

УДК 519.1

О. И. ДУГИНОВ

ПОКРЫТИЕ РАСЩЕПЛЯЕМОГО ГРАФА НАИМЕНЬШИМ ЧИСЛОМ ПОЛНЫХ ДВУДОЛЬНЫХ ПОДГРАФОВ

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 06.12.2013)

Введение. В данной работе исследуется вычислительная сложность задач покрытия графа наименьшим числом биклик (полных двудольных подграфов) в классе расщепляемых графов.

Рассматриваются только конечные неориентированные графы $G = (V, E)$ без кратных ребер и петель с множеством вершин $V = V(G)$ и множеством ребер $E = E(G)$. Используется стандартная теоретико-графовая терминология [1, 2]. Пусть $S \subseteq V$ – подмножество вершин графа G . Подграф графа G , порожденный множеством S , обозначается как $G[S]$ и $G - S = G[V \setminus S]$. Граф $G = (V, E)$ называется *двудольным*, если существует разбиение его множества вершин $V = U_1 \cup U_2$ такое, что U_1, U_2 – независимые множества в G , и обозначается как $G = ((U_1, U_2), E)$. Здесь одно из множеств U_1, U_2 может быть пустым. Если при этом $E = \{u_1 u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$, то G называется *полным двудольным*. Полный двудольный граф $G = ((U_1, U_2), E)$ является *связным*, если выполняется одно из условий: $|U_1| + |U_2| = 1$ или $E \neq \emptyset$.

Бикликой графа G называется *связный* полный двудольный (не обязательно вершинно-порожденный) подграф $B = ((U_1, U_2), \Sigma)$ графа G . При этом биклика B называется *звездой* с центром в вершине v , если $U_1 = \{v\}$ или $U_2 = \{v\}$. Биклика, которая содержит только одну вершину, называется *тривиальной*. Стоит отметить важное обстоятельство. Если граф G содержит изолированную вершину v , то существует ровно одна биклика графа G , которая включает вершину v – тривиальная биклика, состоящая из вершины v . Будем говорить, что биклика B графа G покрывает ребро $e \in E(G)$, если e содержится в B , т. е. $e \in \Sigma$. Пусть S – некоторое множество (не обязательно всех) биклик графа G . В случае, когда хотя бы одна биклика из S покрывает $e \in E(G)$, будем говорить, что S покрывает e . Биклики графа имеют широкое практическое применение. Они используются для моделирования прикладных задач, которые возникают в области биоинформатики, анализа данных, искусственного интеллекта и др. [3, 4].

Множество S биклик графа G называется *бикликовым покрытием мощности $|S|$* графа G , если каждое ребро G содержится хотя бы в одной биклике из S . Другими словами, бикликовое покрытие графа G – множество биклик G , которое покрывает каждое ребро G . Наименьшее число биклик в бикликовом покрытии графа G обозначается как $bc(G)$.

Множество S биклик графа G называется *бикликовым покрытием вершин мощности $|S|$* графа G , если каждая вершина графа G содержится хотя бы в одной биклике из S . Обозначим через $b(G)$ наименьшее число биклик в бикликовом покрытии вершин G .

В данной работе рассматриваются следующие две задачи распознавания, которые связаны с параметрами $bc(G)$ и $b(G)$ графа G .

Бикликовое покрытие

Условие: задан граф G и натуральное число k .

Вопрос: существует ли бикликовое покрытие графа G мощности не более k ?

Отметим, что этот вопрос эквивалентен следующему вопросу: верно ли, что $bc(G) \leq k$? В оптимизационной версии задачи *Бикликовое покрытие* требуется найти наименьшее (по мощности) бикликовое покрытие заданного графа.

Бикликовое покрытие вершин

Условие: задан граф G и натуральное число k .

Вопрос: существует ли бикликовое покрытие вершин графа G мощности не более k ?

Вопрос, сформулированный выше, эквивалентен следующему: верно ли, что $b(G) \leq k$? В оптимизационной версии задачи *Бикликовое покрытие вершин* требуется найти наименьшее (по мощности) бикликовое покрытие вершин заданного графа.

