, если удастся разрешить эквивалентные интегральные уравнения Вольтерры. В противном случае можно найти приближенное решение задачи либо в аналитическом, либо в численном виде. Наряду с этим при построении приближенного решения существенными оказываются условия согласования, которые необходимо учитывать при использовании численных методов решения задачи.

Ключевые слова: уравнение Клейна – Гордона – Фока, метод характеристик, косые производные, классическое решение, смешанная задача, условия согласования

Для цитирования. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока в полуполосе с косыми производными в граничных условиях / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 391–403. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-391-403

V. I. Korzyuk[1,2], I. I. Stolyarchuk[2]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
[2]Belarusian State University, Minsk, Belarus

CLASSICAL SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR THE KLEIN – GORDON – FOCK TYPE EQUATION IN THE HALF-STRIP WITH CURVE DERIVATIVES AT BOUNDARY CONDITIONS

Abstract. The mixed problem for the one-dimensional Klein – Gordon – Fock type equation with curve derivatives at boundary conditions is considered in the half-strip. The solution of this problem is reduced to solving the second-type Volterra integral equations. Theorems of existence and uniqueness of the solution in the class of twice continuously differentiable functions were proven for these equations when initial functions are smooth enough. It is proven that the fulfillment of the matching conditions on the given functions is necessary and sufficient for the existence of the unique smooth solution when initial functions are smooth enough. The method of characteristics is used for the problem analysis. This method is reduced to splitting the original area of definition to the subdomains. The solution of the subproblem can be constructed in each subdomain with the help of the initial and boundary conditions. Then, the obtained solutions are glued in common points, and the obtained glued conditions are the matching conditions. This approach can be used in constructing as an analytical solution when a solution of the integral equation can be found in an explicit way, so an approximate solution. Moreover, approximate solutions can be constructed in numerical or analytical form. When a numerical solution is built, the matching conditions are essential and they need to be considered while developing numerical methods.

Keywords: Klein – Gordon – Fock equation, characteristics method, curve derivatives, classical solution, mixed problem, matching conditions

For citation. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the Klein – Gordon – Fock type equation in the half-strip with curve derivatives at boundary conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 391–403 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-391-403

Введение. Уравнение типа Клейна – Гордона – Фока, описывающее динамику релятивистской квантовой системы [1, 2], представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных, относящееся к классу гиперболических уравнений второго порядка.

В данной статье рассматривается смешанная задача для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с косыми производными первого порядка в граничных условиях для случая, когда направления косых производных в граничных условиях не совпадают с характеристическим. В [3] исследована смешанная задача для уравнения колебания полуограниченной струны. Статья [4] посвящена изучению задачи для колебания уже ограниченной струны с косыми производными в граничных условиях. В настоящей работе рассмотрена смешанная задача для уравнения Клейна – Гордона– Фока, в которой на обеих боковых границах полуполосы граничные условия содержат косые производные первого порядка. Для исследования поставленной задачи применяется хорошо зарекомендовавший себя метод характеристик, который использовался при изучении смешанных задач для волнового уравнения [5], а также первой смешанной задачи для уравнения Клейна – Гордона – Фока [6]. Решение получено в виде интегральных уравнений Вольтерры второго рода, которые достаточно легко поддаются численному решению. Выводятся необходимые и достаточные условия существования единственного решения в классе $C^2(\overline{Q})$.

1. Постановка задачи. В замыкании $\overline{Q}$ области $Q = \{(t,x) \mid t \in (0;\infty), x \in (0;l)\}$ задается гиперболическое дифференциальное уравнение второго порядка

$$\partial_t^2 w - a^2 \partial_x^2 w - \lambda(t,x) w = f(t,x), \tag{1}$$

где для определенности считаем, что $a > 0$.

К уравнению (1) присоединяются условия Коши

$$w(0,x) = \varphi(x), \partial_t w(0,x) = \psi(x), x \in [0;l], \tag{2}$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} B^{(0)} w = r_1^{(0)}(t)\partial_t w(t,0) + r_2^{(0)}(t)\partial_x w(t,0) + r_3^{(0)}(t) w(t,0) = \widetilde{\mu^{(0)}}(t),\ t \in [0;\infty), \\ B^{(l)} w = r_1^{(l)}(t)\partial_t w(t,l) + r_2^{(l)}(t)\partial_x w(t,l) + r_3^{(l)}(t) w(t,l) = \widetilde{\mu^{(l)}}(t),\ t \in [0;\infty), \end{aligned} \tag{3}$$

где $r_2^{(0)}(t) - a r_1^{(0)}(t) \neq 0,\ r_2^{(l)}(t) + a r_1^{(l)}(t) \neq 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{3} \left(r_j^{(m)}(t)\right)^2 \neq 0\ \forall t,\ m \in \{0, l\}$.

Условия (3) назовем граничными условиями с косыми производными [3; 4; 7, с. 403].

2. Частное решение неоднородного уравнения. В силу линейности задачи (1)–(3) общее решение $w(t,x) \in C^2\left(\overline{Q}\right)$ уравнения (1) представимо в виде $w(t,x) = v(t,x) + u(t,x)$, где $v(t,x)$ – частное решение неоднородного уравнения из $C^2\left(\overline{Q}\right)$, а $u(t,x)$ – общее решение однородного уравнения, также из $C^2\left(\overline{Q}\right)$.

Построение частного решения $v(t,x)$ будем осуществлять локально на подмножествах $Q^{(k)}$ области Q. Линиями $t = \dfrac{kl}{a}$ разделим область Q на подобласти $Q^{(k)}$,

где

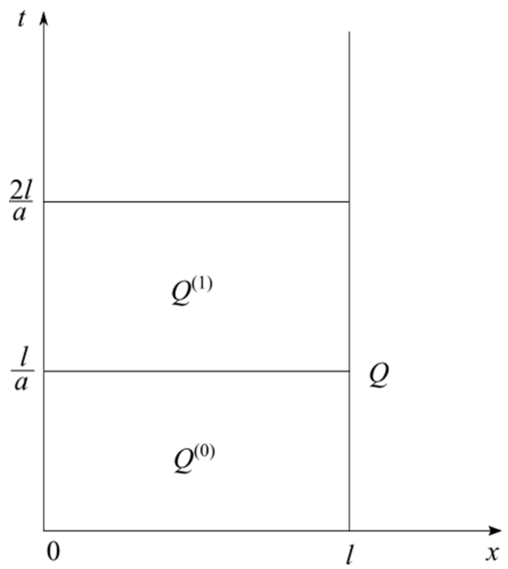

Рис. 1. Область Q
Fig. 1. Domain Q

$$Q^{(k)} = \left\{ (t,x) \mid t \in \left(\frac{kl}{a}; \frac{(k+1)l}{a} \right), x \in (0;l) \right\},\ k = 0,1,2,\ldots\ .$$

Разбиение области Q на подобласти $Q^{(k)}$ изображено на рис. 1.

