ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.872 01/10/2017
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-441-453

Поступила в редакцию 01.10.2017
Received 01.10.2017

Д. Я. Копать, М. А. Маталыцкий

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

АНАЛИЗ G-СЕТИ С НЕНАДЕЖНЫМИ ЛИНИЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Аннотация. В настоящей статье объектом исследования является марковская сеть с положительными и отрицательными заявками и ненадежными линиями обслуживания с однолинейными системами массового обслуживания (СМО). Дисциплины обслуживания заявок в системах – FIFO («первым пришел – первым обслуживается») и время обслуживания заявок в каждой линии СМО сети распределены по экспоненциальному закону со своими параметрами для каждой СМО. Линии обслуживания в каждой СМО подвержены случайным поломкам, при этом время их исправной работы имеет показательное распределение с различными для каждой СМО параметрами. После поломки линия немедленно начинает восстанавливаться, и время восстановления также имеет показательное распределение, параметры которого различны для каждой СМО. Целью исследования является нахождение нестационарных вероятностей состояний сети. Для этого предложен модифицированный метод последовательных приближений, совмещенный с методом рядов, что позволяет снять условие высокой нагрузки. Доказаны свойства последовательных приближений. На основании полученных данных с помощью компьютера рассчитан модельный пример, который иллюстрирует нахождение зависящих от времени вероятностей состояний сети. Полученные результаты могут быть применены при моделировании различных информационных систем и сетей.

Ключевые слова: марковская сеть, ненадежные СМО, нестационарный режим, нестационарные верятности состояний

Для цитирования. Копать, Д. Я. Анализ G-сети с ненадежными линиями обслуживания / Д. Я. Копать, М. А. Маталыцкий // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 441–453. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-441-453

D. J. Kopats, M. A. Matalytski

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus

ANALYSIS OF G-NETWORK WITH UNRELIABLE SERVICE SYSTEMS

Abstract. In this paper, the object of research is Markov's network with positive and negative customers and unreliable service lines with single-line queuing systems (QS). The discipline of service of customers in the systems – FIFO ("first come first served") and the service time of customers in each line of the QS network are distributed according to the exponential law with their parameters for each QS. The service lines in each QS are defeated by accidental breakdowns, and the time of correct operation of the service line in each SMO has an exponential distribution, with different parameters for each QS. After the breakdown, the line immediately begins to recover, and the recovery time also has an exponential distribution, the parameters of which are different for each QS. The aim of the study is to find the non-stationary probabilities of network states. To find them, a modified method of successive approximations combined with the method of series is proposed. This method allows one to remove the condition of high load. The properties of successive approximations are proved. On the basis of the obtained data, using a computer, a model example illustrating the finding of the time-dependent probabilities of network states is calculated. The results of this work can be applied to the modeling of various information systems and networks.

Keywords: Markov network, unreliable QS, non-stationary regime, non-stationary probability of states

For citation. Kopats D. J., Matalytski M. A. Analysis of G-network with unreliable service systems. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 441–453 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-441-453

1. Описание сети. Рассмотрим открытую G-сеть массового обслуживания [1] с n однолинейными системами массового обслуживания (СМО). В i-ю СМО из внешней среды поступает простейший поток обычных положительных заявок с интенсивностью λ_{0i}^{+} и дополнительный поток отрицательных заявок с интенсивностью λ_{0i}^{-}. Все поступающие потоки независимы. Длительности обслуживания положительных заявок в i-й СМО распределены по экспоненциальному закону с параметром μ_i, $i=\overline{1,n}$. После окончания обслуживания положительной заявки в i-й СМО она направляется в *j*-ю СМО с вероятностью p_{ij}^{+} опять как положительная, а с вероятностью p_{ij}^{-} – как отрицательная заявка, которая уничтожает одну положительную заявку при ее наличии в данной системе в данный момент времени, и с вероятностью $p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{n}\left(p_{ij}^{+} + p_{ij}^{-}\right)$ уходит из сети, $i, j = \overline{1,n}$. Линии обслуживания подвергаются случайным поломкам, причем время исправной работы каждой линии системы S_i имеет показательную функцию распределения с параметром β_i, $i = \overline{1,n}$. После поломки линия немедленно начинает восстанавливаться, и время восстановления также имеет показательную функцию распределения с параметром γ_i, $i = \overline{1,n}$. Под состоянием сети будем понимать вектор $\left(\vec{d},\vec{k},t\right) = \left(d_1(t), d_2(t), \ldots, d_n(t), k_1(t), k_2(t), \ldots, k_n(t)\right)$, где $d_i(t)$, $k_i(t)$ – соответственно количество исправных линий обслуживания и количество заявок в *i*-й СМО в момент времени *t*. Так как системы однолинейны, то $d_i(t) = 0 \vee 1$. В монографии [2] проведено исследование многолинейных ненадежных сетей, но без отрицательных заявок. Для их решения был предложен метод многомерных производящих функций [3], пригодный для сети, когда в любой момент времени в ее системах функционирует хотя бы одна исправная линия обслуживания. Но для нашей сети в данном случае это не всегда выполнено. В работах [4, 5] для сети с многолинейными ненадежными СМО, но без отрицательных заявок, был разработан асимптотический метод при большом, но ограниченном числе заявок. В случае с G-сетью он также непригоден, так как начиная с определенного момента времени в сети может не оказаться положительных заявок. Поэтому для решения системы разностно-дифференциальных уравнений (РДУ) Колмогорова для сети, рассматриваемой в настоящей статье, применен модифицированный метод последовательных приближений, совмещенный с методом рядов, впервые предложенный в работах [6, 7], который позволяет снять условия высокой нагрузки.