Задача *Бикликовое покрытие* имеет широкое применение в области искусственного интеллекта, биологии и теории потоков [4, 5]. Задача *Бикликовое покрытие вершин* применяется в области анализа данных и безопасности сетей, в сфере электронной торговли и поиска информации [3, 6, 7].

Обе рассматриваемые задачи являются **NP**-полными и остаются **NP**-полными в классе двудольных графов [3]. Цель данной работы состоит в том, чтобы установить вычислительную сложность этих задач в классе расщепляемых графов. Мы покажем, что в этом классе графов обе задачи остаются **NP**-полными.

Впервые понятие расщепляемого графа было введено С. Фолдесом и П. Хаммером в [8] и независимо Р. И. Тышкевич и А. А. Черняк в [9]. *Расщепляемым графом* называется граф, который допускает разбиение его множества вершин на клику и независимое множество. Класс расщепляемых графов содержится в хорошо известном классе хордальных графов. Более того, граф G расщепляемый тогда и только тогда, когда оба графа G и \bar{G} являются хордальными [8]. В терминах запрещенных порожденных подграфов, расщепляемый граф характеризуется как граф, который не содержит графы C_4 , \bar{C}_4 , C_5 в качестве порожденных подграфов [8]. Многие, в общем случае **NP**-трудные задачи становятся полиномиально разрешимыми в классе расщепляемых графов.

Вычислительная сложность задачи *Бикликовое покрытие* для расщепляемых графов устанавливается в п. 1, задачи *Бикликовое покрытие вершин* – в п. 2.

1. Бикликовое покрытие расщепляемого графа. Известно, что задача *Бикликовое покрытие* является **NP**-полной в следующих классах графов: двудольные графы [10], хордальные двудольные графы [11]. В то же время эта задача становится полиномиально разрешимой в таких классах графов, как домино-свободные двудольные графы [4], C_4 -свободные двудольные графы [11], выпуклые двудольные графы [12], интервальные двудольные графы [13], последовательно-параллельные графы [14], графы с ограниченной путевой шириной [15].

Т е о р е м а 1. *Задача Бикликовое покрытие является NP-полной в классе расщепляемых графов.*

Для того чтобы доказать эту теорему, нам потребуется два утверждения. Следующая очевидная лемма дает структурное свойство биклик графа.

Л е м м а 1. *Пусть G – граф и $B = ((U_1, U_2), \Sigma)$ – любая его биклика, X – собственное подмножество множества $U_1 \cup U_2$. При удалении из B множества вершин X образуется биклика или пустой граф (т. е. граф, не содержащий ребер).*

Л е м м а 2. *Пусть $G_1 = (V, E)$ – граф, $X \subseteq V$ – любое независимое множество G_1 . Для двудольного графа $G_2 = ((X, V \setminus X), E')$, где $E' = \{uv \in E : u \in X, v \in V \setminus X\}$ верно $bc(G_2) \leq bc(G_1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G_1 = (V, E)$ – граф и X – произвольное независимое множество в G_1 . Если $X = \emptyset$, то $bc(G_2) = 0$ и неравенство $bc(G_2) \leq bc(G_1)$ очевидно выполняется. Пусть $X \neq \emptyset$. Обозначим $\bar{X} = V \setminus X$. Рассмотрим двудольный граф $G_2 = ((X, \bar{X}), E')$, где $E' = \{uv \in E : u \in X, v \in \bar{X}\}$. Граф G_2 является подграфом G_1 и получается из G_1 путем удаления всех ребер G_1 , оба конца которых принадлежат \bar{X} . Требуется доказать, что $bc(G_2) \leq bc(G_1)$.

