ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.2
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-427-433

Поступила в редакцию 29.06.2018
Received 29.06.2018

Е. Е. Жук

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕНДА БЛИЖАЙШЕГО ТИПА ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Аннотация. Исследуется проблема выбора трендовой модели, ближайшей к реализации $X = \{x_t\}_{t=1}^{T}$ длительности T нестационарного временного ряда: $x_t = f(t) + u_t$, где $f(\cdot)$ – неизвестный (реальный) тренд, а случайные величины $\{u_t\}_{t=1}^{T}$ являются ошибками наблюдений с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковой ограниченной дисперсией. Причем здесь трендовые модели $\{\Omega_l\}_{l \in S}$ задаются своими типовыми (базовыми) трендами $\{f_l(\cdot)\}_{l \in S}$ ($S = \{1, \ldots, L\}$ – множество номеров этих моделей, $L \geq 2$): $\sum_{t=1}^{T} f_l(t) = 0$, $l \in S$, образуя семейства сдвига: $f_l^a(t) = f_l(t) + a$, $t = \overline{1, T}$, где $a \in R$ – параметр сдвига $l \in S$. Для принятия решений предлагается использовать решающее правило по методу наименьших квадратов. В качестве меры эффективности принимаемых решений аналитически вычислен риск (вероятность ошибочно определить ближайшую к реализации трендовую модель). Как пример рассмотрен случай двух альтернативных трендовых моделей.

Ключевые слова: нестационарный временной ряд, трендовая модель, реализация, решающее правило, риск

Для цитирования. Жук, Е. Е. Статистическое определение тренда ближайшего типа для реализаций нестационарных временных рядов / Е. Е. Жук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 427–433. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-427-433

E. E. Zhuk

Belarusian State University, Minsk, Belarus

STATISTICAL DETERMINATION OF THE NEAREST TYPE TREND FOR REALIZATIONS OF NON-STATIONARY TIME SERIES

Abstract. The problem of statistical assignment of realizations $X = \{x_t\}_{t=1}^{T}$ of non-stationary time series to the nearest trend model is studied. Here, these trend models $\{\Omega_l\}_{l \in S}$ ($S = \{1, \ldots, L\}$, $L \geq 2$) are determined by their basic trends $\{f_l(\cdot)\}_{l \in S}$: $\sum_{t=1}^{T} f_l(t) = 0$, $l \in S$, and constitute shift families: $f_l^a(t) = f_l(t) + a$, $t = \overline{1, T}$, where $a \in R$ is the shift parameter ($l \in S$). For the decision making, the decision rule by the least-squares method is proposed and its efficiency is analytically investigated (as an efficiency measure its risk is evaluated). For illustration of the obtained results, the case of two alternative trend models is given.

Keywords: non-stationary time series, trend model, realization, decision rule, risk

For citation. Zhuk E. E. Statistical determination of the nearest type trend for realizations of non-stationary time series. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 427–433 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-427-433

1. Математическая модель и постановка задачи. Данная статья по тематике продолжает исследования, начатые в [1], и посвящена проблеме выбора ближайшей к реализации нестационарного временного ряда трендовой модели. Причем здесь трендовые модели задаются каждая своим типовым (базовым) трендом, образуя семейства сдвига. Сформулируем математическую модель.

Пусть имеется реализация $X = \{x_t\}_{t=1}^{T}$ длительности T нестационарного временного ряда (ВР). Согласно общепринятой трендовой модели [2, 3], отсчеты $x_t \in R$, $t = \overline{1, T}$, этого ВР расположены возле своего тренда:

$$x_t = f(t) + u_t, \tag{1}$$

где $f(t)$, $t = \overline{1,T}$, и есть тренд (детерминированная функция), а ее аргумент t интерпретируется как время. Величины $\{u_t\}_{t=1}^{T}$ в (1) случайны, обычно считаются некоррелированными с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковой ограниченной дисперсией:

$$\mathrm{E}\{u_t\} = 0,\ \mathrm{D}\{u_t\} = \mathrm{E}\{u_t^2\} = \sigma^2 < +\infty; \tag{2}$$
$$\mathrm{E}\{u_t u_l\} = 0 \ \ \forall t, l = \overline{1,T},\ l \neq t,$$

и имеют смысл ошибок наблюдений.

