ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.177
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-434-440

Поступила в редакцию 29.06.2018
Received 29.06.2018

В. И. Бенедиктович

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

О РАЗНОСТИ МЕЖДУ МАКСИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ И ИНДЕКСОМ ГРАФА

Аннотация. Рассматривается алгебраический параметр графа – разность между его максимальной степенью и спектральным радиусом. Хорошо известно, что этот графовый параметр является всегда неотрицательным и представляет собой некоторую меру отклонения графа от регулярности. В последние два десятилетия множество статей было посвящено изучению этого параметра. В частности, в 2007 г. американским математиком S. M. Cioabă получена его нижняя оценка, зависящая от порядка и диаметра графа. В 2017 г. при изучении верхней и нижней оценок для этого параметра M. R. Oboudi выдвинул гипотезу о том, что нижней оценкой данного параметра для произвольного графа является разность между максимальной степенью и спектральным радиусом цепи. Это очень похоже на аналогичное утверждение для спектрального радиуса произвольного графа, нижней границей которого тоже является спектральный радиус цепи. Здесь вышеуказанная гипотеза подтверждается для некоторых классов графов.

Ключевые слова: регулярный, планарный, последовательно-параллельный, унициклический, расщепляемый граф, максимальная степень, матрица смежности, спектральный радиус

Для цитирования. Бенедиктович, В. И. О разности между максимальной степенью и индексом графа / В. И. Бенедиктович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 434–440. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-434-440

V. I. Benediktovich

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

DIFFERENCE BETWWEN THE MAXIMUM DEGREE AND THE INDEX OF A GRAPH

Abstract. An algebraic parameter of a graph – a difference between its maximum degree and its spectral radius is considered in this paper. It is well known that this graph parameter is always nonnegative and represents some measure of deviation of a graph from its regularity. In the last two decades, many papers have been devoted to the study of this parameter. In particular, its lower bound depending on the graph order and diameter was obtained in 2007 by mathematician S. M. Cioabă. In 2017 when studying the upper and the lower bounds of this parameter, M. R. Oboudi made a conjecture that the lower bound of a given parameter for an arbitrary graph is the difference between a maximum degree and a spectral radius of a chain. This is very similar to the analogous statement for the spectral radius of an arbitrary graph whose lower boundary is also the spectral radius of a chain. In this paper, the above conjecture is confirmed for some graph classes.

Keywords: regular, planar, series-parallel, unicyclic, split graph, maximum degree, adjacency matrix, spectral radius

For citation. Benediktovich V. I. Difference betwwen the maximum degree and the index of a graph. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 434–440 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-434-440

В данной статье рассматриваются конечные неориентированные простые графы. Пусть $G=\left(V(G),E(G)\right)$ простой граф порядка n. Две вершины u и v в графе G будем называть *смежными* и обозначать это через $u \sim v$, если $uv \in E(G)$. Для каждой вершины $v \in V(G)$ его *степенью* называется мощность ее *окружения* $N(v)=\{u \in V(G) \mid u \sim v\}$ и обозначается через $\deg_G(v)$. Через $\Delta(G)$ будем обозначать *максимальную степень* вершин графа G. *Регулярный* граф – это граф, у которого все вершины имеют одну и ту же степень. Для двух вершин u и v *связного графа* G, расстоянием между u и v в графе G, которое обозначается через $d(u, v)$, называется длина кратчайшей цепи между u и v. Наибольшее расстояние между любыми двумя вершинами графа G называется его *диаметром* и обозначается через $D(G)$. *Полный граф*, *цикл* и *цепь* порядка n обозначаются через K_n, C_n и P_n соответственно. *Полный двудольный граф* с долями порядков m и n

будем обозначать через $K_{m,n}$. *Звезда* порядка n, которая обозначается через S_n, – это полный двудольный граф $K_{1,n-1}$.