Пусть S – наименьшее бикликовое покрытие графа G_1 , которое состоит из биклик $((A_i, B_i), \Sigma_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, bc(G_1)\}$. Построим бикликовое покрытие S' графа G_2 такое, что $|S'| \leq |S|$. Для этого разобьем множество S на три непересекающихся подмножества $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, где

$$S_1 := \{((A_i, B_i), \Sigma_i) \in S : \Sigma_i \subseteq E'\},$$

$$S_2 := \{((A_i, B_i), \Sigma_i) \in S : \Sigma_i \cap E' \neq \emptyset, \Sigma_i \setminus E' \neq \emptyset\},$$

$$S_3 := \{((A_i, B_i), \Sigma_i) \in S : \Sigma_i \cap E' = \emptyset\}.$$

Заметим, что каждое ребро графа G_1 , принадлежащее E' , покрывается множеством биклик $S_1 \cup S_2$, и каждая биклика из S_1 является бикликой графа G_2 . Каждую биклику $((A_i, B_i), \Sigma_i)$ из S_2 преобразуем в биклику графа G_2 , которую обозначим как $((A_i^*, B_i^*), \Sigma_i^*)$ таким образом, что все ребра из E' , покрытые бикликой $((A_i, B_i), \Sigma_i)$, будут покрыты и $((A_i^*, B_i^*), \Sigma_i^*)$.

Рассмотрим произвольную биклику $((A_i, B_i), \Sigma_i)$ из S_2 . Так как $\Sigma_i \cap E' \neq \emptyset$ и $\Sigma_i \setminus E' \neq \emptyset$, то имеет место хотя бы одно из следующих двух условий: $A_i \cap X \neq \emptyset$, $A_i \cap \bar{X} \neq \emptyset$ или $B_i \cap X \neq \emptyset$, $B_i \cap \bar{X} \neq \emptyset$. Без потери общности предположим, что имеет место первое условие. Докажем, что в этом случае $B_i \subseteq \bar{X}$. Доказательство проведем от противного. Допустим, что $B_i \cap X \neq \emptyset$, и рассмотрим вершину $b \in B_i \cap X$. Зафиксируем некоторую вершину $x \in A_i \cap X$. Так как в графе G_1 каждая вершина из A_i смежна с каждой вершиной из B_i , то вершины b и x смежны. Последнее невозможно, так как X – независимое множество G_1 . Поэтому $B_i \cap X = \emptyset$ и $B_i \subseteq \bar{X}$.

Таким образом, выполняется $A_i \cap X \neq \emptyset$, $A_i \cap \bar{X} \neq \emptyset$, $B_i \subseteq \bar{X}$. Положим $A_i^* := A_i \cap X$, $B_i^* := B_i$ и $\Sigma_i^* := \Sigma_i \cap E'$. Легко видеть, что $((A_i^*, B_i^*), \Sigma_i^*)$ – биклика графа G_2 . Обозначим

$$S_2' := \{((A_i^*, B_i^*), \Sigma_i^*) : ((A_i, B_i), \Sigma_i) \in S_2\}.$$

Покажем, что множество $S' := S_1 \cup S_2'$ биклик графа G_2 является бикликовым покрытием графа G_2 . Известно, что множество биклик $S_1 \cup S_2$ графа G_1 покрывает каждое ребро $e \in E'$. Если ребро e покрыто бикликой из S_1 , то оно, очевидно, покрывается и множеством биклик S' . Если же e покрыто бикликой $((A_i, B_i), \Sigma_i)$ из S_2 , то ребро e покрыто бикликой $((A_i^*, B_i^*), \Sigma_i^*)$ из S_2' . Следовательно, и в этом случае S' покрывает e . Поэтому S' – бикликовое покрытие двудольного графа G_2 , количество биклик в котором не более чем $|S_1| + |S_2'| \leq |S_1| + |S_2| \leq |S| = bc(G_1)$. Таким образом, $bc(G_2) \leq bc(G_1)$. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Задача *Бикликовое покрытие* принадлежит классу **NP** [10]. Мы построим полиномиальное сведение задачи *Бикликовое покрытие* в классе двудольных графов (которая является **NP**-полной) к задаче *Бикликовое покрытие* в классе расщепляемых графов. Пусть $G = ((X, Y), E)$ – двудольный граф без изолированных вершин, где $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_q\}$.

Преобразуем двудольный граф G в расщепляемый граф $\Gamma = (V', E')$ следующим образом (в качестве примера см. рис. 1).

1. Изначально положим $V' := X \cup Y$, $E' := E$.
2. В графе Γ каждые две различные вершины из Y соединим ребром.
3. Добавим к графу Γ множество новых вершин $Y' := \{y'_1, y'_2, \dots, y'_q\}$.
4. Каждые две различные вершины из Y' соединим ребром.
5. Соединим ребром каждую вершину y'_i из Y' с каждой вершиной y_j из Y .