Заданы $L \geq 2$ различных трендовых моделей. Каждая такая трендовая модель Ω_l определяется своим трендом $f_l(t)$, $t = \overline{1,T}$, $l \in S$, где $S = \{1, \ldots, L\}$ – множество номеров этих моделей. Причем все тренды $\{f_l(\cdot)\}_{l \in S}$ отцентрированы относительного нулевого уровня в том смысле, что

$$\sum_{t=1}^{T} f_l(t) = 0,\ l \in S. \tag{3}$$

Сама модель Ω_l ($l \in S$) содержит всевозможные тренды вида

$$f_l^a(t) = f_l(t) + a,\ t = \overline{1,T}, \tag{4}$$

где $a \in R$ – параметр (константа) сдвига [2, 3]. Таким образом, тренд $f_l(\cdot)$ из (3) является типовым (базовым) и задает так называемую «тенденцию» [4], определяющую модель Ω_l и не зависящую от абсолютных значений текущего (реального) тренда (4), принадлежащего этой модели.

Во многих приложениях, в том числе предсказание (прогнозирование) поведения цены на бирже [4], важно спрогнозировать не само значение цены, а ее поведение (тенденцию), которая и определяется базовыми (отцентрированными) трендами (3).

Таким образом, по реализации $X = \{x_t\}_{t=1}^{T}$, которой соответствует ненаблюдаемый (неизвестный) реальный тренд $f(\cdot)$ из (1), необходимо решить, к какой трендовой модели из $\{\Omega_l\}_{l \in S}$ она «ближе». Разумеется, предварительно необходимо определить это понятие, а также предложить критерий эффективности принимаемых решений [1].

2. Решающее правило и определение его риска. Воспользуемся методом наименьших квадратов (МНК) [3] и построим по реализации $X = \{x_t\}_{t=1}^{T}$ решающее правило (РП) [1, 3] $d = d(X) \in S$, относящее реализацию X к той модели из $\{\Omega_l\}_{l \in S}$, к базовому тренду (3) которой она ближе (с учетом оценивания неизвестного параметра сдвига в (4)). Само РП будет иметь следующий вид:

$$d = d(X) = \arg\min_{l \in S} \min_{a \in R} \sum_{t=1}^{T} \left(x_t - f_l^a(t)\right)^2 = \arg\min_{l \in S} \min_{a \in R} \sum_{t=1}^{T} \left(x_t - (f_l(t) + a)\right)^2 =$$
$$= \arg\min_{l \in S} \sum_{t=1}^{T} \left(x_t - \overline{x}_T - f_l(t)\right)^2, \tag{5}$$

где

$$\overline{x}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_t \tag{6}$$

– арифметическое (выборочное [3]) среднее значений отсчетов из реализации $X = \{x_t\}_{t=1}^{T}$, являющееся, с учетом (3), очевидным решением экстремальной задачи ($l \in S$)

$$\sum_{t=1}^{T} \left(x_t - (f_l(t) + a)\right)^2 \to \min_{a \in R}.$$

С другой стороны, по аналогии с [1], определим множество $D^o \subseteq S$ номеров тех моделей из $\{\Omega_l\}_{l\in S}$, к которым реальный тренд $f(\cdot)$ ближе (в смысле (5)):

$$D^o = \left\{k : \rho_*(f, f_k) = \min_{l\in S} \rho_*(f, f_l)\right\}, \tag{7}$$

где

$$\rho_*^2(f, f_l) = \min_{a\in R} \sum_{t=1}^{T} \left(f(t) - f_l^a(t)\right)^2 = \min_{a\in R} \sum_{t=1}^{T} \left(f(t) - (f_l(t) + a)\right)^2 = \sum_{t=1}^{T} \left(f(t) - \overline{f}_T - f_l(t)\right)^2, \tag{8}$$

$$\overline{f}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} f(t), \; l \in S.$$

В (7), (8) $\overline{f}_T$ имеет смысл значения параметра сдвига, «приводящего» реальный тренд $f(\cdot)$ из (1) к нулевому уровню в смысле (3):

$$\sum_{t=1}^{T} \left(f(t) - \overline{f}_T\right) = 0,$$

а $\rho_*(f, f_l)$ – евклидова расстояния между трендом $f(\cdot)$ реализации X (с учетом сдвига на нулевой уровень) и базовым трендом $f_l(\cdot)$, определяющим модель Ω_l ($l \in S$).

