ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.983.54+519.6
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-408-416

Поступила в редакцию 15.07.2018
Received 15.07.2018

О. В. Матысик, В. Ф. Савчук

Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест, Беларусь

МЕТОД ИТЕРАЦИИ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИБЛИЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ В СЛУЧАЕ АПРИОРНОГО ВЫБОРА ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Аннотация. Указан объект исследования – некорректные задачи, описываемые операторными уравнениями I рода. Предмет исследования – явный итерационный метод решения уравнений I рода. Цель работы заключается в доказательстве сходимости предложенного метода простых итераций с попеременно чередующимся шагом и получении оценок погрешности в исходной норме гильбертова пространства для случаев самосопряженной и несамосопряженной задач. Априорный выбор параметра регуляризации изучается для истокообразно представимого решения в предположении, что оператор и правая часть уравнения заданы приближенно. Достижение поставленной цели выражено в четырех приведенных и доказанных теоремах: записано уравнение I рода и предлагается новый явный метод простой итерации с попеременно чередующимся шагом для его решения; рассматривается случай самосопряженной задачи; доказана теорема 1 о сходимости метода и теорема 2, в которой получена оценка погрешности (для получения оценки погрешности потребовалось дополнительное условие – требование истокопредставимости точного решения); решается несамосопряженная задача, доказана сходимость предложенного метода, который в этом случае запишется по-другому, и получена его оценка погрешности в случае априорного выбора параметра регуляризации. Полученные оценки погрешности оптимизированы, т. е. найдено значение $n_{\text{опт}}$ – номер шага итерации, при котором оценка погрешности минимальна. Поскольку некорректные задачи постоянно возникают в многочисленных приложениях математики, то проблема их изучения и построения методов их решения является актуальной. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях при решении операторных уравнений I рода, а также прикладных некорректных задач, встречающихся в динамике и кинетике, математической экономике, геофизике, спектроскопии, системах полной автоматической обработки и интерпретации экспериментов, диагностике плазмы, сейсмике и медицине.

Ключевые слова: самосопряженный оператор, гильбертово пространство, спектр оператора, собственное значение оператора, сходимость метода, исходная норма пространства, оценка погрешности, параметр регуляризации

Для цитирования. Матысик, О. В. Метод итерации решения некорректных уравнений с приближенным оператором в случае априорного выбора параметра регуляризации / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 408–416. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-408-416

O. V. Matysik, V. F. Savchuk

Brest State University named after A. S. Pushkin, Brest, Belarus

METHOD OF ITERATION OF SOLVING INVARIANT EQUATIONS WITH AN APPROXIMATE OPERATOR IN THE CASE OF AN ARBITRARY CHOICE OF THE REGULARIZATION PARAMETER

Abstract. In the introduction, the object of investigation is indicated – incorrect problems described by first-kind operator equations. The subject of the study is an explicit iterative method for solving first-kind equations. The aim of the paper is to prove the convergence of the proposed method of simple iterations with an alternating step alternately and to obtain error estimates in the original norm of a Hilbert space for the cases of self-conjugated and non self-conjugated problems. The *a priori* choice of the regularization parameter is studied for a source-like representable solution under the assumption that the operator and the right-hand side of the equation are given approximately. In the main part of the work, the achievement of the stated goal is expressed in four reduced and proved theorems. In Section 1, the first-kind equation is written down and a new explicit method of simple iteration with alternating steps is proposed to solve it. In Section 2, we consider the case of the self-conjugated problem and prove Theorem 1 on the convergence of the method and Theorem 2, in which an error estimate is obtained. To obtain an error estimate, an additional condition is required – the requirement of the source representability of the exact solution. In Section 3, the non-self-conjugated problem is solved, the convergence of the proposed method is proved, which in this case is written differently, and its error estimate is obtained in the case of an *a priori* choice of the regularization parameter. In sections 2 and 3, the error estimates obtained are optimized, that is, a value is found – the step number of the iteration, in which the error estimate is minimal. Since incorrect problems constantly arise in numerous applications of mathematics, the problem of studying them and constructing methods for their solution is topical. The obtained results can be used in theoretical studies of solution of first-kind operator equations, as well as applied ill-posed problems encountered in dynamics and kinetics, mathematical economics, geophysics, spectroscopy, systems for complete automatic processing and interpretation of experiments, plasma diagnostics, seismic and medicine.