Пусть G – граф с множеством вершин $V(G)=\{v_1,...,v_n\}$. *Матрицей смежности* графа G $A(G)=(a_{ij})$ называется квадратная матрица порядка n, такая, что

$$a_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если } v_iv_j\in E(G),\\ 0, \text{ если } v_iv_j\notin E(G).\end{cases}$$

Следовательно, матрица $A(G)$ является симметрической действительной матрицей с нулями на главной диагонали, и все ее собственные значения являются действительными числами. Они также называются собственными значениями графа G и с учетом своих кратностей образуют его спектр. Мы упорядочим их по невозрастанию: $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq ... \geq \lambda_n(G)$. *Спектральным радиусом* или *индексом* графа G называется наибольшее собственное значение, которое по теореме Перрона – Фробениуса удовлетворяет неравенству $\lambda_1(G)\geq|\lambda_i(G)|\ \ \forall i>1$. Если граф G является связным, то спектральный радиус $\lambda_1(G)$ имеет кратность 1 и существует соответствующий ему положительный собственный вектор. Часто спектральный радиус графа G обозначают через $\rho(G)$.

Хорошо известно, что $\rho(G)\leq\Delta(G)$ [1]. Кроме того, для связного графа G равенство справедливо тогда и только тогда, когда граф G является регулярным. В дальнейшем неотрицательную разность $\Delta(G)-\rho(G)$ будем обозначать через $\beta(G)$, и $\beta(G)$ можно рассматривать как параметр, который указывает на *меру нерегулярности* графа G. В настоящее время существует много работ, посвященных изучению этого параметра. Например, в статье [2] показано, что если G является нерегулярным связным графом порядка n с диаметром $D(G)$, то справедливо неравенство $\beta(G)>\dfrac{1}{nD(G)}$. В работе [3] выявлено, что на всех нерегулярных графах одного и того же порядка n параметр $\beta(G)$ достигает максимального значения на звезде S_n, которое, как известно, равно $\beta(S_n)=n-1-\sqrt{n-1}$. Кроме того, показано, что для деревьев порядка n минимальное значение параметра $\beta(G)$ достигается на цепи P_n, для которой, как известно, $\beta(P_n)=4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2n+2}\right)$. В той же статье им была высказана следующая гипотеза: *пусть G – нерегулярный связный граф порядка n, отличный от цепи P_n, тогда справедливо неравенство* $\beta(G)>\beta(P_n)$.

В настоящей статье мы подтверждаем эту гипотезу для некоторых классов графов. Отметим, что при ее рассмотрении мы можем ограничиться так называемыми ρ-экстремальными графами.

О п р е д е л е н и е 1. Связный нерегулярный граф G порядка n с максимальной степенью вершин $\Delta(G)$ называется ρ-экстремальным, если $\rho(G)\geq\rho(G')$ для произвольного связного нерегулярного графа G' того же порядка и с той же максимальной степенью вершин.

Для таких графов в [4] было показано, что справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. *Пусть G – связный нерегулярный граф порядка n с максимальной степенью вершин Δ. Тогда справедливо неравенство*

$$\beta(G)>\frac{\Delta+1}{n(3n+\Delta-8)}.$$

Из этого утверждения можно получить следующую теорему.

Т е о р е м а 2. *Пусть G – связный нерегулярный граф порядка n с максимальной степенью вершин Δ. Тогда справедливо неравенство* $\beta(G)>\beta(P_n)$ *при следующих условиях:*

1) *когда* $\Delta\geq 34$,
2) *когда* $\Delta = 33$ *и* $n\geq 41$,
3) *когда* $\Delta = 32$ *и* $n\geq 51$,
4) *когда* $\Delta = 31$ *и* $n\geq 68$,
5) *когда* $\Delta = 30$ *и* $n \geq 112$,
6) *когда* $\Delta = 29$ *и* $n\geq 377$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно видеть, что функция

$$f(x)=\frac{x+1}{n(3n+x-8)}$$

возрастает при $n \geq 3$. Заметим, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\Delta+1)(n+1)^2}{n(3n+\Delta-8)}=\frac{\Delta+1}{3}>\pi^2$$

только при $\Delta \geq 29$. Кроме того, нетрудно непосредственно проверить, что неравенство

$$\frac{(\Delta+1)(n+1)^2}{n(3n+\Delta-8)}>\pi^2$$

выполняется при

$$n>\frac{\pi^2(\Delta-8)-2(\Delta+1)+\pi\sqrt{\Delta^2(\pi^2-4)+\Delta(40-16\pi^2)+(44+64\pi^2)}}{2(\Delta+1-3\pi^2)}.$$