Построенный таким образом граф $\Gamma = (V', E')$ имеет множество вершин $V = X \cup Y \cup Y'$ и множество ребер $E' = E \cup \{y_i y_j : 1 \leq i < j \leq q\} \cup \{y'_i y'_j : 1 \leq i < j \leq q\} \cup \{y'_i y_j : 1 \leq i, j \leq q\}$. Граф Γ является

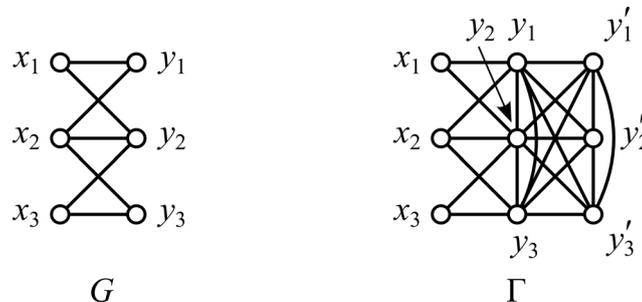


Рис. 1. Пример преобразования двудольного графа G в расщепляемый граф Γ

расщепляемым, в котором X – независимое множество, а $Y \cup Y'$ – клика. Очевидно, что такое преобразование двудольного графа в расщепляемый можно осуществить за полиномиальное время. Утверждается, что $bc(\Gamma) = bc(G) + \lceil \log_2 q \rceil$. Это равенство вытекает из следующих двух лемм.

Л е м м а 3. $bc(\Gamma) \leq bc(G) + \lceil \log_2 q \rceil$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим наименьшее бикликовое покрытие S графа G , которое состоит из биклик $((A_i, B_i), \Sigma_i)$ и $A_i \subseteq X, B_i \subseteq Y, i = 1, 2, \dots, bc(G)$. Построим бикликовое покрытие S' графа Γ такое, что $|S'| = |S| + \lceil \log_2 q \rceil$. Так как G является подграфом Γ , то каждая биклика из S является бикликой Γ . Заметим, что каждое ребро e графа Γ , принадлежащее E , покрывается множеством биклик S . Преобразуем каждую биклику $((A_i, B_i), \Sigma_i)$ из S в биклику $((A_i^*, B_i^*), \Sigma_i^*)$ графа Γ , где $A_i^* := A_i \cup Y', B_i^* := B_i$ и $\Sigma_i^* := \Sigma_i \cup \{y'_r y_s : y'_r \in Y', y_s \in B_i\}$. Обозначим $S_1 := \{((A_i^*, B_i^*), \Sigma_i^*) : 1 \leq i \leq bc(G)\}$. Так как S покрывает все ребра Γ , принадлежащие E , то множество биклик S_1 также покрывает все ребра Γ , которые принадлежат множеству E . Это следует из построения биклик S_1 . Покажем, что S_1 покрывает каждое ребро Γ , принадлежащее множеству $\{y'_r y_s : 1 \leq r, s \leq q\}$.

Рассмотрим произвольное ребро Γ вида $y'_r y_s$, где $y'_r \in Y'$ и $y_s \in Y, 1 \leq r, s \leq q$. Так как исходный граф G без изолированных вершин, то в G существует ребро e , инцидентное вершине y_s . Пусть $((A_i, B_i), \Sigma_i)$ – биклика из S , которая покрывает e . Так как $A_i \subseteq X, B_i \subseteq Y$, то $y_s \in B_i$. Тогда соответствующая биклика $((A_i^*, B_i^*), \Sigma_i^*)$ из S_1 покрывает ребро $y'_r y_s$, поскольку $y'_r y_s \in \Sigma_i^*$. Таким образом, каждое ребро Γ , принадлежащее множеству $E \cup \{y'_r y_s : 1 \leq r, s \leq q\}$, покрыто некоторой бикликой из S_1 .