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\partial_t^2 v - a^2 \partial_x^2 v - \lambda(t,x) v = f(t,x) \tag{4}$$

с однородными начальными условиями

$$v(0,x) = 0, \partial_t v(0,x) = 0,\ x \in [0;l]. \tag{5}$$

Общее решение уравнения (4) в области $Q^{(k)}$ можно записать в виде

$$v^{(k)}(t,x) = -\frac{1}{4a^2} \int\limits_{-kl}^{x-at} \int\limits_{(k+1)l}^{x+at} (\lambda v^{(k)} + f)\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2} \right) dzdy + h^{(1,k)}(x-at) + h^{(2,k)}(x+at), \tag{6}$$

где $h^{(1,k)}$, $h^{(2,k)}$ – произвольные функции из класса C^2 на области своего задания, которые являются решениями однородного волнового уравнения $\partial_t^2 v - a^2 \partial_x^2 v = 0.$ Решение уравнения (4) в области Q представимо как $v(t,x) = v^{(k)}(t,x),\ (t,x) \in Q^{(k)}$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\lambda(t,x), f(t,x) \in C^1(\overline{Q}),\ h^{(1,k)} \in C^2\left([-(k+1)l;-(k-1)l]\right), h^{(2,k)} \in C^2\left([kl;(k+2)l]\right)$, *тогда решение уравнения* (6) *существует в классе* $C^2\left(Q^{(k)}\right)$ *и может быть найдено с помощью метода последовательных приближений. Кроме того,* $v(t,x) \in C^2\left(\overline{Q}\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы приведено в работах [8, 9].

Так как задача (1)–(3) линейна, то при выполении теоремы 1 она сводится к решению задачи для однородного уравнения $Lu = 0$, т. е. задачи

$$\partial_t^2 u - a^2 \partial_x^2 u - \lambda(t,x) u = 0, \tag{7}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \partial_t u(0,x) = \psi(x), x \in [0;l], \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &r_1^{(0)}(t)\partial_t u(t,0) + r_2^{(0)}(t)\partial_x u(t,0) + r_3^{(0)}(t)u(t,0) = \mu^{(0)}(t),\ t \in [0;\infty), \\ &r_1^{(l)}(t)\partial_t u(t,l) + r_2^{(l)}(t)\partial_x u(t,l) + r_3^{(l)}(t)u(t,l) = \mu^{(l)}(t),\ t \in [0;\infty). \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $\mu^{(i)}(t) = \widetilde{\mu^{(i)}}(t) - B^{(i)}v(t,i),\ i \in \{0,l\},\ v$ – решение задачи (4), (5) для неоднородного уравнения.

3. Решение однородного уравнения. Уравнение (7) можно записать в каноническом виде. Для этого сделаем замену независимых переменных

$$\xi = x - at,\ \eta = x + at, \tag{10}$$

или

$$t = \frac{\eta - \xi}{2a}, \quad x = \frac{\eta + \xi}{2}. \tag{11}$$

В результате замены (10) или (11) уравнение (7) запишется в виде

$$\partial_{\xi\eta} v - b(\xi,\eta)v = 0, \tag{12}$$

где $b(\xi,\eta) = -\lambda(t,x)\dfrac{1}{4a^2} = -\dfrac{1}{4a^2}\lambda\left(\dfrac{\xi-\eta}{2a}, \dfrac{\xi+\eta}{2}\right)$.

Область Ω, которая является образом области Q при преобразовании (10), разделим прямыми $\eta = \xi + 2kl$, $k = 0,1,\ldots$, на подобласти $\Omega^{(k)}$. Подобласть $\Omega^{(k)}$ находится между прямыми $\eta = \xi + 2kl$ и $\eta = \xi + 2(k + 1)l$.

В подобластях $\Omega^{(k)}$ решение $v^{(k)}(\xi,\eta)$ уравнения (12) путем интегрирования представим в виде уравнения Вольтерры

$$v^{(k)}(\xi,\eta) = \int_{-kl}^{\xi} \int_{(k+1)l}^{\eta} b(y,z)v^{(k)}(y,z)dzdy + p^{(k)}(\xi) + g^{(k)}(\eta), \tag{13}$$

где $p^{(k)}$, $g^{(k)}$ – произвольные функции.

В уравнении (13) вернемся к переменным (t,x) с помощью замены (11):

$$u^{(k)}(t,x) = -\frac{1}{4a^2}\int_{-kl}^{x-at}\int_{(k+1)l}^{x+at} (\lambda u^{(k)})\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)dzdy + p^{(k)}(x-at) + g^{(k)}(x+at). \tag{14}$$

При замене (11) подобласти $\Omega^{(k)}$ перейдут в подобласти $Q^{(k)}$, которые изображены на рис. 1.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\lambda(t,x) \in C^1(\overline{Q^{(k)}})$. *Тогда решение* $u^{(k)}(t,x)$ *уравнения* (14) *существует, единственно, принадлежит классу* $C^2(\overline{Q^{(k)}})$ *и непрерывно зависит от правой части тогда и только тогда, когда* $p^{(k)} \in C^2([-(k+1)l;-(k-1)l])$, $g^{(k)} \in C^2([kl;(k+2)l])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о приведено в работах [8, 9].

Для применения метода характеристик область $Q^{(k)}$ для каждого индекса $k = 0,1,2,\ldots$ с характеристиками $x - at = -kl,\ x + at = (k+1)l$ разделим на четыре подобласти $Q^{(k,j)},\ j = \overline{1,4}$, следующим образом:

$$\begin{gathered} Q^{(k,1)} = \{(t,x) \in Q^{(k)} \mid x \in (0;l/2], at < x - kl\} \cup \{(t,x) \in Q^{(k)} \mid x \in [l/2;l), at < -x + (k+1)l\}, \\ Q^{(k,2)} = \{(t,x) \in Q^{(k)} \mid x \in (0;l/2), x - kl < at < -x + (k+1)l\}, \\ Q^{(k,3)} = \{(t,x) \in Q^{(k)} \mid x \in (l/2;l), -x + (k+1)l < at < x - kl\}, \\ Q^{(k,4)} = \{(t,x) \in Q^{(k)} \mid x \in (0;l/2], at > -x + (k+1)l\} \cup \{(t,x) \in Q^{(k)} \mid x \in [l/2;l), at > x - kl\}. \end{gathered}$$