В качестве меры эффективности принимаемых решений будем использовать риск [1]

$$r_T = \mathrm{P}\{d(X) \notin D^o\}, \tag{9}$$

имеющий смысл вероятности не отнести при помощи РП $d = d(X) \in S$ из (5), (6) реализацию X к той трендовой модели, к которой она ближе в смысле «тенденции» [4] (в смысле базовых трендов $\{f_l(\cdot)\}_{l\in S}$ из (3)).

Если $D^o = \{d^o\}$ – есть только одна ближайшая к тренду $f(\cdot)$ реализации X модель из $\{\Omega_l\}_{l\in S}$, то

$$r_T = \mathrm{P}\{d(X) \neq d^o\}. \tag{10}$$

Чем меньше (ближе к 0) значения риска r_T $(0 \le r_T \le 1)$ из (9), (10), тем эффективнее принимаемые при помощи РП $d = d(X)$ решения.

Отметим также, что РП (5), (6), благодаря сдвигу реализации $X = \{x_t\}_{t=1}^{T}$, по которой выносится решение, на нулевой уровень

$$\sum_{t=1}^{T} (x_t - \overline{x}_T) = 0,$$

позволяет из нескольких ($m \ge 2$) реализаций $X^{(j)} = \{x_t^{(j)}\}_{t=1}^{T_j}$, $j = \overline{1, m}$, отнесенных РП (5), (6) к одной и той же трендовой модели: $d = d(X^{(1)}) = \ldots = d(X^{(m)}) \in S$, выбрать наиболее близкую к ней. Ее номер

$$j^* = \arg\min_{1\le j\le m} \sum_{t=1}^{T_j} \left(x_t^{(j)} - \overline{x}_{T_j}^{(j)} - f_d(t)\right)^2, \;\; \overline{x}_{T_j}^{(j)} = \frac{1}{T_j} \sum_{t=1}^{T_j} x_t^{(j)}.$$

3. Вычисление риска в случае нескольких трендовых моделей. Как и в [1], вычислим риск РП $d = d(X)$ в ситуации, когда к тренду $f(\cdot)$ наблюдаемой реализации X наиболее близок лишь один из $L \ge 2$ базовых трендов $\{f_l(\cdot)\}_{l\in S}$, и

$$d^o = \arg\min_{l \in S} \rho_*(f, f_l) \tag{11}$$

– истинный номер ближайшего базового тренда через расстояния (8).

Введем обозначения:

$$\rho(f, f_l) = \sqrt{\sum_{t=1}^{T} \left(f(t) - f_l(t) \right)^2}, \quad l \in S; \tag{12}$$

$$\rho(f_l, f_k) = \sqrt{\sum_{t=1}^{T} \left(f_l(t) - f_k(t) \right)^2}, \quad l, k \in S,$$

– обычные евклидовы расстояния между соответствующими трендами (без учета сдвига тренда $f(\cdot)$ на нулевой уровень).

Т е о р е м а. *Пусть реализация* $X = \{x_t\}_{t=1}^{T}$ *и трендовые модели* $\{\Omega_l\}_{l \in S}$ *определяются соотношениями* (1)–(4)*, а случайные величины* $\{u_t\}_{t=1}^{T}$ *в* (2) *вдобавок независимы в совокупности и одинаково распределены по нормальному закону* $N_1(0, \sigma^2)$ $(0 < \sigma^2 < +\infty)$. *Если* $D^o = \{d^o\}$, *где* $d^o \in S$ *– единственный истинный номер* (11) *ближайшей к X трендовой модели, то риск* r_T *из* (10) *РП* (5), (6)

$$r_T = 1 - \mathrm{E}\left\{ \prod_{\substack{l \in S \\ l \neq d^o}} U\left(z_l + \frac{\rho^2(f, f_l) - \rho^2(f, f_{d^o})}{2\sigma\rho(f_l, f_{d^o})} \right) \right\}, \tag{13}$$

