ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.948.32:517.544
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407

Поступила в редакцию 11.10.2018
Received 11.10.2018

Э. И. Зверович, А. П. Шилин

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ И ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Аннотация. Приведены в явном виде решения линейных интегро-дифференциальных уравнений. Уравнения решаются на замкнутой кривой, принадлежащей комплексной плоскости. Коэффициенты уравнений имеют специальный вид. Интегралы в уравнениях понимаются в смысле главного значения и в смысле конечной части по Адамару.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы, обобщенные формулы Сохоцкого, краевая задача Римана

Для цитирования. Зверович, Э. И. Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида / Э. И. Зверович, А. П. Шилин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 404–407. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407

E. I. Zverovich, A. P. Shilin

Belarusian State University, Minsk, Belarus

INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SINGULAR AND HYPERSINGULAR INTEGRALS

Abstract. Quadrature linear integro-differential equations on a closed curve located in the complex plane are solved. The equations contain singular integrals which are understood in the sense of the main value and hypersingular integrals which are understood in the sense of the Hadamard finite part. The coefficients of the equations have a special structure.

Keywords: integro-differential equations, hypersingular integrals, generalized Sokhotsky formulas, Riemann boundary problem

For citation. Zverovich E. I., Shilin A. P. Integro-differential equations with singular and hypersingular integrals. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 404–407 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407

Интегралы, которые далее будут содержать в знаменателе $\tau - t$ в 1-й степени (сингулярные), понимаются в смысле главного значения, а в более высокой степени (гиперсингулярные) – в смысле конечной части по Адамару. Интегро-дифференциальные уравнения с такими интегралами в случае постоянных коэффициентов введены в рассмотрение и решены Э. И. Зверовичем [1]. Случай переменных коэффициентов в подобных уравнениях гораздо сложнее; здесь мы решим уравнения для переменных коэффициентов частного вида. Будут использоваться классические и обобщенные формулы Сохоцкого [2]:

$$\begin{cases} \Phi_+^{(k)}(t) - \Phi_-^{(k)}(t) = \varphi^{(k)}(t), \\ \Phi_+^{(k)}(t) + \Phi_-^{(k)}(t) = \dfrac{k!}{\pi i} \displaystyle\int_L \dfrac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^{k+1}}, \quad k = 0,1,2,\dots . \end{cases} \tag{1}$$

Пусть L – простая гладкая замкнутая кривая на комплексной плоскости, D_+ и D_- – области с границей L, причем $0 \in D_+$, $\infty \in D_-$. Зададим функции $p_\pm(z)$, аналитические в соответствующих областях $D_\pm$ и имеющие H-непрерывные предельные значения $p_\pm(t), p'_\pm(t), t \in L,$ причем $p_\pm(z) \neq 0, z \in D_\pm \cup L.$ Зададим также H-непрерывные функции $a(t) \neq 0, b(t) \neq 0, f(t), t \in L.$ Рассмотрим уравнение с искомой функцией $\varphi(t)$, H-непрерывной вместе со своей производной $\varphi'(t)$:

$$\big(a(t)p'_+(t)+b(t)p'_-(t)\big)\varphi(t)-\big(a(t)p_+(t)+b(t)p_-(t)\big)\varphi'(t)+$$
$$+\frac{a(t)p'_+(t)-b(t)p'_-(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)d\tau}{\tau-t}-\frac{a(t)p_+(t)-b(t)p_-(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)d\tau}{(\tau-t)^2}=f(t),\ \ t\in L. \qquad (2)$$

Введем кусочно-аналитическую функцию

$$\Phi_\pm(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)d\tau}{\tau-z},\quad z\in D_\pm.$$

Используя для предельных значений $\Phi_\pm(t)$, $\Phi'_\pm(t)$, $t\in L$, этой функции и ее производной формулы Сохоцкого (1) при $k=0$, 1, получим краевую задачу линейного сопряжения

$$\big(a(t)p'_+(t)+b(t)p'_-(t)\big)\big(\Phi_+(t)-\Phi_-(t)\big)-\big(a(t)p_+(t)+b(t)p_-(t)\big)\big(\Phi'_+(t)-\Phi'_-(t)\big)+$$
$$+\big(a(t)p'_+(t)-b(t)p'_-(t)\big)\big(\Phi_+(t)+\Phi_-(t)\big)-\big(a(t)p_+(t)-b(t)p_-(t)\big)\big(\Phi'_+(t)+\Phi'_-(t)\big)=f(t),t\in L. \quad (3)$$

Вводя еще одну кусочно-аналитическую функцию

$$F_\pm(z)=p'_\pm(z)\Phi_\pm(z)-p_\pm(z)\Phi'_\pm(z),\quad z\in D_\pm, \qquad (4)$$

задачу (3) можно преобразовать в краевую задачу Римана

$$F_+(t)=\frac{b(t)}{a(t)}F_-(t)+\frac{f(t)}{2a(t)},\quad t\in L. \qquad (5)$$

У функции $\Phi_-(z)$, введенной посредством интеграла типа Коши, должен быль нуль на бесконечности, тогда у функции $F_-(z)$, как видно из формулы (4) для этой функции, нуль на бесконечности должен быть по меньшей мере второго порядка. Это обстоятельство следует учитывать при решении задачи (5).