2. Система РДУ Колмогорова для вероятностей состояний сети. Пусть I_i – нулевой вектор размерности *n*, за исключением компоненты с номером *i*, которая равна единице, I_0 – *n*-вектор, состоящий из нулей, $P\left(\vec{d},\vec{k},t\right)$ – вероятность состояния $\left(\vec{d},\vec{k},t\right)$, $u(x) = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x \le 0, \end{cases}$ – функция Хевисайда. Так как $d_i(t) = 0 \vee 1$, то $u\left(d_i(t)\right) = d_i(t)$. Возможны следующие переходы нашей цепи Маркова процесса в состояние $\left(\vec{d},\vec{k},t+\Delta t\right)$ за время Δt:

1) из состояния $\left(\vec{d},\vec{k}-I_i,t\right)$, $i = \overline{1,n}$, с вероятностью $\lambda_{0i}^{+} u\left(k_i(t)\right)\Delta t + o(\Delta t)$, в этом случае в *i*-ю СМО за время Δt поступит положительная заявка;

2) из состояния $\left(\vec{d},\vec{k}+I_i,t\right)$, $i = \overline{1,n}$, с вероятностью $d_i(t)\left(\mu_i p_{i0} + \lambda_{0i}^{-} + \mu_i p_{ij}^{-}\left(1 - u\left(k_i(t)\right)\right)\right)\Delta t + o(\Delta t)$ за время Δt положительная заявка после завершения обслуживания в *i*-й СМО покинет сеть, или придет отрицательная заявка и уничтожит одну положительную, или после завершения обслуживания в *i*-й СМО положительная заявка перейдет в *j*-ю как отрицательная, но, не обнаружив там положительных заявок, покинет сеть;

3) из состояния $\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j,t\right)$ с вероятностью $\mu_i d_i(t) p_{ij}^{+} u\left(k_j(t)\right)\Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1,n}$, за время Δt положительная заявка после завершения обслуживания в *i*-й СМО перейдет в *j*-ю как положительная заявка;

4) из состояния $\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j,t\right)$ с вероятностью $\mu_i d_i(t) d_j(t) p_{ij}^{-}\Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1,n}$, за время Δt положительная заявка после завершения обслуживания в *i*-й СМО перейдет в *j*-ю как отрицательная и уничтожит там одну положительную;

5) из состояния $\left(\vec{d}-I_i,\vec{k},t\right)$ с вероятностью $\gamma_i d_i(t)\Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1,n}$, за время Δt восстановится одна линия обслуживания;

6) из состояния $\left(\vec{d}+I_i,\vec{k},t\right)$ с вероятностью $\beta_i\left(d_i(t)+1\right)\Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1,n}$, за время Δt сломается одна линия обслуживания;

7) из состояния $\left(\vec{d},\vec{k},t\right)$ с вероятностью $1-\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_{0i}^{+}+\lambda_{0i}^{-}d_i\left(t\right)+\mu_i d_i\left(t\right)+\gamma_i d_i\left(t\right)+\beta_i\left(1-d_i\left(t\right)\right)\right]\Delta t+o\left(\Delta t\right)$ состояние сети не изменилось.

Используя формулу полной вероятности и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем систему РДУ Колмогорова

$$\frac{P\left(\vec{d},\vec{k},t\right)}{dt}=-\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_{0i}^{+}u\left(k_i\right)+u\left(d_i\right)\left(\lambda_{0i}^{-}+\mu_i+\gamma_i\right)+\beta_i u\left(1-d_i\right)\right]P\left(\vec{d},\vec{k},t\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left\{\lambda_{0i}^{+}u\left(k_i\right)P\left(\vec{d},\vec{k}-I_i,t\right)+\left(\mu_i u\left(d_i\right)p_{i0}+\lambda_{0i}^{-}+\sum_{j=1}^{n}\mu_i u\left(d_i\right)p_{ij}^{-}\left(1-u\left(k_i\left(t\right)\right)\right)\right)P\left(\vec{d},\vec{k}+I_i,t\right)+\right.$$
$$+\gamma_i u\left(d_i\right)P\left(\vec{d}-I_i,\vec{k},t\right)+\beta_i u\left(1+d_i\right)P\left(\vec{d}+I_i,\vec{k},t\right)+$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{n}\left\{\mu_i u\left(d_i\right)p_{ij}^{+}u\left(k_j\left(t\right)\right)P\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j,t\right)+\mu_i u\left(d_i\right)p_{ij}^{-}P\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j,t\right)\right\}\right\}. \quad (1)$$