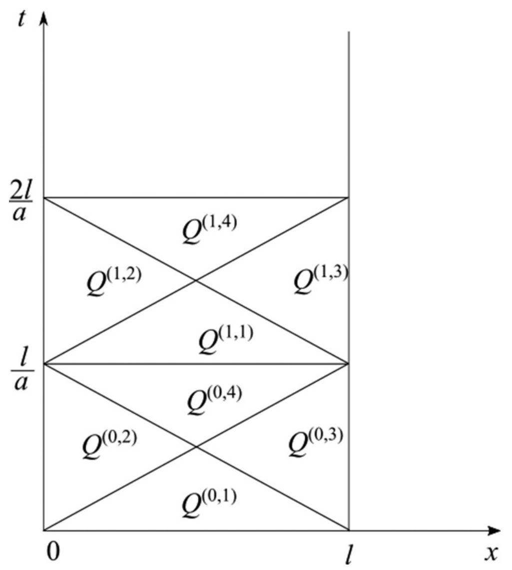

Рис. 2. Разбиение области $Q^{(k)}$ на подобласти $Q^{(k,j)}$, $j=\overline{1,4}$

Fig. 2. Domain $Q^{(k)}$ splitting to subdomains $Q^{(k,j)}$, $j=\overline{1,4}$

Подобласти $Q^{(k,j)}$ представлены на рис. 2.

Рассмотрим решение задачи (7)–(9) в каждой из подобластей $\overline{Q^{(k)}}$, используя условия Коши и граничные условия с косыми производными.

Задача Коши. В области $Q^{(k)}$ рассмотрим решение (14), удовлетворяющее условиям Коши

$$\begin{aligned} u(t,x)|_{t=kl/a} &= \varphi^{(k)}(x), \quad x\in[0;l],\\ \partial_t u(t,x)|_{t=kl/a} &= \psi^{(k)}(x), \quad x\in[0;l]. \end{aligned} \tag{15}$$

Задача Коши (14), (15) решается аналогично смешанной задаче с граничными условиями первого рода, которая рассмотрена в работе [6]. Приведем представления функций $p^{(k)}$ и $g^{(k)}$ для данного случая:

$$p^{(k)}(z)=\frac{1}{2}\Big(\varphi^{(k)}(z+kl)-\Psi^{(k)}(z+kl)-C\Big)+\int\limits_{(k+1)l}^{z+2kl}\int\limits_{z}^{\eta-2kl}\mathcal{L}u^{(k)}\big(\xi,\eta\big)d\xi d\eta,\ z\in[-kl;-(k-1)l], \tag{16}$$

$$g^{(k)}(y)=\frac{1}{2}\Big(\varphi^{(k)}(y-kl)+\Psi^{(k)}(y-kl)+C\Big)+\int\limits_{(k+1)l}^{y}\int\limits_{\eta-2kl}^{-kl}\mathcal{L}u^{(k)}\big(\xi,\eta\big)d\xi d\eta,\ y\in[kl;(k+1)l], \tag{17}$$

где $\Psi^{(\mathrm{k})}(x)=\frac{1}{a}\int\limits_{l}^{x}\psi^{(\mathrm{k})}(\xi)d\xi$ и $\mathcal{L}u^{(k)}(y,z)=-\frac{1}{4a^2}\Big(\lambda u^{(k)}\Big)\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)$.

Исходя из формул (16), (17), запишем представление решения задачи (14), (15) в области $Q^{(k,1)}$:

$$\begin{aligned} u^{(k)}(t,x)=\int\limits_{x+at-2kl}^{x-at}\int\limits_{y+2kl}^{x+at}\mathcal{L}u^{(k)}\big(\xi,\eta\big)d\eta d\xi+\frac{1}{2}\Big(\varphi^{(k)}(x-at+kl)+\varphi^{(k)}(x+at-kl)\Big)+\\ +\frac{1}{2}\Big(\Psi^{(k)}(x+at-kl)-\Psi^{(k)}(x-at+kl)\Big). \end{aligned} \tag{18}$$

Условие на левой границе. С помощью первого из условий (9) получаем следующее уравнение для нахождения неизвестной функции $p^{(k)}$ в области $Q^{(k,2)}$:

$$\left(r_2^{(0)}(t)-ar_1^{(0)}(t)\right)\left(\int\limits_{(k+1)l}^{-at}\mathcal{L}u^{(k)}(-at,z)dz+dp^{(k)}(-at)\right)+\left(r_2^{(0)}(t)+ar_1^{(0)}(t)\right)\times$$
$$\times\left(\int\limits_{-kl}^{-at}\mathcal{L}u^{(k)}(y,at)dy+dg^{(k)}(at)\right)+r_3^{(0)}(t)\left(\int\limits_{-kl}^{-at}\int\limits_{(k+1)l}^{at}\mathcal{L}u^{(k)}(y,z)dzdy+p^{(k)}(-at)+\right.$$
$$\left.+\widetilde{g^{(k)}}(at)+\frac{C}{2}\right)=\mu^{(0)}(t), \tag{19}$$

где $\widetilde{g^{(k)}}=g^{(k)}-\dfrac{C}{2}$.

Далее введем в рассмотрение функцию $\theta(\xi)$, которая определяется по формуле

$$\theta(\xi)=r_2^{(0)}\left(-\frac{\xi}{a}\right)-ar_1^{(0)}\left(-\frac{\xi}{a}\right). \tag{20}$$

В уравнении (19) в левую часть вынесем все слагаемые, содержащие неизвестную функцию $p^{(k)}$. С помощью (20) и замены $-at=\xi$, $\xi\in[-(k+1)l;-kl]$ уравнение (19) запишется в виде

$$\theta(\xi)dp^{(k)}(\xi)+r_3^{(0)}\left(-\frac{\xi}{a}\right)p^{(k)}(\xi)=Z^{(k)}(\xi)-r_3^{(0)}\left(-\frac{\xi}{a}\right)\frac{C}{2}, \tag{21}$$

где функция

$$Z^{(k)}(\xi)=\mu^{(0)}\left(-\frac{\xi}{a}\right)-\theta(\xi)\int\limits_{(k+1)l}^{-\xi}\mathcal{L}u^{(k)}(\xi,z)dz-\left(r_2^{(0)}\left(-\frac{\xi}{a}\right)+ar_1^{(0)}\left(-\frac{\xi}{a}\right)\right)\times$$
$$\times\left(\int\limits_{-kl}^{\xi}\mathcal{L}u^{(k)}(y,-\xi)dy+dg^{(k)}(-\xi)\right)-r_3^{(0)}\left(-\frac{\xi}{a}\right)\left(\int\limits_{-kl}^{\xi}\int\limits_{(k+1)l}^{-\xi}\mathcal{L}u^{(k)}(y,z)dzdy+\widetilde{g^{(k)}}(-\xi)\right) \tag{22}$$

не содержит ни неизвестной функции $p^{(k)}$, ни свободной постоянной C.