Keywords: self-conjugate operator, Hilbert space, operator spectrum, operator eigenvalue, method convergence, initial space norm, error estimate, regularization parameter

For citation. Matysik O. V., Savchuk V. F. Method of iteration of solving invariant equations with an approximate operator in the case of an arbitrary choice of the regularization parameter. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 408–416 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-408-416

Введение. Как известно, погрешность наиболее изученного в научной литературе метода простой итерации с постоянным шагом (метода Ландвебера) решения уравнения первого рода $Ax = y$ [1–11]

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta}), \quad x_{0,\delta} = 0 \tag{1}$$

зависит от суммы шагов по антиградиенту и притом так, что для сокращения числа итераций желательно, чтобы шаг по антиградиенту был как можно большим. Однако на этот шаг накладывается ограничение сверху $\left(0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|}\right)$. Возникла идея попытаться ослабить это ограничение, что удалось сделать, выбирая для шага попеременно два значения α и β, где β уже не обязано удовлетворять прежним требованиям. В настоящей статье предлагается явный итерационный метод – метод простой итерации с попеременно чередующимся шагом решения некорректных задач, описываемых операторными уравнениями первого рода.

В работе [2] доказывается сходимость метода простой итерации (1). Показано, что метод итераций (1) сходится при условии $0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|}$, если число итераций n выбирается так, чтобы $n\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0.$ В предположении, что точное решение x^* уравнения $Ax = y$ истокопредставимо, т. е. $x^* = A^s z,\ s > 0$, в [2] при условии $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$ получена априорная оценка погрешности метода (1) при точном операторе и приближенной правой части $y_\delta : \|y - y_\delta\| \le \delta,$ которая затем оптимизирована, и найден априорный момент останова.

В работе [3] рассматривается сходимость метода простой итерации (1) в случае неединственного решения. Показано, что тогда метод итераций (1) сходится к нормальному решению операторного уравнения $Ax = y$.

В статье [4] изучена сходимость метода простой итерации в энергетической норме гильбертова пространства. Использование энергетической нормы позволило получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова без дополнительного требования – истокопредставимости точного решения.

Впервые апостериорный выбор числа итераций был предложен для метода (1) И. В. Емелиным и М. А. Красносельским. Ими обоснована возможность применения правила останова по невязке [5] и правила останова по соседним приближениям [6] к явному методу простой итерации решения некорректных задач. В дальнейшем их идеи были продолжены Г. М. Вайникко и А. Ю. Веретенниковым [7]. Метод простой итерации решения уравнений I рода (1) изучался также А. Б. Бакушинским [8], М. М. Лаврентьевым [9], А. М. Денисовым [10], А. А. Самарским и П. Н. Вабищевичем [11].

Различные схемы явных и неявных итерационных методов с априорным и апостериорным выбором числа итераций предложены в работах В. Ф. Савчука и О. В. Матысика [12–15].

1. Постановка задачи. Пусть H и F – гильбертовы пространства и $A \in L(H, F)$, т. е. A – линейный непрерывный оператор, действующий из H в F. Предполагается, что нуль не является собственным значением оператора A, однако принадлежит его спектру. Решается уравнение

$$Ax = y. \tag{2}$$

Задача отыскания $x^* \in H$ по элементу $y \in F$ является некорректной, так как сколь угодно малые возмущения в правой части y могут вызывать сколь угодно большие возмущения решения.

Предположим, что точное решение $x^* \in H$ уравнения (1) существует и является единственным. Будем искать его с помощью явного итерационного метода простой итерации с попеременно чередующимся шагом

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_{n+1}(y - Ax_n),\ x_0 = 0,$$
$$\alpha_{2n+1} = \alpha,\ n = 0,1,2,...,\ \ \alpha_{2n+2} = \beta,\ n = 0,1,2,.... \tag{3}$$

В случае приближенной правой части $y_\delta : \|y - y_\delta\| \le \delta$ метод (2) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}(Ax_{n,\delta} - y_\delta),\ x_{0,\delta} = 0,$$
$$\alpha_{2n+1} = \alpha,\ n = 0,1,2,...,\ \alpha_{2n+2} = \beta,\ n = 0,1,2,.... \tag{4}$$

Сходимость метода (3) при точном операторе A и приближенной правой части y_δ изучена в [12–13, 15]. Не нарушая общности, будем считать, что $\|A\| = 1$. В [12] требуется для сходимости метода итераций (4) выполнение двух условий: $|1 - \alpha\lambda| < 1$ и $|(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda)| < 1$, где $\beta > 0$ для $\lambda \in (0,1]$, что равносильно выполнению следующих условий:

$$0 < \alpha < 2, \tag{5}$$
$$\alpha\beta < \alpha + \beta, \tag{6}$$
$$(\alpha + \beta)^2 < 8\alpha\beta. \tag{7}$$