3. Нахождение среднего числа исправных линий обслуживания в сети. Рассмотрим изменение среднего числа исправных линий обслуживания за промежуток времени $\left[t;t+\Delta t\right)$. Пусть $\overline{d}_i\left(t\right)$ – среднее число исправных линий обслуживания в i-й СМО в момент времени t, т. е. $M\left\{d_i\left(t\right)\right\}=\overline{d}_i\left(t\right)$. Имеет место соотношение

$$\overline{d}_i\left(t+\Delta t\right)=\overline{d}_i\left(t\right)+d_i^{+}\left(t,\Delta t\right)-d_i^{-}\left(t,\Delta t\right), \quad (2)$$

где $d_i^{+}\left(t,\Delta t\right)$ – среднее число восстановленных линий обслуживания на промежутке времени $\left[t,t+\Delta t\right)$, $d_i^{-}\left(t,\Delta t\right)$ – среднее число сломанных линий обслуживания на промежутке времени $\left[t,t+\Delta t\right)$. Тогда среднее число восстановленных линий обслуживания равно

$$M\left\{\sum_{d_i=0}^{1}d_i P_{d_i}\left(t,\Delta t\right)\right\}=M\left\{P_1\left(t,\Delta t\right)\right\}=M\left\{\gamma_i d_i\left(t\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right)\right\}=\gamma_i\overline{d}_i\left(t\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right),$$

где $P_{d_i}\left(t,\Delta t\right)$ – вероятность того, что на интервале времени $\left[t,t+\Delta t\right)$ восстановится d_i линий обслуживания. Аналогично можно показать, что $\beta_i\left(\overline{d}_i\left(t\right)+1\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right)$, $i=\overline{1,n}$ – среднее число сломавшихся линий обслуживания на интервале времени $\left[t,t+\Delta t\right)$. Подставляя данные выражения в (2), получим

$$\frac{d\overline{d}_i\left(t\right)}{dt}=-\left(\beta_i-\gamma_i\right)\overline{d}_i\left(t\right)-\beta_i. \quad (3)$$

Интегрируя (3), получим

$$\overline{d}_i\left(t\right)=C\,e^{-\left(\beta_i-\gamma_i\right)t}+\frac{\beta_i}{\beta_i-\gamma_i}, \quad (4)$$

где C – произвольная постоянная. Пусть $\overline{d}_i\left(0\right)=m_{i0}$, где $m_{i0}=0\vee 1$. Тогда (2) примет вид

$$m_{i0}=C+\frac{\beta_i}{\beta_i-\gamma_i}. \quad (5)$$

Подставив (4) в (3), получим

$$\overline{d}_i\left(t\right)=\left(\frac{\beta_i}{\beta_i-\gamma_i}-m_{i0}\right)e^{-\left(\gamma_i+\beta_i\right)t}+\frac{\beta_i}{\beta_i-\gamma_i}. \quad (6)$$

4. Решение системы РДУ Колмогорова методом последовательных приближений, совмещенного с методом рядов. Систему РДУ (1) можно представить в виде

$$\frac{dP(\vec{d},\vec{k},t)}{dt} = -\Lambda(\vec{d},\vec{k})P(\vec{d},\vec{k},t) + \sum_{i,j=1}^{n}\Phi_{ij}(\vec{d},\vec{k})P(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j,t) + \sum_{i,j=1}^{n}\Xi_{ij}(\vec{d},\vec{k})P(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j,t) + \sum_{i,j=1}^{n}\Theta_{ij}(\vec{d},\vec{k})P(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k},t), \qquad (7)$$

где

$$\Lambda(\vec{d},\vec{k}) = \sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_{0i}^{+}u(k_i) + u(d_i)\left(\lambda_{0i}^{-} + \mu_i + \gamma_i\right) + \beta_i(d_i+1)\right],$$

$$\Phi_{ij}(\vec{d},\vec{k}) = \delta_{0i}\lambda_{0j}^{+}u(k_j) + \delta_{0j}u(d_i)\left(\mu_i p_{i0} + \lambda_{0i}^{-}u(d_i) + \sum_{j=1}^{n}\mu_i p_{ij}^{-}(1-u(k_i))\right) + \mu_i u(d_i)p_{ij}^{+}u(k_j), \Xi_{ij}(\vec{d},\vec{k}) = \mu_i u(d_i)p_{ij}^{-},$$

$$\Theta_{ij}(\vec{d},\vec{k}) = \delta_{0j}\gamma_j u(d_j) + \delta_{0i}\beta_i u(1-d_i).$$