В рассматриваемом случае, когда $\theta(\xi)\neq 0$, уравнение (21) можно разделить на $\theta(\xi)$. В результате получим линейное дифференциальное уравнение для нахождения неизвестной функции $p^{(k)}$:

$$dp^{(k)}(\xi)+\frac{p^{(k)}(\xi)}{\theta(\xi)}r_3^{(0)}\left(-\frac{\xi}{a}\right)=\frac{Z^{(k)}(\xi)}{\theta(\xi)}-\frac{1}{\theta(\xi)}r_3^{(0)}\left(-\frac{\xi}{a}\right)\frac{C}{2},\ \xi\in[-(k+1)l;-kl]. \tag{23}$$

Как известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, решение уравнения (23) можно записать в следующем виде [10, с. 35]:

$$p^{(k)}(\xi)=e^{-\int\limits_{-kl}^{\xi}\frac{r_3^{(0)}(-\xi_1/a)}{\theta(\xi_1)}d\xi_1}\left(C_p+\int\limits_{-kl}^{\xi}\frac{Z^{(k)}(\xi_1)}{\theta(\xi_1)}e^{\int\limits_{-kl}^{\xi_1}\frac{r_3^{(0)}(-\xi_2/a)}{\theta(\xi_2)}d\xi_2}d\xi_1\right)-\frac{C}{2},\quad \theta(\xi)\neq 0. \tag{24}$$

Для того чтобы функция $p^{(k)}(\xi)$ была непрерывной в точке $\xi=-kl$, определим свободную константу C_p, приравнивая значения функций $p^{(k)}$, определенных по формулам (16) и (24), в точке $\xi=-kl$. Искомая константа имеет следующий вид:

$$C_p=\frac{\varphi^{(k)}(0)}{2}-\frac{1}{2a}\int\limits_{l}^{0}\psi^{(k)}(\xi)\,d\xi+\int\limits_{(k+1)l}^{kl}d\eta\int\limits_{-kl}^{\eta-2kl}\mathcal{L}u^{(k)}(\xi,\eta)d\xi. \tag{25}$$

Исходя из условия (25), функция $p^{(k)}$ из (24) записывается как

$$p^{(k)}(\xi)=e^{-\int\limits_{-kl}^{\xi}\frac{r_3^{(0)}\left(\frac{-\xi_1}{a}\right)}{\theta(\xi_1)}d\xi_1}\left(\frac{1}{2}\varphi^{(k)}(0)-\frac{1}{2}\Psi^{(k)}(0)+\int\limits_{(k+1)l}^{kl}\int\limits_{-kl}^{z-2kl}\mathcal{L}u^{(k)}(y,z)dydz+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{-kl}^{\xi}\frac{Z^{(k)}(\xi_1)}{\theta(\xi_1)}e^{\int\limits_{-kl}^{\xi_1}\frac{r_3^{(0)}\left(\frac{-\xi_2}{a}\right)}{\theta(\xi_2)}d\xi_2}d\xi_1\right)-\frac{C}{2},\ \xi\in[-(k+1)l;-kl]. \tag{26}$$

Решение задачи (7)–(9) в области $Q^{(k,2)}$ имеет следующий вид:

$$u^{(k)}(t,x)=\int\limits_{-kl}^{x-at}\int\limits_{(k+1)l}^{x+at}\mathcal{L}u^{(k)}\left(y,z\right)dydz+p^{(k)}(x-at)+g^{(k)}(x+at), \tag{27}$$

где функция $p^{(k)}$ определена по формуле (26).

Стоит отметить, что только при выборе константы C_p в виде выражения (25) решение $u^{(k)}(t,x),(t,x)\in\overline{Q^{(k,j)}},\ j=1,2,$ задачи (7)–(9) будет принадлежать классу $C\left(\overline{Q^{(k,1)}}\bigcup\overline{Q^{(k,2)}}\right)$.

Для того чтобы решение $u^{(k)}(t,x)$ задачи (7)–(9) на множестве $\overline{Q^{(k,1)}}\bigcup\overline{Q^{(k,2)}}$ было непрерывно дифференцируемым, необходимо совпадение производных первого порядка функций $p^{(k)}$, определенных по формулам (16) и (26). Приравнивая производные в точке $\xi=-kl$, получим условие согласования на производные заданных функций

$$\mu^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)-r_3^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)\left(\varphi^{(k)}(0)\right)-r_2^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)d\varphi^{(k)}(0)-r_1^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)\psi^{(k)}(0)=0. \tag{28}$$

Аналогично, дважды дифференцируя (16) и (26) и находя разность полученных выражений в точке согласования $\xi=-kl$, получаем очередное условие согласования на заданные функции

$$\left(r_2^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)dr_1^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)-r_1^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)dr_2^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)+r_2^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)r_3^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)\right)\times$$

$$\times\left(d\varphi^{(k)}(0)+\frac{1}{a}\psi^{(k)}(0)\right)-\left(\theta(-kl)\right)^2\frac{1}{a}\left(d\,\frac{\mu^{(0)}(t)}{r_2^{(0)}(t)-ar_1^{(0)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}-$$

$$-\mu^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)r_3^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)+\varphi^{(k)}(0)\left(-\frac{1}{a}\left(\theta(-kl)\right)^2\left(d\,\frac{r_3^{(0)}(t)}{r_2^{(0)}(t)-ar_1^{(0)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}+\left(r_3^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)\right)^2\right)+$$

$$+\left(ad^2\varphi^{(k)}(0)r_1^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)+\frac{1}{a}d\psi^{(k)}(0)r_2^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)\right)\theta(-kl)-\frac{1}{2a^2}\theta(-kl)\lambda\left(\frac{kl}{a},0\right)\varphi^{(k)}(0)=0. \tag{29}$$

Л е м м а 1. *Пусть функции* $\varphi^{(k)}\in C^2([0;l]),\ \psi^{(k)}\in C^1([0;l])$; *функция* $\mu^{(0)}\in C^1\left([0;\infty)\right)$, $r_i^{(0)}\in C^1\left([0;\infty)\right),\ i=\overline{1,3}$, *причем функция* $\theta(\xi)\neq 0\ \forall\xi\in[-(k+1)l;-kl]$; $\lambda(t,x)\in C^1\left(\overline{Q}\right)$. *Функция* $p^{(k)}$, *определенная по формулам* (16), (26), *принадлежит классу* $C^2\left([-(k+1)l,-(k-1)l]\right)$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования, определенные по формулам* (28)–(29), *а константа* C_p *выбирается по формуле* (25).

Условие на правой границе. Исследование граничного условия на правой границе из (9) во многом повторяет исследование граничного условия на левой границе.