где $U(y) = \{1,\ \text{если}\ y \geq 0;\ 0,\ \text{если}\ y < 0\}$ *– единичная функция Хэвисайда,* $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ *– среднеквадратическое отклонение, случайные величины* z_l, $l \in S$, $l \neq d^o$, *имеют стандартное нормальное распределение:* $\mathrm{L}\{z_l\} = N_1(0,1)$, *а их совместное распределение является многомерным нормальным* [3, 5] *со следующими ковариациями* $(l, k \in S,\ l \neq d^o,\ k \neq d^o)$:

$$\mathrm{Cov}\{z_l, z_k\} = \mathrm{E}\{z_l z_k\} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \left(f_l(t) - f_{d^o}(t) \right) \left(f_k(t) - f_{d^o}(t) \right)}{\rho(f_l, f_{d^o}) \rho(f_k, f_{d^o})}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в рассмотрение случайные величины ($l \in S$, $l \neq d^o$):

$$\xi_l = \sum_{t=1}^{T} \left(\left(x_t - \bar{x}_T - f_l(t) \right)^2 - \left(x_t - \bar{x}_T - f_{d^o}(t) \right)^2 \right) =$$

$$= 2\sum_{t=1}^{T} \left(x_t - \bar{x}_T - \frac{f_l(t) + f_{d^o}(t)}{2} \right) \left(f_{d^o}(t) - f_l(t) \right) = 2\sum_{t=1}^{T} \left(x_t - \frac{f_l(t) + f_{d^o}(t)}{2} \right) \left(f_{d^o}(t) - f_l(t) \right), \tag{14}$$

где учтены условия (3) на базовые тренды и тот факт, что $\bar{x}_T$ не зависит от t. Тогда риск (10) РП (5), (6) через случайные величины (14) можно представить в виде

$$r_T = \mathrm{P}\{d(X) \neq d^o\} = 1 - \mathrm{P}\{d(X) = d^o\} = 1 - \mathrm{P}\left\{ \bigcap_{\substack{l \in S \\ l \neq d^o}} \{\xi_l \geq 0\} \right\}. \tag{15}$$

Найдем математические ожидания, ковариации и дисперсии случайных величин (14), а также установим их распределения вероятностей. Из (14) видно, что они линейны по отсчетам реализации $X = \{x_t\}_{t=1}^{T}$, которые в условиях теоремы, исходя из (1), независимы в совокупности и нормально распределены: $\mathrm{L}\{x_t\} = N_1(f(t),\sigma^2)$, $t=\overline{1,T}$. Поэтому сами случайные величины (14) нормально распределены и имеют совместное многомерное нормальное распределение [3, 5]. Осталось только найти их характеристики $(l,k \in S,\ l \neq d^o,\ k \neq d^o)$:

$$\mathrm{E}\{\xi_l\} = 2\sum_{t=1}^{T}\left(f(t) - \frac{f_l(t)+f_{d^o}(t)}{2}\right)\left(f_{d^o}(t) - f_l(t)\right) = \rho^2(f,f_l) - \rho^2(f,f_{d^o}); \tag{16}$$

$$\mathrm{Cov}\{\xi_l,\xi_k\} = \mathrm{E}\left\{\left(\xi_l - \mathrm{E}\{\xi_l\}\right)\left(\xi_k - \mathrm{E}\{\xi_k\}\right)\right\} = 4\mathrm{E}\left\{\sum_{t_1=1}^{T} u_{t_1}\left(f_l(t_1) - f_{d^o}(t_1)\right)\sum_{t_2=1}^{T} u_{t_2}\left(f_k(t_2) - f_{d^o}(t_2)\right)\right\} =$$

$$= 4\sigma^2\sum_{t=1}^{T}\left(f_l(t) - f_{d^o}(t)\right)\left(f_k(t) - f_{d^o}(t)\right);$$

$$\mathrm{D}\{\xi_l\} = \mathrm{Cov}\{\xi_l,\xi_l\} = 4\sigma^2\sum_{t=1}^{T}\left(f_l(t) - f_{d^o}(t)\right)^2 = 4\sigma^2\rho^2(f_l,f_{d^o}),$$

где использованы обозначения (12) и учтена некоррелированность случайных величин $\{u_t\}_{t=1}^{T}$ из (2).