Если задача (5) окажется разрешимой и функции $F_\pm(z)$ будут найдены, то соотношения (4) станут линейными дифференциальными уравнениями для нахождения функций $\Phi_\pm(z)$. Удобно этим соотношениям придать вид

$$\left(\frac{\Phi_\pm(z)}{p_\pm(z)}\right)'=-\frac{F_\pm(z)}{p_\pm^2(z)},\quad z\in D_\pm,$$

откуда

$$\Phi_+(z)=p_+(z)\left(C_+-\int_0^z\frac{F_+(\zeta)d\zeta}{p_+^2(\zeta)}\right),\quad \Phi_-(z)=p_-(z)\left(C_--\int_\infty^z\frac{F_-(\zeta)d\zeta}{p_-^2(\zeta)}\right),$$

где пути интегрирования лежат в D_+ и D_- соответственно.

Константа C_+ останется произвольной, а константу C_- следует взять равной нулю, добиваясь выполнения условия $\Phi_-(\infty)=0$. Наконец, к решению уравнения (2) придем по формуле $\varphi(t)=\Phi_+(t)-\Phi_-(t)$.

Сформулируем окончательный результат в отношении уравнения (2), использующий формулы Ф. Д. Гахова [3] решения краевой задачи Римана (5); при этом $\alpha=\operatorname{Ind}_L\dfrac{b(t)}{a(t)}$, $X_\pm(z)$ – канонические функции этой задачи.

Теорема 1. *При* $\alpha\geq 1$ *уравнение* (2) *безусловно разрешимо. При* $\alpha<1$ *для его разрешимости необходимо и достаточно выполнения* $|\alpha|+1$ *условий разрешимости*

$$\int_L\frac{f(\tau)\tau^k d\tau}{a(\tau)X_+(\tau)}=0, \qquad (6)$$

где $k=0,1,\ldots,|\alpha|$.

Решение уравнения (2) *в случае его разрешимости содержит* $1 + \max(0, \alpha - 1)$ *произвольных постоянных и дается формулой*

$$\varphi(t) = p_+(t)\left(C - \int_0^t \frac{F_+(z)dz}{p_+^2(z)}\right) + p_-(t)\int_\infty^t \frac{F_-(z)dz}{p_-^2(z)},$$

где C – произвольная постоянная,

$$F_\pm(z) = X_\pm(z)\left(\frac{1}{4\pi i}\int_L \frac{f(\tau)d\tau}{a(\tau)X_+(\tau)(\tau - z)} + P(z)\right), \qquad (7)$$

а $P(z)$ *– многочлен степени* $\alpha - 2$ *с произвольными коэффициентами при* $\alpha \geq 2$, $P(z) \equiv 0$ *при* $\alpha < 2$.

Рассмотрим пример:

$$\left(e^t + \frac{2i}{(t+i)^2}\right)\varphi(t) - \left(e^t + \frac{t-i}{t+i}\right)\varphi'(t) + \left(e^t - \frac{2i}{(t+i)^2}\right)\frac{1}{\pi i}\int_{|\tau|=2} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} -$$

$$-\left(e^t - \frac{t-i}{t+i}\right)\frac{1}{\pi i}\int_{|\tau|=2} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^2} = 2 - 2\left(\frac{t-i}{t(t+i)}\right)^2, \quad |t| = 2.$$

Так выглядит уравнение (2) при $a(t) = b(t) = 1$, $p_+(t) = e^t$, $p_-(t) = \dfrac{t-i}{t+i}$; выражения для $f(t)$ и L очевидны.

Теорема 1 устанавливает факт разрешимости этого уравнения и приводит к следующему его общему решению:

$$\varphi(t) = Ce^t + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{t-i}{t(t+i)}.$$

Аналогично может быть решено уравнение

$$\big(a(t)p'_+(t) + b(t)p'_-(t)\big)\varphi(t) + \big(a(t)p_+(t) + b(t)p_-(t)\big)\varphi'(t) +$$

$$+\frac{a(t)p'_+(t) - b(t)p'_-(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)d\tau}{\tau - t} + \frac{a(t)p_+(t) - b(t)p_-(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)d\tau}{(\tau - t)^2} = f(t), \quad t \in L, \qquad (8)$$

лишь двумя знаками в левой части отличающееся от уравнения (2). Отдельно решение уравнения (8) приводить не будем, поскольку его (в отличие от уравнения (2)) удобно расценивать как частный случай при $n = 1$ решения более общего уравнения, в котором $n \in \mathbf{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k\left[\left(a(t)p_+^{(n-k)}(t) + b(t)p_-^{(n-k)}(t)\right)\varphi^{(k)}(t) + \left(a(t)p_+^{(n-k)}(t) - b(t)p_-^{(n-k)}(t)\right)\frac{k!}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)dt}{(\tau - t)^{k+1}}\right] = f(t), \qquad (9)$$

$$t \in L.$$

В дополнение к предыдущим требованиям в уравнении (9) функции $p_\pm(t), \varphi(t), t \in L,$ предполагаются имеющими H-непрерывные производные до порядка n включительно.