При условиях (5), (6), (7) метод (4) сходится, если число итераций n выбирать из условия $n\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0.$ В предположении, что точное решение x^* уравнения (2) истокопредставимо, т. е. $x^* = A^s z,\ \ s > 0,$ для метода (4) получена оценка погрешности (при дополнительном условии $\frac{1}{16} + \alpha\beta \le \alpha + \beta$): $\|x - x_{n,\delta}\| \le s^s[n(\alpha + \beta)]^{-s}\|z\| + \frac{n}{2}(\alpha + \beta)\delta.$

Ее оптимальная по n оценка погрешности имеет вид

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le (1 + s)2^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}} \tag{8}$$

и получается при

$$n_{\text{опт}} = s\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)2^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{-\frac{1}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}.$$

Оптимальная оценка погрешности (8) для метода (4) оказывается такой же, как и оптимальная оценка для метода Ландвебера (1). Как видно, метод (4) не дает преимущества в мажорантных оценках по сравнению с методом (1). Но он дает выигрыш в следующем: в методе простых итераций с постоянным шагом (1) требуется условие $0 < \alpha \le 1{,}25$; в методе итераций (4) $0 < \frac{\alpha + \beta}{2} < 4.$ Следовательно, выбирая α и β соответствующим образом, можно сделать $n_{\text{опт}}$ в методе (4) примерно втрое меньшим, чем для метода простой итерации с постоянным шагом. Таким образом, используя метод (4), для достижения оптимальной точности потребуется в три раза меньше итераций, чем по методу (1).

Приведем несколько подходящих значений α и β, удовлетворяющих требуемым условиям:

α	0,8	0,9	1,0	1,1	1,15	1,17
β	4,4	5,0	5,5	6,1	6,4	6,5

Здесь $x_n - x_{n,\delta} = \int_0^1 [1-(1-\alpha\lambda)^l (1-\beta\lambda)^m]\lambda^{-1} dE_\lambda (y - y_\delta)$, т. е. $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}[1-(1-\alpha\lambda)^l (1-\beta\lambda)^m]$.

Оценки сходимости были получены для случая, когда $l = m = \frac{n}{2}$. В случае, когда $l = m + 1$ во всех оценках $\frac{n(\alpha+\beta)}{2}$ следует заменить на $l\alpha + m\beta$. Мы считали, что $\|A\| = 1$. На самом деле все результаты легко переносятся на случай, когда $\|A\| < \infty$. При этом норму оператора не обязательно знать точно. Достаточно знать ее мажоранту.

В [12–13] исследована сходимость предложенного метода (3) в случае неединственного решения. Показано, что метод (3) сходится к решению с минимальной нормой. Также обоснована возможность применения к методу (4) правила останова по невязке, получена оценка для момента останова и оценка погрешности метода. При этом апостериорный выбор числа итераций не требует знания истокопредставимости точного решения. Методу простой итерации с попеременно чередующимся шагом посвящена работа [15]. В дальнейшем считаем, что оператор A и правая часть y уравнения (2) заданы приближенно, т. е. вместо y известно $y_\delta : \|y - y_\delta\| \le \delta$, а вместо оператора A известен оператор A_η, $\|A - A_\eta\| \le \eta$.

Предполагаем, что $0 \in Sp(A_\eta)$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $M = \|A\|$. Тогда метод (4) примет вид

$$x_{n+1(\delta,\eta)} = x_{n(\delta,\eta)} + \alpha_{n+1}(y_\delta - A_\eta x_{n(\delta,\eta)}),\ x_{0(\delta,\eta)} = 0,$$
$$\alpha_{2n+1} = \alpha,\ n = 0,1,2,...,\ \alpha_{2n+2} = \beta,\ n = 0,1,2,.... \tag{9}$$

Целью настоящей работы является доказательство сходимости метода (9) в случае априорного выбора параметра регуляризации при решении уравнения $A_\eta x = y_\delta$ и получение оценок погрешности.