Доказательство завершается нормировкой [5] в приведенной выше записи для риска (15) случайных величин (14) до стандартного нормального закона $N_1(0,1)$ с учетом найденных значений их характеристик (16).

Полученное соотношение (13) позволяет вычислить риск r_T РП $d = d(X)$ и оценить теоретически его эффективность. Однако, как и в [1], простой вид риск имеет лишь при $L = 2$.

Отметим, что в силу центральной предельной теоремы [5], примененной к случайным величинам (14), можно установить их асимптотическую нормальность (при $T \to +\infty$), ослабив условие теоремы и требуя лишь независимости в совокупности случайных величин из (2) и не требуя их нормальности. Однако использовать результат теоремы (соотношение (13) для вычисления риска) при этом можно лишь для достаточно больших значений длительности реализаций ($T \to +\infty$), по которым принимается решение.

3. Случай двух альтернативных трендовых моделей. Пусть необходимо отнести реализацию $X = \{x_t\}_{t=1}^{T}$ к одной из двух трендовых моделей ($L = 2$, $S = \{1,2\}$), заданных своими базовыми трендами $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$, удовлетворяющими (3). Воспользуемся результатом (13) доказанной выше теоремы при $L = 2$, где величина d^o из (11) в обозначениях (12) примет вид

$$d^o = \begin{cases} 1, \text{ если } \sum_{t=1}^{T}\left(\left(f(t) - \bar{f}_T - f_2(t)\right)^2 - \left(f(t) - \bar{f}_T - f_1(t)\right)^2\right) > 0; \\ 2, \text{ иначе}; \end{cases} = \begin{cases} 1, \text{ если } \rho^2(f,f_2) > \rho^2(f,f_1); \\ 2, \text{ иначе}, \end{cases} \tag{17}$$

где учтено соотношение

$$\sum_{t=1}^{T}\left(\left(f(t) - \bar{f}_T - f_2(t)\right)^2 - \left(f(t) - \bar{f}_T - f_1(t)\right)^2\right) = 2\sum_{t=1}^{T}\left(f(t) - \bar{f}_T - \frac{f_1(t)+f_2(t)}{2}\right)\left(f_1(t) - f_2(t)\right) =$$

$$= \rho^2(f,f_2) - \rho^2(f,f_1),$$

полученное с использованием условия (3) аналогично (14), (16).

С л е д с т в и е. *Пусть в условиях теоремы $L = 2$, тогда риск r_T решающего правила* (5), (6)

$$r_T = \Phi\left(-\frac{\left|\rho^2(f,f_1) - \rho^2(f,f_2)\right|}{2\sigma\rho(f_1,f_2)}\right), \tag{18}$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}\exp\left(-\frac{w^2}{2}\right)dw,\ z \in R,$ *– функция распределения стандартного нормального закона.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $L = 2$ для риска r_T из соотношения (13) с учетом нормальности встречающихся в нем случайных величин будем иметь

$$r_T = \begin{cases} \Phi\left(-\dfrac{\rho^2(f, f_2) - \rho^2(f, f_1)}{2\sigma\rho(f_2, f_1)}\right), \text{ если } d^o = 1; \\ \Phi\left(-\dfrac{\rho^2(f, f_1) - \rho^2(f, f_2)}{2\sigma\rho(f_1, f_2)}\right), \text{ если } d^o = 2, \end{cases}$$

откуда, воспользовавшись представлением (17) для величины d^o, и имеем (18) (очевидно, что $\rho(f_2, f_1) = \rho(f_1, f_2)$).

Проанализируем полученное аналитическое выражение для риска (18). Величины $\rho(f, f_1)$ и $\rho(f, f_2)$ в (18) – евклидовы расстояния (12) между трендом $f(\cdot)$ реализации $X = \{x_t\}_{t=1}^T$ и базовыми трендами $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$. Чем больше различие между $\rho(f, f_1)$ и $\rho(f, f_2)$, тем меньше значение риска r_T и эффективнее принимаемые при помощи РП $d = d(X)$ из (5), (6) решения.