Из (7) следует, что

$$P(\vec{d},\vec{k},t) = e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k})t}\left(P(\vec{d},\vec{k},0) + \int_0^t e^{\Lambda(\vec{d},\vec{k})x}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\Phi_{ij}(\vec{d},\vec{k})P(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j,x) + \sum_{i,j=1}^{n}\Xi_{ij}(\vec{d},\vec{k})P(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j,x) + \sum_{i,j=1}^{n}\Theta_{ij}(\vec{d},\vec{k})P(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k},x)\right\}dx\right). \qquad (8)$$

Пусть $P_q(\vec{d},\vec{k},t)$ – приближение $P(\vec{d},\vec{k},t)$ на q-й итерации, $P_{q+1}(\vec{d},\vec{k},t)$ – решение системы (7), полученное методом последовательных приближений. Тогда из (8) вытекает, что

$$P_{q+1}(\vec{d},\vec{k},t) = e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k})t}\left(P(\vec{d},\vec{k},0) + \int_0^t e^{\Lambda(\vec{d},\vec{k})x}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\Phi_{ij}(\vec{d},\vec{k})P_q(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j,x) + \sum_{i,j=1}^{n}\Xi_{ij}(\vec{d},\vec{k})P_q(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j,x) + \sum_{i,j=1}^{n}\Theta_{ij}(\vec{d},\vec{k})P_q(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k},x)\right\}dx\right). \qquad (9)$$

В качестве начального приближения возьмем стационарное распределение

$$P_0(\vec{d},\vec{k},t) = P(\vec{d},\vec{k}) = \lim_{t\to\infty}P(\vec{d},\vec{k},t),$$

которое удовлетворяет соотношению

$$\Lambda(\vec{d},\vec{k})P(\vec{d},\vec{k}) = \sum_{i,j=1}^{n}\Phi_{ij}(\vec{d},\vec{k})P(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j) + \sum_{i,j=1}^{n}\Xi_{ij}(\vec{d},\vec{k})P(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j) + \sum_{i,j=1}^{n}\Theta_{ij}(\vec{d},\vec{k})P(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k}). \qquad (10)$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Последовательные приближения* $P_q(\vec{d},\vec{k},t), q = 0,1,2,...,$ *сходятся при* $t \to 0$ *к стационарному решению системы уравнений* (7).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Записав выражения для первого приближения, имеем

$$P_1\left(\vec{d},\vec{k},t\right)=e^{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)t}\left(P\left(\vec{d},\vec{k},0\right)+\int_0^t e^{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)x}\left\{\sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P_0\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j,x\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P_0\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j,x\right)+\sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P_0\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k},x\right)\right\}dx\right)=$$

$$=e^{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)t}\left(P\left(\vec{d},\vec{k},0\right)+\int_0^t e^{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)x}\left\{\sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j\right)+\sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k}\right)\right\}dx\right)=$$

$$=e^{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)t}\left(P\left(\vec{d},\vec{k},0\right)+\frac{e^{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)t}-1}{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)}\left\{\sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j\right)+\sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k}\right)\right\}\xrightarrow[t\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[t\to\infty]{}\frac{1}{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)}\left\{\sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j\right)+\sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k}\right)\right\}.$$

Отсюда следует, что при $q = 1$ теорема выполняется. Предположим, что утверждение теоремы справедливо до q-й итерации. Тогда, используя (9) и правило Лопиталя, будем иметь

$$\lim_{t\to\infty}P_{q+1}\left(\vec{d},\vec{k},t\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(P\left(\vec{d},\vec{k},0\right)+\int_0^t e^{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)x}\left\{\sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P_q\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j,x\right)\right.\right.}{e^{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)t}}+$$

$$+\lim_{t\to\infty}\frac{\left.\left.\sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P_q\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j,x\right)+\sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P_q\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k},x\right)\right\}dx\right)}{e^{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)t}}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{e^{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)t}\left\{\sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P_q\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j,t\right)+\sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P_q\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j,t\right)\right.}{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)e^{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)t}}+$$

$$+\lim_{t\to\infty}\frac{\left.+\sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P_q\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k},t\right)\right\}}{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)e^{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)t}}=\frac{1}{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)}\left\{\sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P_q\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P_q\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j\right)+\sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P_q\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k}\right)\right\}=P\left(\vec{d},\vec{k}\right).$$

Поэтому теорема справедлива и для $q + 1$. Тогда, используя метод математической индукции, получаем утверждение данной теоремы.