Поэтому при $\Delta \geq 34$ (поскольку $n \geq \Delta + 1$), либо при $\Delta = 33$ и $n \geq 41$, либо при $\Delta = 32$ и $n \geq 51$, либо при $\Delta = 31$ и $n \geq 68$, либо при $\Delta = 30$ и $n \geq 112$, либо при $\Delta = 29$ и $n \geq 377$ имеем цепочку неравенств

$$\beta(G)>\frac{\Delta+1}{n(3n+\Delta-8)}>\frac{\pi^2}{(n+1)^2}>4\sin^2\left(\frac{\pi}{2n+2}\right)=\beta(P_n).$$

(Предпоследнее неравенство в этой цепочке следует из известного факта, что $\sin(x) < x$ при $x > 0$.)

Далее нам понадобится следующее утверждение из [5].

Т е о р е м а 3. *Пусть G – простой неориентированный граф с максимальной степенью вершин Δ, чьи ребра могут быть ориентированы так, что максимальная выходящая степень вершин d не превосходит $\Delta/2$. Тогда справедливо неравенство* $\rho(G)\leq 2\sqrt{d(\Delta-d)}$.

Отметим, что теорема 3 остается справедливой и в случае, когда выходящую степень в ее формулировке мы заменим на входящую степень.

Из этого утверждения можно получить следующую теорему.

Т е о р е м а 4. *Пусть G – связный нерегулярный граф порядка n с максимальной степенью вершин Δ, чьи ребра могут быть ориентированы так, что максимальная выходящая степень вершин d меньше $\Delta/2$. Тогда справедливо неравенство* $\beta(G)>\beta(P_n)$ при $n \geq 17$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $f(x)=x-2\sqrt{d(x-d)}$. Нетрудно видеть, что функция $f(x)$ возрастает на интервале $[2d, +\infty)$. Поэтому при $x \geq 2d + 1$ имеем

$$f(x)\geq 2d+1-2\sqrt{d(d+1)}.$$

В частности, так как $d < \Delta/2$, то, согласно предыдущей теореме, имеем

$$\beta(G)\geq f(\Delta)\geq 2d+1-2\sqrt{d(d+1)}.$$

Положим $y = 2d + 1$. Тогда

$$2d+1-2\sqrt{d(d+1)}=g(y),$$

где $g(y)=y-\sqrt{y^2-1}$. Нетрудно видеть, что функция $g(y)$ убывает на интервале $[1, +\infty)$. Поэтому для y таких, что $1<y\leq\Delta\leq n-1$, имеем

$$g(y)\geq g(n-1)=n-1-\sqrt{(n-1)\quad-1}.$$

Покажем, что

$$\left(n-1-\sqrt{(n-1)^2-1}\right)(n+1)^2 > \pi^2$$

при $n \geq 17$. Действительно, положим

$$h(x) = \left(x-1-\sqrt{(x-1)^2-1}\right)(x+1)^2.$$

Нетрудно проверить, что функция $h(x)$ возрастает на интервале $[4, +\infty)$. С другой стороны, $h(17) > \pi^2$. Поэтому при $n \geq 17$ имеем цепочку неравенств

$$\beta(G) \geq 2d+1-2\sqrt{d(d+1)} > \frac{\pi^2}{(n+1)^2} > 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2n+2}\right) = \beta(P_n).$$

Теорема 4 доказана.

З а м е ч а н и е. Теорема 4 справедлива и для случая, когда максимальная входящая степень d удовлетворяет неравенству $d < \Delta/2$.

Воспользуемся теперь следующим утверждением из [6].

Т е о р е м а 5. *Каждый планарный граф G допускает ориентацию ребер с максимальной входящей степенью вершин $d = 3$.*

Отсюда можно получить следующее утверждение.