Если $\rho(f, f_1) = \rho(f, f_2)$ (тренд $f(\cdot)$ равноудален от трендов $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$), то $D^o = S$ (при $L = 2$), а риск РП $d = d(X) \in S$ не может быть вычислен по формуле (18), поскольку она получена для $\rho(f, f_1) \neq \rho(f, f_2)$. Исходя из (9): $r_T = \mathrm{P}\{d(X) \notin D^o\} = \mathrm{P}\{d(X) \notin S\} = 0$, и выносимое РП $d = d(X)$ решение не существенно.

Отметим, что в ситуации, когда тренд $f(\cdot)$, соответствующий реализации $X = \{x_t\}_{t=1}^T$, принадлежит к одной из данных двух трендовых моделей, т. е. в (4) существует такое значение параметра сдвига $a \in R$, что $f(t) = f_1(t) + a$, $t = \overline{1, T}$, или $f(t) = f_2(t) + a$, $t = \overline{1, T}$, то аналогично рассуждениям в (17) получаем

$$\left|\rho^2(f, f_1) - \rho^2(f, f_2)\right| = \rho^2(f_1, f_2).$$

Риск r_T из (18) при этом упрощается:

$$r_T = \Phi\left(-\frac{\rho(f_1, f_2)}{2\sigma}\right), \tag{19}$$

где $\rho(f_1, f_2)$ – евклидово расстояние из (12) между базовыми трендами $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$ этих двух моделей. Чем больше $\rho(f_1, f_2)$ (больше различие между трендовыми моделями), тем меньше риск (19) и эффективнее принимаемые решения.

В завершение исследуем асимптотическое поведение риска r_T с ростом длительности T реализации $X = \{x_t\}_{t=1}^T : T \to +\infty$. Очевидно, что евклидовы расстояния (12), встречающиеся в (18), (19) – чаще всего величины порядка $O\left(\sqrt{T}\right)$, а сам риск $r_T = \Phi(-C)$, где $C = O\left(\sqrt{T}\right) > 0$, и $r_T \to 0$, $T \to +\infty$. Таким образом, с ростом длительности реализации эффективность принимаемых решений повышается (значение риска уменьшается и стремится к 0). Поэтому, увеличивая длительность реализации, при помощи (18), (19) можно добиться любой, наперед заданной, точности принимаемых решений.

Список использованных источников

1. Жук, Е. Е. Статистическое отнесение реализаций нестационарных временных рядов к заданным трендовым моделям / Е. Е. Жук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 52–59.
2. Андерсон, Т. Статистический анализ временных рядов: пер с англ. / Т. Андерсон. – М.: Мир, 1976. – 759 с.
3. Харин, Ю. С. Математическая и прикладная статистика / Ю. С. Харин, Е. Е. Жук. – Минск: БГУ, 2005. – 276 с.
4. Элдер, А. Как играть и выигрывать на бирже / А. Элдер. – М.: Альпина Паблишер, 2017. – 472 с.
5. Боровков, А. А. Теория вероятностей / А. А. Боровков. – М.: URSS: Либроком, 2016. – 652 с.

References

1. Zhuk E. E. Statistical assignment of realizations of non-stationary time series to the fixed trend models. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Science of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2017, no. 2, pp. 52–59 (in Russian).

2. Anderson T. *Statistical Analysis of Time Series.* John Wileys & Sons, Inc., 1971. 704 p. https://doi.org 10.1002/9781118186428.

3. Kharin Yu. S., Zhuk E. E. *Mathematical and Applied Statistics.* Minsk, Belarusian State University, 2005. 276 p. (in Russian).

4. Elder A. *Trading for a Living. Psychology. Trading Tactics. Money Management.* Wiley, 1993. 289 p.

5. Borovkov A. A. *Probability Theory.* Moscow, URSS: Librokom Publ., 2016. 652 p. (in Russian).

Информация об авторе

Жук Евгений Евгеньевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: zhukee@mail.ru

Information about the author

Eugene E. Zhuk – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Mathematical Modeling and Data Analysis, Faculty of Applied Mathematics and Computer Science, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: zhukee@mail.ru