Т е о р е м а 2. *Последовательность* $\left\{P_q\left(\vec{d},\vec{k},t\right)\right\}, q = 0,1,2,...,$ *построенная по схеме* (9), *при любом ограниченном по t нулевом приближении* $P_0\left(\vec{d},\vec{k},t\right)$, *сходится при* $q \to \infty$ *к единственному решению системы уравнений* (7).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $P_0\left(\vec{d},\vec{k},t\right)$ – ограниченная по t функция, то в силу (8) $P_1\left(\vec{d},\vec{k},t\right)$ также ограничена, поэтому

$$\left|P_1\left(\vec{d},\vec{k},t\right) - P_0\left(\vec{d},\vec{k},t\right)\right| \le C\left(\vec{d},\vec{k}\right). \tag{11}$$

Покажем, что выполняется неравенство

$$\left|P_q\left(\vec{d},\vec{k},t\right) - P_{q-1}\left(\vec{d},\vec{k},t\right)\right| \le C^*\left(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3\right)^{q-1}\frac{t^{q-1}}{(q-1)!}, \tag{12}$$

где

$$\max_{\vec{d},\vec{k}} \kappa_1\left(\vec{d},\vec{k}\right) = \kappa_1,\ \max_{\vec{d},\vec{k}} \kappa_2\left(\vec{d},\vec{k}\right) = \kappa_2,\ \max_{\vec{d},\vec{k}} \kappa_3\left(\vec{d},\vec{k}\right) = \kappa_3, \max_{\vec{d},\vec{k}} C\left(\vec{d},\vec{k}\right) = C^*, \tag{13}$$

$$\kappa_1\left(\vec{d},\vec{k}\right) = \sum_{i,j=1}^{n}\Phi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right),\ \kappa_2\left(\vec{d},\vec{k}\right) = \sum_{i,j=1}^{n}\Xi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right),\ \kappa_3\left(\vec{d},\vec{k}\right) = \sum_{i,j=1}^{n}\Theta_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right).$$

Из (11) следует, что при $q = 1$ это неравенство выполняется. Предположим, что оно выполняется при $q = N$, и покажем, используя (9), его справедливость при $q = N + 1$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\left|P_{N+1}\left(\vec{d},\vec{k},t\right) - P_N\left(\vec{d},\vec{k},t\right)\right| = \left|e^{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)t}\left(P\left(\vec{d},\vec{k},0\right) + \int_0^t e^{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)x}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\Phi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P_N\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j,x\right)+\right.\right.\right.\\
&\quad\left.\left. + \sum_{i,j=1}^{n}\Xi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P_N\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j,x\right) + \sum_{i,j=1}^{n}\Theta_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P_N\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k},x\right)\right\}dx\right) -\\
&\quad - e^{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)t}\left(P\left(\vec{d},\vec{k},0\right) + \int_0^t e^{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)x}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\Phi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P_{N-1}\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j,x\right)+\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\left. + \sum_{i,j=1}^{n}\Xi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P_N\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j,x\right) + \sum_{i,j=1}^{n}\Theta_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P_N\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k},x\right)\right\}dx\right)\right| \le\\
&\le \left|e^{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)t}\left(\int_0^t e^{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)x}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\Phi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\left(P_N\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j,x\right) - P_{N-1}\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j,x\right)\right)+\right.\right.\right.\\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n}\Xi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\left(P_N\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j,x\right) - P_{N-1}\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j,x\right)\right)+\\
&\quad\left.\left.\left. + \sum_{i,j=1}^{n}\Theta_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\left(P_N\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k},x\right) - P_{N-1}\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k},x\right)\right)\right\}dx\right)\right| \le\\
&\le e^{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)t}\left(\int_0^t e^{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)x}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\Phi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\left|P_N\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j,x\right) - P_{N-1}\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j,x\right)\right|+\right.\right.\\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n}\Xi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\left|P_N\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j,x\right) - P_{N-1}\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j,x\right)\right|+
\end{aligned}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\Theta_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\left|P_N\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k},x\right)-P_{N-1}\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k},x\right)\right|\Bigg\}dx\Bigg)\le$$

$$\le e^{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)t}\left(\int_0^t e^{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)x}\left\{k_1\left(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3\right)^{N-1}\frac{x^{N-1}}{(q-1)!}+k_2\left(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3\right)^{N-1}\frac{x^{N-1}}{(q-1)!}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+k_3\left(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3\right)^{N-1}\frac{x^{N-1}}{(q-1)!}\right\}dx\right)\le\left(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3\right)^{N}e^{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)t}\int_0^t e^{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)x}\frac{x^{N-1}}{(q-1)!}dx. \qquad (14)$$

Из неравенства $e^{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)t}e^{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)x}\le 1,\ x\in[0,t]$, следует, что

$$e^{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)t}\int_0^t e^{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)x}\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}dx\le\int_0^t\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}dx=\frac{t^N}{N!},$$

поэтому из (14) получаем, что неравенство (12) имеет место.