Теперь построим множество S_2 биклик графа Γ , которое покрывает все ребра Γ , непокрытые бикликами из S_1 . Точнее, цель состоит в том, чтобы построить множество S_2 биклик Γ , которое покрывает каждое ребро Γ , принадлежащее множеству $\{y_i y_j : 1 \leq i < j \leq q\} \cup \{y'_i y'_j : 1 \leq i < j \leq q\}$. Заметим, что множество ребер $\{y_i y_j : 1 \leq i < j \leq q\}$ совпадает с множеством ребер порожденного подграфа $\Gamma[Y]$ графа Γ , а множество ребер порожденного подграфа $\Gamma[Y']$ графа Γ совпадает с $\{y'_i y'_j : 1 \leq i < j \leq q\}$. Пусть $((A, B), \Sigma)$ – некоторая биклика графа $\Gamma[Y]$. *Близнецом* биклики $((A, B), \Sigma)$ называется биклика $((A', B'), \Sigma')$ графа $\Gamma[Y']$, где $A' = \{y'_i : y_i \in A\}, B' = \{y'_i : y_i \in B\}$ и $\Sigma' = \{y'_i y'_j : y_i y_j \in \Sigma\}$. *Слиянием* биклики $((A, B), \Sigma)$ и ее близнеца называется операция, в результате которой получается биклика графа Γ вида $((A \cup A', B \cup B'), \Sigma \cup \Sigma' \cup \Sigma'')$, где $\Sigma'' = \{y'_i y_j : y'_i \in B', y_j \in A\} \cup \{y'_i y'_j : y'_i \in A', y'_j \in B\}$. Заметим, что биклика, которая получается в результате слияния биклики $((A, B), \Sigma)$ и ее близнеца, покрывает все ребра Γ , покрываемые бикликой $((A, B), \Sigma)$ и ее близнецом.

П р и м е р. Рассмотрим граф Γ , изображенный на рис. 1. На рис. 2, а выделены биклика $((A, B), \Sigma)$ графа $\Gamma[Y]$, где $A = \{y_2\}, B = \{y_1, y_3\}, \Sigma = \{y_2 y_1, y_2 y_3\}$ и ее близнец $((A', B'), \Sigma')$, где $A' = \{y'_2\}, B' = \{y'_1, y'_3\}, \Sigma' = \{y'_2 y'_1, y'_2 y'_3\}$. В результате слияния биклики $((A, B), \Sigma)$ и ее близнеца получается биклика $((A'', B''), \Sigma'')$, представленная на рис. 2, б, в которой $A'' = \{y_2, y'_2\}, B'' = \{y_1, y_3, y'_1, y'_3\}$ и $\Sigma'' = \{y_2 y_1, y_2 y_3, y'_2 y'_1, y'_2 y'_3, y_2 y'_1, y_2 y'_3, y'_2 y_1, y'_2 y_3\}$.

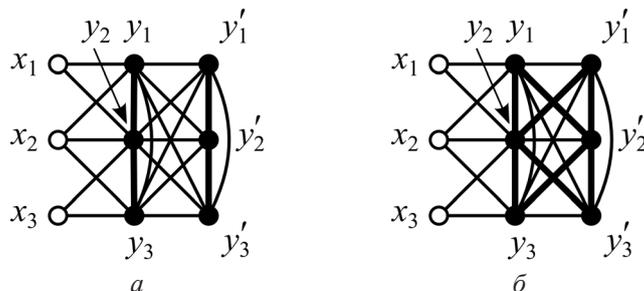


Рис. 2. В графе Γ выделены жирным биклика и ее близнец (а); биклика, которая получается в результате их слияния (б)

Известно [16], что $bc(K_n) = \lceil \log_2 n \rceil$, где K_n – полный граф на n вершинах. Каждый из графов $\Gamma[Y]$ и $\Gamma[Y']$ является полным графом на q вершинах. Тогда существует бикликовое покрытие P графа $\Gamma[Y]$, которое состоит из $\lceil \log_2 q \rceil$ биклик. Теперь для каждой биклики $((A, B), \Sigma)$ из P рассмотрим ее близнеца $((A', B'), \Sigma')$. Заметим, что множество биклик $P' := \{((A', B'), \Sigma') : ((A, B), \Sigma) \in P\}$ покрывает каждое ребро графа $\Gamma[Y']$ и состоит также из $\lceil \log_2 q \rceil$ биклик. Для каждой биклики $((A, B), \Sigma)$ из P выполним слияние с ее близнецом $((A', B'), \Sigma')$ из P' . Получившееся в результате множество биклик обозначим как S_2 . Легко видеть, что S_2 покрывает каждое ребро графов $\Gamma[Y]$, $\Gamma[Y']$ и содержит $\lceil \log_2 q \rceil$ биклик.