Т е о р е м а 6. *Пусть G – нерегулярный планарный граф порядка $n \geq 11$ с максимальной степенью вершин $\Delta \geq 7$. Тогда справедливо неравенство $\beta(G) > \beta(P_n)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $f(x) = x - 2\sqrt{3(x-3)}$ возрастает на интервале $[6, +\infty)$. Поэтому для графа G с максимальной степенью $\Delta \geq 7$ порядка $n \geq 11$, согласно замечанию к теореме 4 и теореме 5, имеем

$$\beta(G) \geq f(\Delta) \geq f(7) = 7-4\sqrt{3} > \frac{\pi^2}{(11+1)^2} \geq \frac{\pi^2}{(n+1)^2} > 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2n+2}\right) = \beta(P_n).$$

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $e = uv \in E(G)$ – произвольное ребро простого графа G. Стягиванием ребра e графа G называется операция над графом, которая состоит из удаления ребра e из графа G и слияния его конечных вершин $u = v = w$. При этом ребра, ранее инцидентные либо u, либо v, становятся инцидентными вершине w. Граф H называется минором графа G, если H может быть получен из подграфа G стягиванием его ребер. Граф G называется последовательно-параллельным, если он не содержит полный граф K_4 в качестве минора. Это эквивалентно тому, что он является подграфом 2-дерева, которое получается из клики K_3 многократным добавлением новых вершин, смежных с двумя уже ранее смежными вершинами.

Отметим также, что внешнепланарный граф является последовательно-параллельным графом.

Воспользуемся теперь следующим утверждением из [6].

Т е о р е м а 7. *Каждый последовательно-параллельный граф G допускает ориентацию ребер с максимальной входящей степенью вершин $d = 2$.*

Отсюда можно получить следующее утверждение.

Т е о р е м а 8. *Пусть G – нерегулярный последовательно-параллельный граф порядка $n \geq 9$ с максимальной степенью вершин $\Delta \geq 5$. Тогда справедливо неравенство $\beta(G) > \beta(P_n)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $f(x) = x - 2\sqrt{2(x-2)}$ возрастает на интервале $[4, +\infty)$. Поэтому для графа G с максимальной степенью $\Delta \geq 5$ порядка $n \geq 9$, согласно замечанию к теореме 4 и теореме 7, имеем

$$\beta(G) \geq f(\Delta) \geq f(5) = 5-2\sqrt{6} > \frac{\pi^2}{(9+1)^2} \geq \frac{\pi^2}{(n+1)^2} > 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2n+2}\right) = \beta(P_n).$$

Т е о р е м а 9. *Пусть G – нерегулярный унициклический граф порядка $n \geq 7$ с максимальной степенью вершин $\Delta \geq 3$. Тогда справедливо неравенство $\beta(G) > \beta(P_n)$.*

Доказательство. Функция $f(x)=x-2\sqrt{x-1}$ возрастает на интервале $[2,+\infty)$. Нетрудно убедиться, что унициклический граф G имеет такую ориентацию ребер, при которой максимальная входящая степень вершин d равна 1. Поэтому для графа G с максимальной степенью $\Delta \geq 3$ порядка $n \geq 7$, согласно замечанию к теореме 4, имеем

$$\beta(G)\geq f(\Delta)\geq f(3)=3-2\sqrt{2}>\frac{\pi^2}{(7+1)^2}\geq\frac{\pi^2}{(n+1)^2}>4\sin^2\left(\frac{\pi}{2n+2}\right)=\beta(P_n).$$

Далее воспользуемся следующим утверждением [1].

Теорема 10. *Пусть* $G=(V(G),E(G))$ *– произвольный связный граф и* G' *– его собственный подграф. Тогда справедливо неравенство*

$$\rho(G)>\rho(G').$$

Теорема 11. *Пусть* G *– произвольный нерегулярный связный подграф полного двудольного графа* $K_{m,n}$ $(m > n)$ *с вершиной* v *степени* $\deg_G(v)=m$. *Тогда справедливо неравенство* $\beta(G)>\beta(P_n)$.

Доказательство. В силу предыдущей теоремы 10, не ограничивая общности, можно считать, что $G = K_{m,n}(m > n)$. Положим $k = m - n \geq 1$. Тогда имеем следующую цепочку:

$$\beta(G)=\sqrt{m}\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)=\sqrt{n+k}\left(\sqrt{n+k}-\sqrt{n}\right)\geq\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\beta(K_{n+1,n}).$$

Откуда заключаем, что достаточно доказать утверждение для графа $G = K_{n+1,n}$, т. е. надо показать, что

$$\beta(K_{n+1,n})>\beta(P_{2n+1})=4\sin^2\left(\frac{\pi}{4n+4}\right).$$

Рассмотрим функцию $f(x)=(x+1)^{5/2}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$. Нетрудно видеть, что функция $f(x)$ возрастает на интервале $[1,+\infty)$. Поэтому при натуральном $n \geq 2$ имеем

$$(n+1)^{5/2}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\geq f(2)=3^{5/2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})>\left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Следовательно, при $n \geq 2$ справедливы неравенства

$$\beta(K_{n+1,n})=\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)>4\left(\frac{\pi}{4n+4}\right)^2>4\sin^2\left(\frac{\pi}{4n+4}\right)=\beta(P_{2n+1}).$$

Теорема 11 доказана.