Из второго условия в (9) получаем следующее уравнение для нахождения неизвестной функции $g^{(k)}$ в области $Q^{(k,3)}$:

$$\left(r_2^{(l)}(t)+ar_1^{(l)}(t)\right)dg^{(k)}(l+at)+r_3^{(l)}(t)g^{(k)}(l+at)=\mu^{(l)}(t)-$$
$$-r_1^{(l)}(t)\left(a\int_{-kl}^{l-at}\mathcal{L}u^{(k)}(y,l+at)dy-a\int_{(k+1)l}^{l+at}\mathcal{L}u^{(k)}(l-at,z)dz-adp^{(k)}(l-at)\right)-$$
$$-r_2^{(l)}(t)\left(\int_{-kl}^{l-at}\mathcal{L}u^{(k)}(y,l+at)dy+\int_{(k+1)l}^{l+at}\mathcal{L}u^{(k)}(l-at,z)dz+dp^{(k)}(l-at)\right)-$$
$$-r_3^{(l)}(t)\left(\int_{-kl}^{l-at}\int_{(k+1)l}^{l+at}\mathcal{L}u^{(k)}(y,z)dzdy+\widetilde{p^{(k)}}(l-at)\right)+r_3^{(l)}(t)\frac{C}{2}. \tag{30}$$

Здесь $\widetilde{p^{(k)}}=p^{(k)}+\dfrac{C}{2}$. Введем обозначение

$$\rho(l+at)=r_2^{(l)}(t)+ar_1^{(l)}(t). \tag{31}$$

С помощью (31) и замены $\eta=l+at,\ \eta\in[(k+1)l,(k+2)l]$, уравнение (30) запишется в виде

$$\rho(\eta)dg(\eta)+r_3^{(l)}\left(\frac{\eta-l}{a}\right)g(\eta)=Y^{(k)}(\eta)+r_3^{(l)}\left(\frac{\eta-l}{a}\right)\frac{C}{2}, \tag{32}$$

где

$$Y^{(k)}(\eta)=\mu^{(l)}\left(\frac{\eta-l}{a}\right)-r_3^{(l)}\left(\frac{\eta-l}{a}\right)\left(\int_{-kl}^{2l-\eta}\int_{(k+1)l}^{\eta}\mathcal{L}u^{(k)}(y,z)dzdy+\widetilde{p^{(k)}}(2l-\eta)\right)-$$
$$-\rho(\eta)\int_{-kl}^{2l-\eta}\mathcal{L}u^{(k)}(y,\eta)dy-\left(r_2^{(l)}\left(\frac{\eta-l}{a}\right)-ar_1^{(l)}\left(\frac{\eta-l}{a}\right)\right)\times$$
$$\times\left(\int_{(k+1)l}^{\eta}\mathcal{L}u^{(k)}(2l-\eta,z)dz+dp^{(k)}(2l-\eta)\right). \tag{33}$$

Так как в данной работе изучается случай, когда $\rho(\eta)\neq 0$, уравнение (32) можно разделить на $\rho(\eta)$. В результате получим линейное дифференциальное уравнение для нахождения неизвестной функции $g^{(k)}$

$$dg^{(k)}(\eta)+\frac{r_3^{(l)}\left(\frac{\eta-l}{a}\right)}{\rho(\eta)}g^{(k)}(\eta)=\frac{Y^{(k)}(\eta)}{\rho(\eta)}+\frac{r_3^{(l)}\left(\frac{\eta-l}{a}\right)}{\rho(\eta)}\frac{C}{2},\ \eta\in[(k+1)l;(k+2)l]. \tag{34}$$

Общее решение дифференциального уравнения (34) записывается в виде

$$g^{(k)}(\eta)=e^{-\int_{(k+1)l}^{\eta}\frac{r_3^{(l)}((\eta_1-l)/a)}{\rho(\eta_1)}d\eta_1}\left(C_g+\int_{(k+1)l}^{\eta}\frac{Y^{(k)}(\eta_1)}{\rho(\eta_1)}e^{\int_{(k+1)l}^{\eta_1}\frac{r_3^{(l)}((\eta_2-l)/a)}{\rho(\eta_2)}d\eta_2}d\eta_1\right)+\frac{C}{2}. \tag{35}$$

Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые проведены при выводе (26), находим константу C_g в виде

$$C_g = \frac{\varphi^{(k)}(l)}{2}. \tag{36}$$

В результате получаем следующее представление решения $g^{(k)}$:

$$g^{(k)}(\eta) = e^{-\int\limits_{(k+1)l}^{\eta} \frac{r_3^{(l)}\left(\frac{\eta_1 - l}{a}\right)}{\rho(\eta_1)} d\eta_1} \left(\int\limits_{(k+1)l}^{\eta} \frac{Y^{(k)}(\eta_1)}{\rho(\eta_1)} e^{\int\limits_{(k+1)l}^{\eta_1} \frac{r_3^{(l)}\left(\frac{\eta_2 - l}{a}\right)}{\rho(\eta_2)} d\eta_2} d\eta_1 + \frac{1}{2}\varphi^{(k)}(l) \right) + \frac{C}{2},$$

$$\eta \in [(k+1)l; (k+2)l]. \tag{37}$$

Решение задачи (7)–(9) в области $Q^{(k,3)}$ имеет вид

$$u^{(k)}(t,x) = \int\limits_{-kl}^{x-at} \int\limits_{(k+1)l}^{x+at} \mathcal{L}u^{(k)}(y,z)\,dy\,dz + p^{(k)}(x-at) + g^{(k)}(x+at), \tag{38}$$

где функция $g^{(k)}(\eta)$ определена по формуле (37).

Также стоит отметить, что только при выборе константы C_g в виде (36) решение $u^{(k)}(t,x)$ задачи (7)–(9), $(t,x) \in \overline{Q^{(k,j)}}$, $j = 1,3$, будет принадлежать классу $C(\overline{Q^{(k,1)}} \bigcup \overline{Q^{(k,3)}})$, и при этом данное решение будет единственным.