2. Случай самосопряженных неотрицательных операторов. Пусть $H = F$, $A = A^* \ge 0$, $A_\eta = A_\eta^* \ge 0$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $0 < \eta \le \eta_0$. Итерационный метод (9) запишется в виде

$$x_{n(\delta,\eta)} = g_n(A_\eta) y_\delta, \tag{10}$$

где $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1-\alpha\lambda)^{n/2}(1-\beta\lambda)^{n/2}\right] \ge 0$. В [12–13] получены следующие условия для функции $g_n(\lambda)$:

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |g_n(\lambda)| \le \frac{n}{2}(\alpha+\beta) \le \gamma n,\ \left(\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}\right), \tag{11}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \lambda^s |1-\lambda g_n(\lambda)| \le s^s [n(\alpha+\beta)]^{-s} = \gamma_s n^{-s}\ (n > 0),\ \gamma_s = \left(\frac{s}{\alpha+\beta}\right)^s, 0 < s < \infty, \tag{12}$$

(здесь s – степень истокопредставимости точного решения $x^* = A^s z$ и $\frac{1}{16} + \alpha\beta \le \alpha + \beta$),

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |1-\lambda g_n(\lambda)| \le \gamma_0\ (n > 0),\ \gamma_0 = 1, \tag{13}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \lambda |1-\lambda g_n(\lambda)| \to 0,\ n \to \infty. \tag{14}$$

Справедлива

Л е м м а 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $A_\eta = A_\eta^* \ge 0$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$ $(0 < \eta \le \eta_0)$ *и выполнены условия* (13), (14). *Тогда* $\|G_{n\eta} v\| \to 0$ *при* $n \to \infty$, $\eta \to 0$ $\forall v \in N(A)^\perp = \overline{R(A)}$, *где* $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$ *и* $G_{n\eta} = E - A_\eta g_n(A_\eta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (13) $\|G_{n\eta}\| = \|E - A_\eta g_n(A_\eta)\| \le \gamma_0 \;\; (n > 0,\; 0 < \eta \le \eta_0)$. Для элементов вида $v = A\omega$, образующих в $\overline{R(A)}$ плотное подмножество, на основании (14) имеем

$$\|G_{n\eta}v\| = \|G_{n\eta}A\omega\| \le \|G_{n\eta}(A - A_\eta)\omega\| + \|G_{n\eta}A_\eta\omega\| \le \left(\gamma_0\eta + \sup_{0\le\lambda\le M} \lambda|1 - \lambda g_n(\lambda)|\right)\|\omega\| \to 0$$

при $n \to \infty, \eta \to 0$. Лемма 1 доказана.

Условие сходимости для метода (9) дает

Т е о р е м а 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0,\quad A_\eta = A_\eta^* \ge 0,\quad \|A_\eta - A\| \le \eta,\quad Sp(A_\eta) \subseteq [0, M] \quad (0 < \eta \le \eta_0)$, $y \in R(A),\; \|y - y_\delta\| \le \delta$ *и выполнены условия* (11), (13), (14). *Выберем параметр* $n = n(\delta,\eta)$ *в приближении* (9) *так, чтобы* $n(\delta,\eta)(\delta + \eta) \to 0$ *при* $n(\delta,\eta) \to \infty,\; \delta \to 0,\; \eta \to 0$. *Тогда* $x_{n(\delta,\eta)} \to x^*$ *при* $\delta \to 0,\; \eta \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства (10) имеем $x_{n(\delta,\eta)} = g_n(A_n) y_\delta$. Тогда получим

$$x_{n(\delta,\eta)} - x^* = g_n(A_\eta)y_\delta - x^* = -G_{n\eta}x^* + G_{n\eta}x^* + g_n(A_\eta)y_\delta - x^* =$$
$$= G_{n\eta}x^* + \left(E - A_\eta g_n(A_\eta)\right)x^* + g_n\left(A_\eta\right)y_\delta - x^* = -G_{n\eta}x^* + g_n(A_\eta)\left(y_\delta - A_\eta x^*\right).$$

Следовательно, $x_{n(\delta,\eta)} - x^* = -G_{n\eta}x^* + g_n(A_\eta)\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)$. Так как по условию имеем $\|g_n(A_\eta)\| \le \sup_{0\le\lambda\le M} |g_n(\lambda)| \le \gamma n,\; \gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, то

$$\left\|y_\delta - A_\eta x^*\right\| \le \|y_\delta - y\| + \left\|y - A_\eta x^*\right\| = \|y_\delta - y\| + \left\|Ax^* - A_\eta x^*\right\| \le \delta + \|A - A_\eta\|\left\|x^*\right\| \le \delta + \eta\left\|x^*\right\|.$$

Следовательно, $\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \left\|G_{n\eta}x^*\right\| + \left\|g_n(A_\eta)\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le \left\|G_{n\eta}x^*\right\| + \gamma n\left(\delta + \eta\left\|x^*\right\|\right)$.