Множество биклик S_1 покрывает каждое ребро графа Γ , принадлежащее множеству $E \cup \{y'_s y_s : 1 \leq s \leq q\}$, а множество биклик S_2 покрывает каждое ребро Γ , принадлежащее множеству $\{y_i y_j : 1 \leq i < j \leq q\} \cup \{y'_i y'_j : 1 \leq i < j \leq q\}$. Поэтому $S' := S_1 \cup S_2$ является бикликовым покрытием графа Γ , которое состоит ровно из $|S_1| + |S_2| = |S| + \lceil \log_2 q \rceil = bc(G) + \lceil \log_2 q \rceil$ биклик. Следовательно, выполняется неравенство $bc(\Gamma) \leq bc(G) + \lceil \log_2 q \rceil$. Лемма 3 доказана.

Л е м м а 4. $bc(G) \leq bc(\Gamma) - \lceil \log_2 q \rceil$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим наименьшее бикликовое покрытие S графа Γ . Построим бикликовое покрытие графа G мощности не более чем $|S| - \lceil \log_2 q \rceil$.

Нетрудно видеть, что два ребра любого графа содержатся в некоторой одной биклике этого графа тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих двух условий: они или смежны (т. е. имеют одну общую концевую вершину), или содержатся в некотором цикле длины четыре. Заметим, что для любых двух ребер графа Γ , одно из которых принадлежит множеству E , а другое является ребром графа $\Gamma[Y']$, оба условия не выполняются. Поэтому любая биклика графа Γ не может одновременно содержать ребро из E и ребро графа $\Gamma[Y']$. Разобьем множество S на два непересекающихся подмножества $S := S_1 \cup S_2$. К S_1 отнесем все биклики из S , которые содержат хотя бы одно ребро графа $\Gamma[Y']$. Все остальные биклики отнесем к S_2 .

Легко видеть, что S_2 покрывает все ребра Γ , принадлежащие множеству E . Так как граф $\Gamma[Y']$ – полный граф на q вершинах, то $|S_1| \geq \lceil \log_2 q \rceil$. Действительно, в противном случае, удалив из каждой биклики множества S_1 все вершины из $V' \setminus Y'$, получили бы множество, скажем S'_1 , подграфов графа $\Gamma[Y']$, которое, согласно лемме 1, состоит из биклик и пустых графов. Удалив из S'_1 пустые графы, очевидно, получили бы бикликовое покрытие полного графа $\Gamma[Y']$ на q вершинах, состоящее из менее чем $\lceil \log_2 q \rceil$ биклик, что невозможно. Поэтому $|S_1| \geq \lceil \log_2 q \rceil$ и

$$|S_2| = |S| - |S_1| \leq bc(\Gamma) - \lceil \log_2 q \rceil. \quad (1)$$

Образуем граф H из графа Γ путем удаления из Γ всех вершин множества Y' и всех ребер, которые не содержатся ни в одной биклике из S_2 . Так как S_2 покрывает все ребра из E , то двудольный граф G является подграфом графа H .

Теперь из каждой биклики множества S_2 удалим вершины, принадлежащие Y' . В результате получим множество подграфов графа H , которое обозначим как S'_2 . Согласно лемме 1, каждый элемент S'_2 является или бикликой графа H , или пустым графом. Удалив из S'_2 все пустые графы. Очевидно, что S'_2 является бикликовым покрытием графа H . Поэтому $bc(H) \leq |S'_2|$. Учитывая (1) и тот факт, что $|S'_2| \leq |S_2|$, получаем следующую оценку сверху:

$$bc(H) \leq |S'_2| \leq |S_2| \leq bc(\Gamma) - \lceil \log_2 q \rceil. \quad (2)$$

В графе H множество X является независимым, а двудольный граф $G = ((X, Y), E)$ получается из H путем удаления всех ребер, оба конца которых принадлежат $Y \subseteq V(H)$. Из леммы 2 следует, что $bc(G) \leq bc(H)$. Учитывая (2), получаем $bc(G) \leq bc(\Gamma) - \lceil \log_2 q \rceil$. Лемма 4 доказана.