Поскольку справедливо неравенство

$$\lim_{q\to\infty}P_q\left(\vec{d},\vec{k},t\right)=\lim_{q\to\infty}\left(P_0\left(\vec{d},\vec{k},t\right)+\sum_{n=0}^{q-1}\left(P_{n+1}\left(\vec{d},\vec{k},t\right)-P_n\left(\vec{d},\vec{k},t\right)\right)\right)=$$

$$=P_0\left(\vec{d},\vec{k},t\right)+\sum_{q=0}^{\infty}\left(P_{q+1}\left(\vec{d},\vec{k},t\right)-P_q\left(\vec{d},\vec{k},t\right)\right)\le P_0\left(\vec{d},\vec{k},t\right)+C^*\sum_{q=0}^{\infty}\left(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3\right)^{q-1}\frac{t^{q-1}}{(q-1)!}=$$

$$=P_0\left(\vec{d},\vec{k},t\right)+e^{\left(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3\right)t},$$

то предел последовательности $\left\{P_q\left(\vec{d},\vec{k},t\right)\right\}, q=0,1,2,...$, существует, обозначим его $P_\infty\left(\vec{d},\vec{k},t\right)$. Подставляя $P_\infty\left(\vec{d},\vec{k},t\right)$ в (8) вместо $P\left(\vec{d},\vec{k},t\right)$, видим, что $P_\infty\left(\vec{d},\vec{k},t\right)$ является решением системы уравнений (7), удовлетворяющим начальным условиям $P_\infty\left(\vec{d},\vec{k},0\right)=P\left(\vec{d},\vec{k},0\right)$ согласно предыдущей теореме.

Предположим, что существует другое решение системы уравнений (7) $P^*\left(\vec{d},\vec{k},t\right)$. Тогда для него справедливо соотношение (9), если заменить в нем $P\left(\vec{d},\vec{k},t\right)$, $P\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j,t\right)$, $P\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j,t\right)$, $P\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k},t\right)$ соответственно на $P^*\left(\vec{d},\vec{k},t\right)$, $P^*\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j,t\right)$, $P^*\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j,t\right)$, $P^*\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k},t\right)$. Поэтому, используя (14), будем иметь

$$\left|P_q\left(\vec{d},\vec{k},t\right)-P^*\left(\vec{d},\vec{k},t\right)\right|\le\left|e^{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)t}\left(P\left(\vec{d},\vec{k},0\right)+\int_0^t e^{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)x}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\Phi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\times\right.\right.\right.$$

$$\times\left|P_{q-1}\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j,x\right)-P^*\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j,x\right)\right|+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\Xi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\left|P_{q-1}\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j,x\right)-P^*\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j,x\right)\right|+$$

$$\left.\left.\left.+\sum_{i,j=1}^{n}\Theta_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\left|P_{q-1}\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k},x\right)-P^*\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k},x\right)\right|\right\}\right)\right|.$$

Аналогично, как и при доказательстве неравенства (11), можно показать, что выполняется неравенство $\left|P_q\left(\vec{d},\vec{k},t\right)-P^*\left(\vec{d},\vec{k},t\right)\right| \le M\left(\kappa_1^*+\kappa_2^*+\kappa_3^*\right)^q \frac{t^q}{q!}$, где M – некоторая константа. Правая часть этого неравенства стремиться к нулю, как общий член сходящегося ряда $\sum_{q=0}^{\infty} M\left(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3\right)^q \frac{t^q}{q!} = Me^{\left(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3\right)t}$, поэтому $\lim_{q\to\infty} P_q\left(\vec{d},\vec{k},t\right)=P^*\left(\vec{d},\vec{k},t\right)$. Но ранее уже получили, что $\lim_{q\to\infty} P_q\left(\vec{d},\vec{k},t\right)=P\left(\vec{d},\vec{k},t\right)$, поэтому $P^*\left(\vec{d},\vec{k},t\right)=P\left(\vec{d},\vec{k},t\right)$, что и доказывает единственность решения системы уравнений (6).

Т е о р е м а 3. *Каждое последовательное приближение* $P_q\left(\vec{d},\vec{k},t\right)$, $q\ge 1$, *представимо в виде сходящегося степенного ряда*

$$P_q\left(\vec{d},\vec{k},t\right)=\sum_{l=0}^{\infty} g_{ql}\left(\vec{d},\vec{k}\right)t^l, \tag{15}$$

коэффициенты которого удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$g_{q+1l}\left(\vec{d},\vec{k}\right)=\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)\right]^l}{l!}\left\{P\left(\vec{d},\vec{k},0\right)+\sum_{u=0}^{l-1}\frac{(-1)^{u+1}u!}{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)^{u+1}}G_{ql}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\right\},\ l\ge 0, \tag{16}$$

$$g_{q0}\left(\vec{d},\vec{k}\right)=P\left(\vec{d},\vec{k},0\right),\ g_{0l}\left(\vec{d},\vec{k}\right)=P\left(\vec{d},\vec{k},0\right)\delta_{l0},$$

$$G_{ql}\left(\vec{d},\vec{k}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\left[\Phi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)g_{ql}\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j\right)+\Xi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)g_{ql}\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j\right)+\Theta_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)g_{ql}\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k}\right)\right].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что коэффициенты степенного ряда (15) удовлетворяют рекуррентным соотношениям (14). Подставим последовательные приближения (15) в соотношение (9). Тогда с учетом того, что

$$e^{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)t}\int_0^t e^{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)x}x^l dx=\left[\frac{1}{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)}\right]^{l+1} l!\sum_{j=l+1}^{\infty}\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)\right]^j}{j!}, l=0,1,2,...,$$