Для того чтобы решение $u^{(k)}(t,x)$ было дважды непрерывно дифференцируемым, необходимо и достаточно совпадения производных функций $g^{(k)}$, определенных по формулам (17) и (37), до второго порядка включительно в точке $\eta = (k + 1)l$:

$$\mu^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right) - r_3^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)\varphi^{(k)}(l) - r_2^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right) d\varphi^{(k)}(l) - r_1^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)\psi^{(k)}(l) = 0. \tag{39}$$

Для непрерывности второй производной $d^2g^{(k)}$ в точке $\eta = (k + 1)l$ находим условие согласования следующего вида:

$$\left(r_2^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right) r_3^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right) - r_1^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right) dr_2^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right) + r_2^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right) dr_1^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right) \right)\left(d\varphi^{(k)}(l) + \frac{1}{a}\psi^{(k)}(l) \right) +$$
$$+ \frac{1}{a}\left(\rho\left((k+1)l\right)\right)^2 \left(d\frac{\mu^{(l)}(t)}{r_2^{(l)}(t) + ar_1^{(l)}(t)} \right)\Bigg|_{t=kl/a} - \mu^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right) r_3^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right) +$$
$$+ \varphi^{(k)}(l)\left(-\frac{1}{a}\left(\rho\left((k+1)l\right)\right)^2 \left(d\frac{r_3^{(l)}(t)}{r_2^{(l)}(t) + ar_1^{(l)}(t)} \right)\Bigg|_{t=kl/a} + \left(r_3^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)\right)^2 \right) -$$
$$- \left(ad^2\varphi^{(k)}(l) r_1^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right) + \frac{1}{a} d\psi^{(k)}(l) r_2^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right) \right)\rho((k+1)l) = 0. \tag{40}$$

Л е м м а 2. *Пусть функции* $\varphi^{(k)} \in C^2([0;l])$, $\psi^{(k)} \in C^1([0;l])$; $\mu^{(l)} \in C^1\left([0;+\infty)\right)$, $r_i^{(0)} \in C^1\left([0;+\infty)\right)$, $i = \overline{1,3}$, $\lambda(t,x) \in C^1(\overline{Q})$. *Функция* $g^{(k)}$ *принадлежит классу* $C^2\left([kl;(k+2)l]\right)$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования* (39)–(40)*, а константа* C_g *выбирается по формуле* (36).

Нахождение решения в области $Q^{(k,4)}$. В области $Q^{(k,4)}$ решение строится автоматически по формуле (14), где функция $g^{(k)}$ задается формулой (37), а функция $p^{(k)}$ – выражением (26).

Из лемм 1, 2 вытекает

Утверждение. Пусть выполняются условия лемм 1, 2. Единственное решение $u^{(k)}$ из класса $C^2(\overline{Q^{(k)}})$, определенное на всем подмножестве $\overline{Q^{(k)}}$, существует тогда и только тогда, когда выполнены условия согласования (28)–(29) и условие выбора константы (25), а также условия согласования (39)–(40) и условия выбора константы (36).

4. Задача в полуполосе. Выше было построено решение задачи (7)–(9) и получены условия согласования для него в каждой отдельной области $Q^{(k)}$. В работе [6] получены необходимые и достаточные условия существования единственного решения в классе $C^2(\overline{Q})$ для первой смешанной задачи. Для задачи с косыми производными в случае, когда направление косой производной в граничных условиях (9) не совпадает с характеристическим, поступаем аналогично. Определим начальные функции $\varphi^{(k)}$ и $\psi^{(k)}$ следующим образом:

$$\varphi^{(k)}(x) = u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a}, x\right) = \int\limits_{-(k-1)l}^{x-kl} \int\limits_{kl}^{x+kl} \mathcal{L}u^{(k)}(\xi,\eta)d\eta d\xi + p^{(k-1)}(x-kl) + g^{(k-1)}(x+kl),$$

$$\psi^{(k)}(x) = \partial_t u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a}, x\right) = a\int\limits_{-(k-1)l}^{x-kl} \mathcal{L}u^{(k)}(\xi, x+kl)d\xi - \tag{41}$$

$$-a\int\limits_{kl}^{x+kl} \mathcal{L}u^{(k)}(x-kl,\eta)d\eta - adp^{(k-1)}(x-kl) + adg^{(k-1)}(x+kl),\ x\in[0;l].$$

Введем обозначение $u^{(k,k+1)}(t,x) = u^{(i)}(t,x),\ (t,x)\in\overline{Q^{(i)}},\ i = k, k+1.$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия утверждения в областях $Q^{(k-1)}$ и $Q^{(k)}$. Для того чтобы решение $u^{(k-1,k)}(t,x)\in C^2(\overline{Q^{(k-1)}}\cup\overline{Q^{(k)}})$, необходимо и достаточно, чтобы функции* $\varphi^{(k)}$ и $\psi^{(k)}$ *были определены по формуле* (41).

Доказательство. В силу утверждения, решение задачи в подобластях $Q^{(k-1)}$ *и* $Q^{(k)}$ принадлежит классу дважды непрерывно дифференцируемых функций. Для того чтобы решение $u^{(k-1,k)}(t,x)$ принадлежало классу $C^2(\overline{Q^{(k-1)}}\cup\overline{Q^{(k)}})$, необходимо и достаточно, чтобы $\partial_t^{b_1}\partial_x^{b_2}u^{(k)}\left(\frac{kl}{a},x\right) = \partial_t^{b_1}\partial_x^{b_2}u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a},x\right),\ 0\le b_1+b_2\le 2;\ b_1,b_2=\overline{0,2}.$

Докажем достаточность выполнения условий (41). Из них следует, что $u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a},x\right) = u^{(k)}\left(\frac{kl}{a},x\right),\ \partial_t u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a},x\right) = \partial_t u^{(k)}\left(\frac{kl}{a},x\right)$. Равенства

$$\begin{gathered}
\partial_x u^{(k\;\;1)}\left(\frac{kl}{a},x\right) = \partial_x u^{(k)}\left(\frac{kl}{a},x\right),\\
\partial_x^2 u^{(k\;\;1)}\left(\frac{kl}{a},x\right) = \partial_x^2 u^{(k)}\left(\frac{kl}{a},x\right),\\
\partial_t\partial_x u^{(k\;\;1)}\left(\frac{kl}{a},x\right) = \partial_t\partial_x u^{(k)}\left(\frac{kl}{a},x\right)
\end{gathered}\tag{42}$$

следуют как равенства производных по касательным направлениям. Для доказательства равенства вторых производных по переменной t воспользуемся уравнением (7):

$$\partial_t^2 u^{(k)}\left(\frac{kl}{a},x\right) = a^2\partial_x^2 u^{(k)}\left(\frac{kl}{a},x\right) + \lambda(t,x)u^{(k)}\left(\frac{kl}{a},x\right) =$$

$$= a^2\partial_x^2 u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a},x\right) + \lambda(t,x)u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a},x\right) = \partial_t^2 u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a},x\right). \tag{43}$$

Для доказательства необходимости условий (41) пойдем от противного. Пусть $\varphi^{(k)}$ и $\psi^{(k)}$ определены по формулам, отличным от вида (41). Тогда будут нарушаться равенства $u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a},x\right)=u^{(k)}\left(\frac{kl}{a},x\right)$, $\partial_t u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a},x\right)=\partial_t u^{(k)}\left(\frac{kl}{a},x\right)$, а следовательно, функция $u^{(k-1,k)}(t,x)$ либо ее производные будут терпеть разрыв на прямой $t=\frac{kl}{a}$.