Из равенства $bc(\Gamma) = bc(G) + \lceil \log_2 q \rceil$ следует, что для двудольного графа G существует бикликовое покрытие, состоящее из не более чем k биклик тогда и только тогда, когда для расщепляемого графа Γ существует бикликовое покрытие, мощность которого не более чем $k + \lceil \log_2 q \rceil$. Требуемое полиномиальное сведение построено. Теорема 1 доказана.

2. Бикликовое покрытие вершин расщепляемого графа. Пусть $G = ((X, Y), E)$ – двудольный граф и $Y' \subseteq Y$. Будем говорить, что Y' доминирует все вершины из X , если каждая вершина из X смежна хотя бы с одной вершиной из Y' . В этом разделе мы докажем, что задача *Бикликовое покрытие вершин* остается **NP**-полной в классе расщепляемых графов. Для этого построим полиномиальное сведение от следующей известной **NP**-полной задачи [17]:

Доминирующее множество в двудольном графе

Условие: задан двудольный граф $G = ((X, Y), E)$ и натуральное число k .

Вопрос: существует ли подмножество вершин $Y' \subseteq Y$, доминирующее все вершины из X такое, что $|Y'| \leq k$?

Т е о р е м а 2. *Задача Бикликовое покрытие вершин является NP-полной в классе расщепляемых графов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G = ((X, Y), E)$ – двудольный граф без изолированных вершин. Преобразуем его в расщепляемый граф $H = (V, E')$, соединив ребром каждую пару вершин из Y . Таким образом, граф H представляет собой расщепляемый граф с множеством вершин $V = X \cup Y$ и множеством ребер $E' = E \cup \{uv : u, v \in Y\}$, в котором X – независимое множество, а Y – клика.

Мы покажем, что в графе G существует множество вершин $Y' \subseteq Y$, доминирующее все вершины из X такое, что $|Y'| \leq k$ тогда и только тогда, когда в H существует бикликовое покрытие вершин мощности не более k .

Пусть $Y' \subseteq Y$ доминирует все вершины из X и $|Y'| \leq k$. Тогда множество максимальных по включению звезд графа H с центрами в каждой вершине из Y' является бикликовым покрытием вершин H мощности не более k .

Пусть S – бикликовое покрытие вершин графа H мощности не более k , которое состоит из биклик $((A_i, B_i), \Sigma_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Предполагаем, что S не содержит тривиальных биклик (в противном случае мы всегда можем «расширить» тривиальную биклику до звезды, которая содержит по крайней мере две вершины). Не теряя общности, пусть $B_i \subseteq Y$ для каждого $i = 1, 2, \dots, k$. Из каждого множества B_i ($i = 1, 2, \dots, k$) выберем любую одну вершину. Множество выбранных вершин обозначим как Y' . Несложно видеть, что в графе G множество Y' доминирует все вершины из X и $|Y'| \leq |S| = k$. Теорема 2 доказана.

Стоит отметить, что задача *Бикликовое покрытие вершин* тривиально решается за полиномиальное время в классе пороговых графов, который, как известно, является подклассом расщепляемых графов. Напомним, что класс *пороговых графов* – рекурсивно-порождаемый и может быть определен следующим образом [1, с. 226]. Одновершинный граф является пороговым графом.

– граф, полученный из G путем добавления к нему новой изолированной вершины, является пороговым;

– граф, полученный из G путем добавления к нему новой вершины, смежной с каждой вершиной G , является пороговым.

Очевидно, что каждая связная компонента любого порогового графа содержит доминирующую вершину (т. е. вершину, которая смежна со всеми другими вершинами связной компоненты). Максимальная по включению звезда с центром в доминирующей вершине связной компоненты содержит все вершины этой компоненты, поэтому бикликовое покрытие вершин любого порогового графа G , состоящее из максимальных по включению звезд с центрами в доминирующих вершинах связных компонент G , является наименьшим.