получаем

$$\sum_{l=0}^{\infty} g_{ql}\left(\vec{d},\vec{k}\right)t^l=e^{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)t}P\left(\vec{d},\vec{k},0\right)+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i,j=1}^{n}\left[\Phi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)g_{ql}\left(\vec{k}+I_i-I_j\right)+\Xi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)g_{ql}\left(\vec{k}+I_i+I_j\right)+\right.$$

$$\left.+\Theta_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)g_{ql}\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k}\right)\right]\left[\frac{1}{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)}\right]^{l+1} l!\sum_{u=l+1}^{\infty}\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{d},k\right)\right]^u}{u!}.$$

Используя (16), этот ряд можно записать в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty} g_{ql}\left(\vec{d},k\right)t^l=e^{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)t}P\left(\vec{d},\vec{k},0\right)+\sum_{l=0}^{\infty}G_{ql}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\left[\frac{1}{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)}\right]^{l+1} l!\sum_{u=l+1}^{\infty}\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)\right]^u}{u!}t^u.$$

Поменяв местами индексы суммирования и разлагая $e^{-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)t}$ в ряд по степени t, будем иметь

$$\sum_{l=0}^{\infty} g_{ql}\left(\vec{d},k\right)t^l=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)\right]^l}{l!}\left\{P\left(\vec{d},\vec{k},0\right)+\sum_{u=0}^{l-1}\frac{(-1)^{u+1}u!}{\left[\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)\right]^{u+1}}G_{qu}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\right\}t^l. \tag{17}$$

Если в выражении (17) приравнять коэффициенты при t^l, то получим соотношения (16) для коэффициентов ряда (15). Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда (15) воспользуемся формулой Коши – Адамара

$$\frac{1}{R\left(\vec{d},\vec{k}\right)}=\lim_{l\to\infty}\sqrt[l]{\left|g_{ql}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\right|}.$$

Из (16) вытекает, что

$$\left|g_{q+1l}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\right|=\frac{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)^l}{l!}\left|P\left(\vec{d},\vec{k},0\right)-\sum_{u=0}^{l-1}\frac{(-1)^{u+1}u!}{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}\right)^{u+1}}G_{qu}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\right|,\ l\geq 0.$$

Покажем, что $\left|G_{qu}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\right|$, $q\geq 1$, $u=\overline{0,l-1}$, ограничено конечным значением $Q_1\left(\vec{d},\vec{k}\right)$. Из ограниченности $P\left(\vec{d},\vec{k},0\right)$ и определения $G_{qu}\left(\vec{d},\vec{k}\right)$ следует, что

$$G_{00}\left(\vec{k}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\Big[\Phi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j,0\right)+\Xi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j,0\right)+$$
$$+\Theta_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)P\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k},0\right)\Big]\leq Q_{00}\left(\vec{d},\vec{k}\right),$$

где $Q_{00}\left(\vec{d},\vec{k}\right)$ – некоторая ограниченная величина, а все $G_{0l}\left(\vec{d},\vec{k}\right)=0, l=1,2,\ldots$. Поскольку $G_{q-10}\left(\vec{d},\vec{k}\right)=G_{q-20}\left(\vec{d},\vec{k}\right)=\ldots=G_{10}\left(\vec{d},\vec{k}\right)=G_{00}\left(\vec{d},\vec{k}\right)$, $q\geq 1$, то из (16) следует, что $G_{q-10}\left(\vec{d},\vec{k}\right)<Q_{00}\left(\vec{d},\vec{k}\right)$, $q\geq 1$.

По индукции можно показать, что

$$\left|G_{q-1l}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\right|\leq\frac{Q_{q-1l}\left(\vec{d},\vec{k}\right)}{l!},\ l=1,2,\ldots\ . \tag{18}$$

Например, для $l=1$ имеем

$$G_{q-11}\left(\vec{d},\vec{k}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\Big[\Phi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)g_{q1}\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j\right)+\Xi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)g_{q1}\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j\right)+\Theta_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)g_{q1}\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k}\right)\Big]=$$
$$=G_{q-11}\left(\vec{d},\vec{k}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\Big[\Phi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\left(-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j\right)P\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j,0\right)+G_{q0}\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j\right)\right)+$$
$$+\Xi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j\right)\left(-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j\right)P\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j,0\right)+G_{q0}\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j\right)\right)+$$
$$+\Theta_{ij}\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k}\right)\left(-\Lambda\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k}\right)P\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k},0\right)+G_{q0}\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k}\right)\right)\Big]\leq\frac{Q_{q-11}\left(\vec{d},\vec{k}\right)}{1!},$$