Таким образом, гладкость решения смешанной задачи с косыми производными в граничных условиях сохраняется, если не совпадают характеристические направления уравнения и направления косых производных. Из данной леммы вытекает

Следствие. *Условия согласования* (28)–(29) *и* (39)–(40) *выполняются при некотором* k *тогда и только тогда, когда они выполняются для* $k-1$.

Доказательство. Рассмотрим, например, условие (28) при некотором k. Если подставить в данное условие выражение функций $\varphi^{(k)}$ и $\psi^{(k)}$ из формул (41), а также их производных, и далее упростить полученное выражение, то получится условие (39) в области $Q^{(k-1)}$. Аналогично рассматриваются и остальные случаи.

Теорема 3. *Пусть* $\theta(\xi)\neq 0$ и $\rho(\eta)\neq 0$. *Функции* $\varphi\in C^2([0;l])$, $\psi\in C^1([0;l])$, $\mu^{(j)}, r_i^{(j)}\in C^1([0;\infty))$, $j=0,l$, $i=\overline{1,3}$, $\lambda\in C^1\left(\overline{Q}\right)$. *Решение задачи* (7)–(9) *существует и единственно в классе* $C^2\left(\overline{Q}\right)$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования*

$$\mu^{(0)}(0)-r_3^{(0)}(0)\varphi(0)-r_2^{(0)}(0)d\varphi(0)-r_1^{(0)}(0)\psi(0)=0,$$

$$\left(r_2^{(0)}(0)dr_1^{(0)}(0)-r_1^{(0)}(0)dr_2^{(0)}(0)+r_2^{(0)}(0)r_3^{(0)}(0)\right)\times$$

$$\times\left(d\varphi(0)+\frac{1}{a}\psi(0)\right)-\left(\theta(0)\right)^2\frac{1}{a}\left(d\frac{\mu^{(0)}(t)}{r_2^{(0)}(t)-ar_1^{(0)}(t)}\right)\Bigg|_{t=0}-$$

$$-\mu^{(0)}(0)r_3^{(0)}(0)+\varphi(0)\left(-\frac{1}{a}\left(\theta(0)\right)^2\left(d\frac{r_3^{(0)}(t)}{r_2^{(0)}(t)-ar_1^{(0)}(t)}\right)\Bigg|_{t=0}+\left(r_3^{(0)}(0)\right)^2\right)+$$

$$+\left(ad^2\varphi(0)r_1^{(0)}(0)+\frac{1}{a}d\psi(0)r_2^{(0)}(0)\right)\theta(0)-\frac{1}{2a^2}\theta(0)\lambda(0,0)\varphi(0)=0,$$

$$\mu^{(l)}(0)-r_3^{(l)}(0)\varphi(l)-r_2^{(l)}(0)d\varphi(l)-r_1^{(l)}(0)\psi(l)=0,$$

$$\left(r_2^{(l)}(0)r_3^{(l)}(0)-r_1^{(l)}(0)dr_2^{(l)}(0)+r_2^{(l)}(0)dr_1^{(l)}(0)\right)\left(d\varphi(l)+\frac{1}{a}\psi(l)\right)+$$

$$+\frac{1}{a}\left(\rho(l)\right)^2\left(d\frac{\mu^{(l)}(t)}{r_2^{(l)}(t)+ar_1^{(l)}(t)}\right)\Bigg|_{t=0}-\mu^{(l)}(0)r_3^{(l)}(0)+$$

$$+\varphi(l)\left(-\frac{1}{a}\left(\rho(l)\right)^2\left(d\frac{r_3^{(l)}(t)}{r_2^{(l)}(t)+ar_1^{(l)}(t)}\right)\Bigg|_{t=0}+\left(r_3^{(l)}(0)\right)^2\right)-$$

$$-\left(ad^2\varphi(l)r_1^{(l)}(0)+\frac{1}{a}d\psi(l)r_2^{(l)}(0)\right)\rho(l)=0.$$

Доказательство данной теоремы следует из лемм 1, 2, 3, а также следствия.

5. Смешанная задача для неоднородного уравнения. Теорема 2 сформулирована для однородного уравнения (7). Для того чтобы получить необходимые и достаточные условия существования единственного гладкого решения смешанной задачи для неоднородного уравнения (1)–(3), воспользуемся условиями согласования, полученными для однородного уравнения, но заменим в них $d^n\mu^{(i)}(0)$ на $d^n\widetilde{\mu^{(i)}}(0)-d^nB^{(i)}v(t,i)|_{t=0}$, $n=\overline{0,1}$, $i=0,l$, где $v(t,x)$ – решение задачи (4)–(5).

Рассмотрим выражение $d^nB^{(i)}v(t,i)|_{t=0}=d^n\left(r_1^{(i)}(t)\partial_t v(t,i)+r_2^{(i)}(t)\partial_x v(t,i)+r_3^{(l)}(t)v(t,i)\right)|_{t=0}$ подробнее. Данный полином представляет собой сумму

$$d^nB^{(i)}v(t,i)|_{t=0}=\sum_{j=0}^{n}C_n^j\left(d^{n-j}r_1^{(i)}(t)\partial_t^{j+1}v(t,i)+d^{n-j}r_1^{(i)}(t)\partial_t^j v(t,i)+d^{n-j}r_1^{(i)}(t)\partial_t^j\partial_x v(t,i)\right)\Big|_{t=0},\quad (44)$$

где $C_n^j=\dfrac{n!}{j!(n-j)!}$ – биномиальный коэффициент, $i=0,l$.

Найдем значения выражений $\partial_t^j v(t,i)|_{t=0}, j=\overline{0,2}$ и $\partial_t^j\partial_x v(t,i)|_{t=0}, j=\overline{0,1}$.