Используя формулы Сохоцкого (1) для $k = 0,1,\ldots,n$, снова аналогично приходим к задаче Римана (5), где теперь $F_\pm(t)$ – предельные значения на кривой L кусочно-аналитической функции $F_\pm(z) = \big(p_\pm(z)\Phi_\pm(z)\big)^{(n)}$, $z \in D_\pm$.

Задачу (5) теперь следует решать в классе функций, имеющих на бесконечности нуль порядка не ниже $n + 1$. Учитывая это обстоятельство и делая несложное интегрирование после нахождения функций $F_\pm(z)$, получим следующий результат.

Теорема 2. *При* $\alpha \geq n$ *уравнение* (9) *безусловно разрешимо. При* $\alpha < n$ *для его разрешимости необходимо и достаточно выполнение* $n-\alpha$ *условий разрешимости* (6)*, где* $k = 0,1,\ldots, n - \alpha - 1$. *Решение уравнения* (9) *в случае его разрешимости содержит* $n + \max(0,\alpha - n)$ *произвольных постоянных и дается формулой*

$$\varphi(t)=\frac{1}{p_+(t)}\left(Q(t)+\int_0^t d\tau_1\int_0^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_0^{\tau_{n-1}} F_+(\tau_n)d\tau_n\right)-\frac{1}{p_-(t)}\int_\infty^t d\tau_1\int_\infty^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_\infty^{\tau_{n-1}} F_-(\tau_n)d\tau_n, \qquad (10)$$

где $Q(t)$ *– многочлен степени* $n - 1$ *с произвольными коэффициентами, а* $F_\pm(z)$ *находятся по формулам* (7), *в которых* $P(z)$ *– многочлен степени* $n - \alpha - 1$ *с произвольными коэффициентами при* $\alpha \geq n + 1$, $P(z) \equiv 0$ *при* $\alpha < n + 1$.

Пусть $p(t)$ – функция, H-непрерывная на кривой L вместе со своими производными до порядка n включительно. Укажем еще один не слишком очевидный частный случай уравнения (9):

$$\frac{n!}{\pi i}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!}\int_L \frac{\varphi^{(n-k)}(t)p(\tau)+p^{(n-k)}(t)\varphi(\tau)}{(\tau-t)^{k+1}}d\tau = f(t), \quad t\in L. \qquad (11)$$

Так может быть записано уравнение (9), если в нем $a(t) = b(t) = 1$, а в роли функций $p_\pm^{(k)}(t),\ k=0,1\ldots,n,$ будут предельные значения на кривой L интеграла типа Коши $p_\pm(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{p(\tau)d\tau}{\tau - z}, z\in D_\pm,$ и его производных.

Для уравнения (11) мы сохраняем все предыдущие предположения, кроме предположения $p_-(\infty)\neq 0,$ противоречащего свойству интеграла типа Коши. Пусть m – порядок нуля на бесконечности функции $p\_(z)$. Условие $p\_(\infty) = 0$ повлияет лишь на разрешимость задачи Римана (5) и легко учитывается, поскольку эта задача теперь становится задачей о скачке $F_+(t)=F_-(t)+\frac{f(t)}{2},\ t\in L.$ Обозначим l порядок нуля на бесконечности интеграла типа Коши

$$\frac{1}{4\pi i}\int_L \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - z}, z\in D_\pm. \qquad (12)$$

С л е д с т в и е теоремы 2. *Для разрешимости уравнения* (11) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство* $l \geq m + n + 1$. *При выполнении этого неравенства решение уравнения* (11) *дается формулой* (10), *в которой* $F_\pm(z)$ *есть соответствующее значение интеграла типа Коши* (12).

Список использованных источников

1. Зверович, Э. И. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами / Э. И. Зверович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 6. – С. 5–8.
2. Зверович, Э. И. Обобщение формул Сохоцкого / Э. И. Зверович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 2. – С. 24–28.
3. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

References

1. Zverovich E. I. Solution of the hypersingular integro-differential equation with constant coefficients. *Doklady Nacionalnoi Akademii Nauk Belarusi = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2010, vol. 54, no. 6, pp. 5–8 (in Russian).
2. Zverovich E. I. Generalization of Sohotsky formulas. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2012, no. 6, pp. 24–28 (in Russian).
3. Gakhov F. D. *Boundary Value Problems.* Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p. (in Russian).

Информация об авторах

Зверович Эдмунд Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории функций, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: zverovich@bsu.by

Шилин Андрей Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и математической физики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: a.p.shilin@gmail.com

Information about the authors

Edmund I. Zverovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Function Theory, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: zverovich@bsu.by

Andrei P. Shilin – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Assistant Professor of the Department of Higher Mathematics and Mathematical Physics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: a.p.shilin@gmail.com