Из леммы следует, что $\left\|G_{n\eta}x^*\right\| \to 0$ при $n \to \infty$ и по условию теоремы $n\left(\delta + \eta\left\|x^*\right\|\right) \to 0,\; \delta \to 0,\; \eta \to 0$. Таким образом, $\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \to 0,\; \delta \to 0,\; \eta \to 0$. Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $A = A^* \ge 0, A_\eta = A_\eta \ge 0, \|A - A_\eta\| \le \eta, Sp(A_\eta) \le [0, M] \;\; (0 < \eta < \eta_0)$, $y \in R(A), \|y - y_\delta\| \le \delta$ *и выполнены условия* (11), (12). *Если точное решение истокопредставимо, т. е.* $x^* = A^s z,\; s > 0,\; \|z\| \le \rho$, *то справедлива оценка погрешности*

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)}\rho + \gamma_s n^{-s}\rho + \gamma n\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right),\; 0 < s < \infty. \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем, используя истокопредставимость точного решения, $\left\|G_{n\eta}x^*\right\| = \left\|G_{n\eta}A^s z\right\| \le \left\|G_{n\eta}\left(A^s - A_\eta{}^s\right)z\right\| + \left\|G_{n\eta}A_\eta{}^s z\right\| \le \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)}\rho + \gamma_s n^{-s}\rho$, так как по лемме 1.1 [7, с. 91] $\left\|A^s - A_\eta{}^s\right\| \le c_s \eta^{\min(1,s)},\; c_s = \text{const} \;\left(c_s \le 2 \text{ для } 0 \le s \le 1\right)$. Тогда

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)}\rho + \gamma_s n^{-s}\rho + \gamma n\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right),\; 0 < s < \infty.$$

Теорема 2 доказана.

Если минимизировать правую часть оценки (15) по *n*, то получим значение априорного момента останова

$$n_{\text{опт}}=\left[\frac{\gamma_s\rho s}{\gamma\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)}\right]^{\frac{1}{s+1}}=s(\alpha+\beta)^{-1}2^{\frac{1}{s+1}}\rho^{\frac{1}{s+1}}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{-\frac{1}{s+1}}.$$

Подставим $n_{\text{опт}}$ в (15), получим

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\right\|_{\text{опт}}\le\gamma_0c_s\eta^{\min(1,s)}\rho+(1+s)2^{-\frac{s}{s+1}}\rho^{\frac{1}{s+1}}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{\frac{s}{s+1}}.$$

З а м е ч а н и е 1. Оптимальная оценка погрешности метода (9) имеет порядок

$$O\left(\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{\frac{s}{s+1}}\right).$$

З а м е ч а н и е 2. Оптимальная оценка погрешности не зависит от $\alpha+\beta$, но от $\alpha+\beta$ зависит $n_{\text{опт}}$ и, значит, объем вычислительной работы. Поэтому следует выбирать $\alpha+\beta$ возможно большим из условия $\alpha+\beta<8$ и так, чтобы $n_{\text{опт}}$ было целым.

3. Случай несамосопряженных операторов. В случае несамосопряженных операторов итерационный метод (9) примет вид

$$\begin{gathered}x_{n+1(\delta,\eta)}=x_{n(\delta,\eta)}+\alpha_{n+1}\left[A_\eta^*y_\delta-A_\eta^*A_\eta x_{n,(\delta,\eta)}\right],\ x_{0(\delta,\eta)}=0,\\ \alpha_{2n+1}=\alpha,\ n=0,1,2,...,\ \alpha_{2n+2}=\beta,\ n=0,1,2,... .\end{gathered}\qquad(16)$$

Его можно записать так:

$$x_{n(\delta,\eta)}=g_n\left(A_\eta^*A_\eta\right)A_\eta^*y_\delta.\qquad(17)$$

Из леммы 1 следует

Л е м м а 2. *Пусть* $A,A_\eta\in L(H,F),\left\|A_\eta\right\|^2\le M,\left\|A_\eta-A\right\|\le\eta$ *и выполнимы условия* (13), (14). *Тогда* $\left\|K_{n\eta}v\right\|\to0$ *при* $n\to\infty,\eta\to0\ \forall v\in N(A)^\perp=\overline{R(A^*)}$,

$$\left\|\widetilde{K}_{n\eta}z\right\|\to0,\ n\to\infty,\ \eta\to0\ \ \forall z\in N(A^*)^\perp=\overline{R(A)},\qquad(18)$$

где $K_{n\eta}=E-A_\eta^*A_\eta g_n\left(A_\eta^*A_\eta\right),\widetilde{K}_{n\eta}=E-A_\eta A_\eta^*g_n\left(A_\eta A_\eta^*\right)$.