С учетом начальных условий (5) справедливо равенство $v(0,i)=\partial_t v(0,i)=0$. Также из последнего выражения будет следовать, что $\partial_t\partial_x v(t,i)|_{t=0}=0$, $i=0,l$, как касательные производные. Из уравнения (4) получаем, что $\partial_t^2 v(0,i)=f(0,i)$. Таким образом, для неоднородного уравнения справедлива

Т е о р е м а 4. *Пусть* $\theta(\xi)\neq 0$ и $\rho(\eta)\neq 0$. *Функции* $\varphi\in C^2([0;l])$, $\psi\in C^1([0;l])$, $\widetilde{\mu^{(j)}}, r_i^{(j)}\in C^1\left([0;\infty)\right)$, $j=0,l$, $i=\overline{1,3}$, $\lambda,f\in C^1\left(\overline{Q}\right)$. *Решение задачи* (1)–(3) *существует и единственно в классе* $C^2\left(\overline{Q}\right)$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования*

$$\widetilde{\mu^{(0)}}(0)-r_3^{(0)}(0)\varphi(0)-r_2^{(0)}(0)d\varphi(0)-r_1^{(0)}(0)\psi(0)=0,$$
$$\widetilde{\mu^{(l)}}(0)-r_3^{(l)}(0)\varphi(l)-r_2^{(l)}(0)d\varphi(l)-r_1^{(l)}(0)\psi(l)=0,$$
$$\left(r_2^{(0)}(0)dr_1^{(0)}(0)-r_1^{(0)}(0)dr_2^{(0)}(0)+r_2^{(0)}(0)r_3^{(0)}(0)\right)\times$$
$$\times\left(d\varphi(0)+\frac{1}{a}\psi(0)\right)-\left(\theta(0)\right)^2\frac{1}{a}\left(d\,\frac{\widetilde{\mu^{(0)}}(t)-B^{(0)}v(t,0)}{r_2^{(0)}(t)-ar_1^{(0)}(t)}\right)\Bigg|_{t=0}-$$
$$-\widetilde{\mu^{(0)}}(0)r_3^{(0)}(0)+\varphi(0)\left(-\frac{1}{a}\left(\theta(0)\right)^2\left(d\,\frac{r_3^{(0)}(t)}{r_2^{(0)}(t)-ar_1^{(0)}(t)}\right)\Bigg|_{t=0}+\left(r_3^{(0)}(0)\right)^2\right)+$$
$$+\left(ad^2\varphi(0)r_1^{(0)}(0)+\frac{1}{a}d\psi(0)r_2^{(0)}(0)\right)\theta(0)-\frac{1}{2a^2}\theta(0)\lambda(0,0)\varphi(0)=0,$$
$$\left(r_2^{(l)}(0)r_3^{(l)}(0)-r_1^{(l)}(0)dr_2^{(l)}(0)+r_2^{(l)}(0)dr_1^{(l)}(0)\right)\left(d\varphi(l)+\frac{1}{a}\psi(l)\right)+$$
$$+\frac{1}{a}\left(\rho(l)\right)^2\left(d\,\frac{\widetilde{\mu^{(l)}}(t)-B^{(l)}v(t,l)}{r_2^{(l)}(t)+ar_1^{(l)}(t)}\right)\Bigg|_{t=0}-\widetilde{\mu^{(l)}}(0)r_3^{(l)}(0)+$$
$$+\varphi(l)\left(-\frac{1}{a}\left(\rho(l)\right)^2\left(d\,\frac{r_3^{(l)}(t)}{r_2^{(l)}(t)+ar_1^{(l)}(t)}\right)\Bigg|_{t=0}+\left(r_3^{(l)}(0)\right)^2\right)-$$
$$-\left(ad^2\varphi(l)r_1^{(l)}(0)+\frac{1}{a}d\psi(l)r_2^{(l)}(0)\right)\rho(l)=0.$$

Заключение. В статье рассмотрена смешанная задача для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с косыми производными первого порядка в граничных условиях в случае, когда направление данных производных отличается от направлений характеристик исходного уравнения. Для поставленной задачи с помощью метода характеристик выведены необходимые и достаточные условия существования единственного классического решения при заданной гладкости исходных данных.

Список использованных источников

1. Боголюбов, Н. Н. Квантовые поля / Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. – 3-е изд., доп. – М., ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 384 с.
2. Иваненко, Д. Д. Классическая теория поля (новые проблемы) / Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов. – 2-е изд. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1951. – 479 с.
3. Барановская, С. Н. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии / С. Н. Барановская, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1188–1191.
4. Новиков, Е. Н. Необходимые и достаточные условия колебаний ограниченной струны при косых производных в граничных условиях / Ф. Е. Ломовцев, Е. Н. Новиков // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 1. – С. 126–129.
5. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для волнового уравнения с интегральным условием / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2016. – Т. 6, № 60. – С. 22–27.
6. Корзюк, В. И. Первая смешанная задача для уравнения Клейна – Гордона – Фока в полуполосе / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 8. – С. 1105–1117.
7. Михлин, С. Г. Курс математической физики / С. Г. Михлин. – 2-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2002. – 575 с.
8. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения Клейна – Гордона – Фока с нелокальными условиями / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 6. – С. 20–27.
9. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения Клейна – Гордона – Фока с нелокальными условиями / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Тр. Ин-та математики. – 2018. – Т. 26, № 1. – С. 56–72.
10. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: пер. с нем. / Э. Камке. – 6-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2003. – 576 с.

References

1. Bogolyubov N. N., Shirkov D. V. *The Quantum Fields.* Moscow, Fizmatlit Publ., 2005. 384 p. (in Russian).
2. Ivanenko D. D., Sokolov A. A. *Classical Field Theory (New Problems).* Moscow, Leningrad, Gostekhteoretizdat Publ., 1951. 479 p. (in Russian).
3. Baranovskaya S. N., Yurchuk N. I. Mixed problem for the string vibration equation with a time-dependent oblique derivative in the boundary condition. *Differential Equations,* 2009, vol. 45, no. 8, pp. 1212–1215. https://doi.org/10.1134/s0012266109080126
4. Lomovtsev F. E., Novikov E. N. Necessary and sufficient conditions for the vibrations of a bounded string with directional derivatives in the boundary conditions. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 1, pp. 128–131. https://doi.org/10.1134/S0374064114010178
5. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution to the mixed problem for the wave equation with the integral condition. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2016, vol. 60, no. 6, pp. 22–27 (in Russian).
6. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the first mixed problem for the Klein-Gordon-Fock equation in a half-strip. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 8, pp. 1098–1111. https://doi.org/10.1134/S0374064114080081
7. Mikhlin S. G. *Course of Mathematical Physics*. 2nd ed. Saint Petersburg, Lan' Pybl., 2002. 575 p. (in Russian).
8. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution to the mixed problem for the Klein-Gordon-Fock equation with the unlocal conditions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 6, pp. 20–27 (in Russian).
9. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution to the mixed problem for the Klein – Gordon – Fock equation with the unlocal conditions. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2018. vol. 26, no. 1, pp. 56–72 (in Russian).
10. Kamke E. Gewöhnliche Differentialgleichungen. St. Petersburg, Lan' Publ., 2003, 589 p. (in Russian).

Информация об авторах

Виктор Иванович Корзюк – академик, профессор, доктор физико-математических наук, Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь), Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by

Столярчук Иван Игоревич – соискатель, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ivan.telkontar@gmail.com. https://orcid.org/0000-0001-6839-7997

Information about the authors

Viktor I. Korzyuk – Academician, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus), Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by

Ivan I. Stolyarchuk – Postgraduate Student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ivan.telkontar@gmail.com. https://orcid.org/0000-0001-6839-7997