З а к л ю ч е н и е. В работе доказано, что в классе расщепляемых графов задачи *Бикликовое покрытие* и *Бикликовое покрытие вершин* являются **NP**-полными. Также установлено, что вторая задача решается за полиномиальное время для пороговых графов. Открытым вопросом остается сложностной статус первой задачи в классе пороговых графов.

Отметим, что существует близкая к рассмотренным здесь задача *Бикликовое разбиение* (см., напр., [3, 4, 18]), которая в оптимизационном варианте формулируется следующим образом: требуется найти наименьшее бикликовое покрытие заданного графа, состоящее из попарно реберно-непересекающихся биклик. Полиномиальный алгоритм, решающий эту задачу для расщепляемых графов, предложенный автором данной работы в [19], – ошибочен. Сложностной статус задачи *Бикликовое разбиение* в классе расщепляемых графов является открытым вопросом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф12РА-006).

Литература

1. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. А. Лекции по теории графов. М., 2011.
2. Brandstädt A., Le V. B., Spinrad J. Graph classes: a survey. SIAM Monographs on Discrete Math. and Applications, 1999. P. 306.
3. Fleischner H., Mujuni E., Paulusma D., Szeider S. // Theoretical Computer Science. 2009. Vol. 410. P. 2045–2053.
4. Amilastre J., Vilarem M., Janssen P. // Discrete Applied Mathematics. 1998. Vol. 86. P. 125–144.
5. Cornaz D., Fonplut J. // Discrete Mathematics. 2006. Vol. 306. P. 495–507.
6. Chakrabarti D., Papadimitriou S., Modha D. S., Faloutsos C. // Proceedings of the 10th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining (KDD'04). [S. 1.], 2004. P. 79–88.
7. Heydari M. H., Morales L., Shields C. O., Sudborough I. H. // Proceedings of the 40th Annual Hawaii International Conference on System Sciences (HICSS'07). [S. 1.], 2007. P. 270b.
8. Foldes S., Hammer P. // Congressus Numerantium. 1977. Vol. 19. P. 311–315.
9. Тышкевич Р. И., Черняк А. А. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1979. Т. 5. С. 14–26.
10. Orlin, J. // Indagationes Mathematicae. 1977. Vol. 80. P. 406–424.
11. Müller H. // Discrete Mathematics. 1996. Vol. 149. P. 159–187.
12. Lubiw A. // SIAM J. on Discrete Mathematics. 1990. Vol. 3. P. 98–115.
13. Soto J., Telha C. // Proceedings of the 15th International Conference on Integer programming and combinatoral optimization. [S. 1.], 2011. P. 389–403.
14. Ленин В. В. // Тр. Ин-та математики. 2010. Т. 18. С. 60–78.
15. Ленин В. В., Дугинов О. И. // Тр. Ин-та математики. Т. 19. С. 69–81.
16. Fishburn P. C., Hammer P. L. // Discrete Mathematics. 1996. Vol. 160. P. 127–148.
17. Weihe K. // Proceedings of the 1st Conference on Algorithms and Experiments (ALEX-1998). [S. 1.], 1998. P. 1–8.
18. Kratzke T., Reznick B., West D. // Transactions of the American mathematical society. 1988. Vol. 308. P. 637–653.
19. Дугинов О. И., Ленин В. В. // Веб-программирование и Интернет-технологии WebConf2012: материалы 2-й Междунар. науч.-практ. конф., БГУ. Минск, 2012.

O. I. DUGINOV

COVERING A SPLIT GRAPH WITH THE MINIMUM NUMBER OF COMPLETE BIPARTITE SUBGRAPHS

Summary

In this article we consider the computational complexity of two problems related to bicliques (complete bipartite subgraphs) of a graph in the class of split graphs. Given a graph and an integer k , the *biclique cover problem* asks whether the edge set of the graph can be covered with at most k bicliques; the *biclique vertex-cover problem* asks whether the vertex set of the graph can be covered with at most k bicliques. These problems are known to be **NP**-complete even in the class of bipartite graphs. In this article, we show that the both problems remain **NP**-complete in the class of split graphs.