Используем лемму 2 для доказательства следующей теоремы.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $A,A_\eta\in L(H,F),\ \left\|A-A_\eta\right\|\le\eta,\ \left\|A_\eta\right\|^2\le M\left(0<\eta<\eta_0\right),\ y\in R(A),\ \left\|y-y_\delta\right\|\le\delta$ *и выполнены условия* (11), (13), (14). *Выберем параметр* $n=n(\delta,\eta)$ *так, чтобы*

$$(\delta+\eta)n^{\frac{1}{2}}(\delta,\eta)\to0,\ \ n(\delta,\eta)\to\infty,\ \ \delta\to0,\ \ \eta\to0.\qquad(19)$$

Тогда $x_{n(\delta,\eta)}\to x^*$ *при* $\delta\to0,\ \eta\to0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для погрешности приближения $x_{n(\delta,\eta)}$ имеем

$$x_{n(\delta,\eta)}-x^*=-K_{n\eta}x^*+g_n\left(A_\eta^*A_\eta\right)A_\eta^*\left(y_\delta-A_\eta x^*\right).\qquad(20)$$

Здесь

$$\left\|g_n\left(A_\eta^*A_\eta\right)A_\eta^*\right\|=\left\|g_n\left(A_\eta^*A_\eta\right)\left(A_\eta^*A_\eta\right)^{\frac{1}{2}}\right\|\le\gamma^*n^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\gamma^* = \sup_{n>0}\left(n^{-\frac{1}{2}} \sup_{0\le\lambda\le M} \lambda^{\frac{1}{2}} |g_n(\lambda)| \right) \le \left[2(\alpha+\beta)\right]^{\frac{1}{2}}$$

[12–13]. Поскольку

$$\left\|y_\delta - A_\eta x^*\right\| \le \|y_\delta - y\| + \left\|y - A_\eta x^*\right\| = \|y_\delta - y\| + \left\|Ax^* - A_\eta x^*\right\| \le \delta + \|A - A_\eta\|\left\|x^*\right\| \le \delta + \eta\left\|x^*\right\|,$$

то

$$\left\|g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^*\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le \left[2(\alpha+\beta)\right]^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}\left(\delta + \eta\left\|x^*\right\|\right).$$

Поэтому

$$x_{n(\delta,\eta)} - x^* \le \left\|K_{n\eta}x^*\right\| + \left\|g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^*\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le \left\|K_{n\eta}x^*\right\| + \left[2(\alpha+\beta)\right]^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}\left(\delta + \eta\left\|x^*\right\|\right).$$

Из леммы 2 следует, что $\left\|K_{n\eta}x^*\right\| \to 0$ при $n\to\infty,\ \delta\to 0,\ \eta\to 0,$ а из условия (19) $n^{1/2}\left(\delta + \eta\left\|x^*\right\|\right) \to \infty,\ n\to\infty,\ \delta\to 0,\ \eta\to 0.$ Таким образом, $\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0,\ \eta\to 0.$ Теорема 3 доказана.

Справедлива

Т е о р е м а 4. *Пусть* $A, A_\eta \in L(H,F), \|A - A_\eta\| \le \eta,\ \|A_\eta\|^2 \le M\ \ (0 < \eta < \eta_0),\ y \in R(A), \|y - y_\delta\| \le \delta.$ *Если точное решение представимо в виде* $x^* = |A|^s z,\ s > 0, \|z\| \le \rho, |A| = \left(A^* A\right)^{\frac{1}{2}}$ *и выполнены условия* (11), (12), *то справедлива оценка погрешности*

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \gamma_0 c_s\left(1 + \ln|\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho + \gamma_{s/2} n^{-\frac{s}{2}}\rho + 2\left[(\alpha+\beta)\right]^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае истокообразно представимого решения $x^* = |A|^s z = (A^* A)^{\frac{s}{2}} z$ из (12) получим $\sup\limits_{0\le\lambda\le M} \lambda^s \left|1 - \lambda g_n(\lambda)\right| \le \gamma_s n^{-s}$, где $\gamma_s = \left(\dfrac{s}{\alpha+\beta}\right)^s$. Тогда

$$\left\|K_{n\eta}\left|A_\eta\right|^s z\right\| = \left\|\left|A_\eta\right|^s\left[E - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta)\right] z\right\| = \left\|(A_\eta^* A_\eta)^{\frac{s}{2}}\left[E - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta)\right] z\right\| \le \gamma_{\frac{s}{2}} n^{-\frac{s}{2}}\rho.$$