Заметим, что при $n = 1$ $\beta(K_{2,1})=2-\sqrt{2}=4\sin^2\frac{\pi}{8}=\beta(P_3)$, поскольку $K_{2,1}\simeq P_3$.

Для произвольного подмножества вершин $U \subset V(G)$ через $G[U]$ обозначим индуцированный этим множеством подграф в G.

Определение 3. Соединением непересекающихся графов G и H называется граф $G \vee H$, получаемый из их дизъюнктного объединения добавлением всех ребер, которые соединяют каждую вершину графа G с каждой вершиной графа H.

Определение 4. Граф G называется расщепляемым графом, если существует такое разбиение его вершин $V=V_1\cup V_2$, что граф $G[V_1]$ является кликой, а граф $G[V_2]$ – независимым множеством вершин. Граф G называется полным расщепляемым графом, если дополнительно выполняется условие $G=G[V_1]\vee G[V_2]$.

В дальнейшем будем обозначать порядок клики $G[V_1]$ и независимого множества верши $G[V_2]$ через N и M соответственно.

Теорема 12. *Пусть* G *– произвольный нерегулярный связный подграф полного расщепляемого графа* $G=G[V_1]\vee G[V_2]$ *с вершиной* v *степени* $\deg_G(v)=N+M-1$, *где* N *и* M *– порядки клики и независимого множества соответственно. Тогда справедливо неравенство* $\beta(G)>\beta(P_n)$.

Доказательство. В силу теоремы 10, не ограничивая общности, можно считать, что $G = G[V_1] \vee G[V_2]$. Нетрудно непосредственно убедиться, что спектральный радиус полного расщепляемого графа $G = G[V_1] \vee G[V_2]$ равен

$$\rho(G) = \frac{N - 1 + \sqrt{(N-1)^2 + 4MN}}{2}.$$

Поэтому имеем

$$\beta(G) = \frac{2M + N - 1 + \sqrt{(N-1)^2 + 4MN}}{2}.$$

Покажем, что выполняется неравенство $\beta(G) \geq \dfrac{\pi^2}{(N+M+1)^2}$ при $N = 1$ и $M \geq 3$ (так как иначе граф G является цепью) или при $N \geq 2$ и $M \geq 2$.

В первом случае

$$\left(2M + N - 1 + \sqrt{(N-1)^2 + 4MN}\right)\left(N + M + 1\right)^2 = 2(M - \sqrt{M})(M+2)^2.$$

Нетрудно убедиться, что функция $f(x) = 2(x - \sqrt{x})(x+2)^2$ возрастает на промежутке $[3,+\infty)$ и $f(3) = 2(3 - \sqrt{3}) \cdot 25 > 2\pi^2$. Следовательно, при $N = 1$ и $M \geq 3$ имеем

$$\beta(G) = \frac{2M + N - 1 + \sqrt{(N-1)^2 + 4MN}}{2} > \frac{\pi^2}{\left(N + M + 1\right)^2} > 4\sin^2 \frac{\pi}{2\left(N+M\right)+2} = \beta(P_{N+M}).$$

В случае, когда $N \geq 2$ и $M \geq 2$, нетрудно убедиться, что справедливо неравенство

$$2M + N - 1 + \sqrt{(N-1)^2 + 4MN} \geq \frac{4}{3} \cdot \frac{2M - 1}{2M + N - 1}.$$

Действительно, обозначим $A = 2M + N - 11,\ B = 2M - 1.$ Тогда имеем

$$2M + N - 1 + \sqrt{(N-1)^2 + 4MN} = A - \sqrt{A^2 - B^2 + 1}.$$

Но последнее выражение оценивается снизу

$$A - \sqrt{A^2 - B^2 + 1} \geq \frac{4}{3} \cdot \frac{B}{A},$$

поскольку оно равносильно неравенству

$$\left(B - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{16}{9} \cdot \frac{B^2}{A^2} \geq \left(\frac{5}{3}\right)^2,$$

которое, очевидно, справедливо при $B = 2M - 1 \geq 3$.