Отсюда

$$\left\|K_{n\eta}x^*\right\| = \left\|K_{n\eta}|A|^s z\right\| = \left\|K_{n\eta}(\left|A_\eta\right|^s - |A|^s)z\right\| + \left\|(A_\eta^* A_\eta)^{\frac{s}{2}}\left[E - A_\eta^* A_\eta g_n(AA_\eta^* A_\eta)\right] z\right\| \le$$

$$\le \gamma_0 c_s(1 + \ln|\eta|)\eta^{\min(1,s)}\rho + \gamma_{\frac{s}{2}} n^{-\frac{s}{2}}\rho,$$

так как из [7, с. 92] имеем $\left\|\left|A_\eta\right|^s - |A|^s\right\| \le c_s(1 + \ln|\eta|)\eta^{\min(n,s)},\ c_s = \mathrm{const}\ \left(c_s \le 2 \text{ для } 0 < s < 1\right)$. Из (20)

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \left\|K_{n,\eta}x^*\right\| + \gamma^* n^{\frac{1}{2}}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \le \left\|K_{n,\eta}x^*\right\| + \left[2(\alpha+\beta)\right]^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \le$$

$$\le \gamma_0 c_s(1 + \ln|\eta|)\eta^{\min(1,s)}\rho + \gamma_{\frac{s}{2}} n^{-\frac{s}{2}}\rho + [2(\alpha+\beta)]^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right),\ 0 < s < \infty. \qquad (21)$$

Из [7, с. 111] следует, что слагаемое $\gamma_0 c_s (1+\ln|\eta|)\eta^{\min(1,s)}\rho$ вносит в оценку погрешности вклад $O\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{\frac{s}{s+1}}$. Теорема 4 доказана.

Минимизируя правую часть (21) по n, получим значение априорного момента останова $n_{\text{опт}} = s^{\frac{s+2}{s+1}} 2^{-1}(\alpha+\beta)^{-1}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{-\frac{2}{s+1}}\rho^{\frac{2}{s+1}}$. Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку погрешности для метода простой итерации с попеременно чередующимся шагом (21), получим

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\|_{\text{опт}} \le \gamma_0 c_s (1+\ln|\eta|)\eta^{\min(1,s)}\rho + (1+s)s^{-\frac{s}{2(s+1)}}(\delta+\left\|x^*\right\|\eta)^{\frac{s}{s+1}}\rho^{\frac{1}{s+1}}, \quad 0 < s < \infty.$$

З а м е ч а н и е 3. Оптимальная оценка погрешности имеет порядок $O\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{\frac{s}{s+1}}$, и, как следует из [7], этот порядок оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.

З а м е ч а н и е 4. Оптимальная оценка погрешности не зависит от $\alpha+\beta$. Но от него зависит $n_{\text{опт}}$ и, значит, объем вычислительной работы. Поэтому следует выбирать $\alpha+\beta$ возможно большим из условия $0<\alpha+\beta<8$ и так, чтобы $n_{\text{опт}}$ было целым.

Заключение. В гильбертовом пространстве исследована сходимость предложенного явного метода итераций с попеременно чередующимся шагом решения некорректных уравнений первого рода в случае самосопряженного оператора. В предположении, что точное решение операторного уравнения (2) истокопредставимо, получена априорная оценка погрешности метода. Доказаны теоремы 1 и 2. Подобное исследование проведено и для случая несамосопряженной задачи. Доказана теорема 3 о сходимости метода и теорема 4, где получена априорная оценка погрешности метода (16). Полученные оценки погрешности оптимизированы и найдено значение априорного момента останова $n_{\text{опт}}$ (для случаев самосопряженного и несамосопряженного операторов).

Список использованных источников

1. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73, № 3. – P. 615–624. https://doi.org/10.2307/2372313

2. Константинова, Я. В. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I рода / Я. В. Константинова, О. А. Лисковец // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 1973. – № 1. – С. 9–15.

3. Bialy, H. Iterative Behandlung linearer funktions gleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Much. Anal. – 1959. – Vol. 4, № 1. – P. 166–176. https://doi.org/10.1007/bf00281385

4. Лисковец, О. А. Сходимость в энергетической норме итеративного метода для уравнений I рода / О. А. Лисковец, В. Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1976. – № 2. – С. 19–23.

5. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.

6. Емелин, И. В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.

7. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М.: Наука, 1986. – 181 с.

8. Бакушинский, А. Б. Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве / А. Б. Бакушинский // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1967. – Т. 7, № 3. – С. 672–677.

9. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск: СО АН СССР, 1962. – 92 с.

10. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М.: МГУ, 1994. – 207 с.

11. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.

12. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест: БрГУ им. А. С. Пушкина, 2008. – 196 с.

13. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест: БрГУ им. А. С. Пушкина, 2014. – 213 с.

14. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.

15.Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, M. M. Van Hulle // J. Comp. Appl. Math. – 2016. – Vol. 300. – P. 290–299. https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.12.037

References

1. Landweber L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind. *American Journal of Mathematics*, 1951, vol. 73, no. 3, pp. 615–624. https://doi.org/10.2307/2372313

2. Konstantinova Ya. V., Liskovets O. A. The error estimates in the iteration method for equations of the first kind. *Vestnik Belorusskogo universiteta. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika = Vestnik BSU. Series 1: Physics. Mathematics. Informatics*, 1973, no. 1, pp. 9–15 (in Russian).

3. Bialy H. Iterative behandlung linearer funktionalgleichungen, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1959, vol. 4, no. 1, pp. 166–176. https://doi.org/10.1007/bf00281385

4. Лисковец О. А., Савчук В. Ф. The convergence in the energy norm of the iterative method for equations of the first kind. *Izvestiya AN BSSR. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk = News of the Academy of Sciences of the BSSR. Series of Physical and Mathematical Sciences,* 1976, no. 2, pp. 19–23 (in Russian).

5. Emelin I. V., Krasnosel'skii M. A. To the theory of ill-posed problems. *Doklady Akademii nauk SSSR = Reports of the USSR Academy of Sciences*, 1979, vol. 244, no. 4, pp. 805–808 (in Russian).

6. Emelin I. V., Krasnosel'skii M. A. The stoppage rule in iterative procedures of solving ill-posed problems. *Avtomatika i Telemekhanika = Automatics and Telemechanics*, 1978, no. 12, pp. 59–63 (in Russian).

7. Vainikko G. M., Veretennikov A. Yu. *The Iterative Procedures in Ill-posed Problems.* Moscow, Nauka Publ., 1986. 181 p. (in Russian).

8. Bakushinskii A. B. A general method of constructing regularizing algorithms for a linear incorrect equation in Hilbert space. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1967, vol. 7, no. 3, pp. 279–287. https://doi.org/10.1016/0041-5553(67)90047-x

9. Lavrent'ev M. M. *On Some Ill-posed Problems of Mathematical Physics*. Novosibirsk, Siberian Branch of the Academy of Sciences of the USSR, 1962. 92 p. (in Russian).

10. Denisov A. M. *The Introduction to the Theory of Inverse Problems.* Moscow, Moscow State University, 1994. 207 p. (in Russian).

11. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2004. 480 p. (in Russian).

12. Savchuk V. F., Matysik O. V. *The Regularization of Operator Equations in Hilbert Space*. Brest, Brest State University named after A. S. Pushkin, 2008. 196 p. (in Russian).

13. Matysik O. V. *Explicit and Implicit Iterative Procedures for Solving Ill-posed Problems*. Brest, Brest State University named after A. S. Pushkin, 2014. 213 p. (in Russian).

14. Matysik O. V. *Iterative Regularization of Ill-posed Problems.* Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. 188 p. (in Russian).

15. Matysik, O. V., Van Hulle M. M. *Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space*. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2016, no. 300, pp. 290–299. https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.12.037

Информация об авторах

Матысик Олег Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики, Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина (бульвар Космонавтов, 21, 224016, г. Брест, Республика Беларусь). E-mail: matysikoleg@mail.ru.

Савчук Вячеслав Федорович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина (бульвар Космонавтов, 21, 224016, г. Брест, Республика Беларусь).

Information about the authors

Oleg V. Matysik – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Brest State University named after A. S. Pushkin (21, Kosmonavtov Blvd., 224016, Brest, Republic of Belarus). E-mail: matysikoleg@mail.ru

Vyacheslav F. Savchuk – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Brest State University named after A. S. Pushkin (21, Kosmonavtov Blvd., 224016, Brest, Republic of Belarus).

.