Таким образом,

$$2M + N - 1 + \sqrt{(N-1)^2 + 4MN} \geq \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \frac{N}{2M + N - 1}\right) \geq \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \frac{N}{M + N + 1}\right).$$

А значит,

$$\left(1 - \frac{N}{M + N + 1}\right)(N + M + 1)^2 = (N + M + 1)^2 - N(N + M + 1) > \frac{3}{2} \cdot \pi^2$$

в случае, когда

$$N + M + 1 > \frac{N + \sqrt{N^2 + 6\pi^2}}{2}.$$

Но последнее неравенство, очевидно, справедливо. Следовательно, при $N \geq 2$ и $M \geq 2$ имеем цепочку неравенств

$$\beta(G) = \frac{\left(2M + N - 1 + \sqrt{(N-1)^2 + 4MN}\right)}{2} \geq \frac{\pi^2}{\left(M + N + 1\right)^2} > 4\sin^2\frac{\pi}{2\left(M+N\right)+2} = \beta(P_{N+M}).$$

Теорема 12 доказана.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Института математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция-2020» и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта № Ф18РА–014.

Acknowledgements. The work has carried out with financial support from the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus within the framework of the Government Research Program “Convergence-2020” and the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research within the framework of the project no. Ф18РА–014.

Список использованных источников

1. Godsil, C. Algebraic Graph Theory / C. Godsil, G. Royle. – New York: Springer, 2001. – 463 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0163-9
2. Cioabă, S. M. The spectral radius and the maximum degree of irregular graphs / S. M. Cioabă // Electron. J. Combin. – 2007. – Vol. 14. – P. 1–10.
3. Oboudi, M. R. On the difference between the spectral radius and the maximum degree of graphs / M. R. Oboudi // Algebra and Discrete Math. – 2017. – Vol. 24. – P. 302–307.
4. Liu, B. A note on the largest eigenvalue of non-regular graphs / B. Liu, G. Li // Electron. J. Linear Algebra. – 2008. – Vol. 17, № 1. – P. 54–61. https://doi.org/10.13001/1081-3810.1249
5. Hayes, T. A simple condition implying rapid mixing of single-site dynamics on spin systems / T. Hayes // Proc. 47th Annual IEEE Symposium on Foundation of Computer Science FOCS, 2006. – P. 39–46. https://doi.org/10.1109/focs.2006.6
6. Chrobak, M. Planar orientations with low out-degree and compaction of adjacency matrices / M. Chrobak, D. Eppstein // Theor. Comput. Sci. – 1991. – Vol. 86, № 2. – P. 243–266. https://doi.org/10.1016/0304-3975(91)90020-3

References

1. Godsil C., Royle G. *Algebraic Graph Theory.* New York, Springer, 2001. 463 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0163-9
2. Cioabă S. M. The spectral radius and the maximum degree of irregular graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 2007, vol. 14, pp. 1–10.
3. Oboudi M. R. On the difference between the spectral radius and the maximum degree of graphs. *Algebra and Discrete Mathematics*, 2017, vol. 24, pp. 302–307.
4. Liu B., Li G. A note on the largest eigenvalue of non-regular graphs. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 2008, vol. 17, no. 1, pp. 54–61. https://doi.org/10.13001/1081-3810.1249
5. Hayes T. A simple condition implying rapid mixing of single-site dynamics on spin systems. *Proc. 47th Annual IEEE Symposium on Foundation of Computer Science FOCS*, 2006, pp. 39–46. https://doi.org/10.1109/focs.2006.6
6. Chrobak M., Eppstein D. Planar orientations with low out-degree and compaction of adjacency matrices. *Theoretical Computer Science,* 1991, vol. 86, no. 2, pp. 243–266. https://doi.org/10.1016/0304-3975(91)90020-3

Информация об авторе

Бенедиктович Владимир Иванович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vbened@im.bas-net.by

Information about the author

Vladimir I. Benediktovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vbened@im.bas-net.by