где $Q_{q-11}\left(\vec{d},\vec{k}\right)$ – некоторая ограниченная величина. Предположим, что (17) справедливо для $l-1$, т. е.

$$\left|G_{q-1l-1}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\right|\leq\frac{Q_{q-1l-1}\left(\vec{d},\vec{k}\right)}{(l-1)!},\ l=1,2,\ldots\ . \tag{19}$$

Докажем справедливость неравенства (18) для l. Используя (17), получим

$$G_{q-1l}\left(\vec{d},\vec{k}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\Big[\Phi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)g_{q-1l}\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j\right)+\Xi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)g_{q-1l}\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j\right)+$$

$$+\Theta_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)g_{q-1l}\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k}\right)\Big]=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\Phi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\left(\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j\right)\right]^l}{l!}\left\{P\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j,0\right)+\sum_{u=0}^{l-1}\frac{(-1)^{u+1}u!}{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j\right)^{u+1}}G_{q-1u}\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j\right)\right\}\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\Xi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\left(\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j\right)\right]^l}{l!}\left\{P\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j,0\right)+\sum_{u=0}^{l-1}\frac{(-1)^{u+1}u!}{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j\right)^{u+1}}G_{q-1u}\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j\right)\right\}\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\Theta_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\left(\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k}\right)\right]^l}{l!}\left\{P\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k},0\right)+\sum_{u=0}^{l-1}\frac{(-1)^{u+1}u!}{\Lambda\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k}\right)^{u+1}}G_{q-1u}\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k}\right)\right\}\right)\le$$

$$\le\sum_{i,j=1}^{n}\Phi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\left(\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j\right)\right]^l}{l!}\left\{P\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j,0\right)+\sum_{u=0}^{l-1}\frac{(-1)^{u+1}u!}{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j\right)^{u+1}}\frac{Q_{q-1u}\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j\right)}{u!}\right\}\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\Xi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\left(\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j\right)\right]^l}{l!}\left\{P\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j,0\right)+\sum_{u=0}^{l-1}\frac{(-1)^{u+1}u!}{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j\right)^{u+1}}\frac{Q_{q-1u}\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j\right)}{u!}\right\}\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\Theta_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\left(\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k}\right)\right]^l}{l!}\left\{P\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k},0\right)+\sum_{u=0}^{l-1}\frac{(-1)^{u+1}u!}{\Lambda\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k}\right)^{u+1}}\frac{Q_{q-1u}\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k}\right)}{u!}\right\}\right).$$

Введем обозначение $Q_1\left(\vec{d},\vec{k}\right)=\max\limits_{q,l}Q_{ql}\left(\vec{d},\vec{k}\right)$, тогда

$$G_{q-1l}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\le\sum_{i,j=1}^{n}\Phi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j\right)\right]^l}{l!}\left\{P\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j,0\right)+Q_1\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j\right)\sum_{u=0}^{l-1}\frac{1}{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j\right)^{u+1}}\right\}\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\Xi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\left(\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j\right)\right]^l}{l!}\left\{P\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j,0\right)+Q_1\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j\right)\sum_{u=0}^{l-1}\frac{1}{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j\right)^{u+1}}\right\}\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\Theta_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\left(\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k}\right)\right]^l}{l!}\left\{P\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k},0\right)+Q_1\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k}\right)\sum_{u=0}^{l-1}\frac{1}{\Lambda\left(\vec{d}+I_i-I_j,\vec{k}\right)^{u+1}}\right\}\right)\le$$

$$\le\frac{1}{l!}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\Phi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\left(\left[-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j\right)\right]^l\left\{P\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j,0\right)+Q_1\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j\right)\sum_{u=0}^{l-1}\frac{1}{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}+I_i-I_j\right)^{u+1}}\right\}\right)+\right.$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\Xi_{ij}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\left(\left[-\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j\right)\right]^l\left\{P\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j,0\right)+Q_1\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j\right)\sum_{u=0}^{l-1}\frac{1}{\Lambda\left(\vec{d},\vec{k}+I_i+I_j\right)^{u+1}}\right\}\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\Theta_{ij}\left(\vec d,\vec k\right)\left(\left[-\Lambda\left(\vec d+I_i-I_j,\vec k\right)\right]^l\left\{P\left(\vec d+I_i-I_j,\vec k,0\right)+Q_1\left(\vec d+I_i-I_j,\vec k\right)\sum_{u=0}^{l-1}\frac{1}{\Lambda\left(\vec d+I_i-I_j,\vec k\right)^{u+1}}\right\}\right)\Bigg\}\le$$

$$\le\frac{Q_{q-1l}\left(\vec d,\vec k\right)}{l!},$$

где $Q_{q-1l}\left(\vec d,\vec k\right)$ – выражение в фигурных скобках, значит, неравенство (17) справедливо.

Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{R\left(\vec d,\vec k\right)}=\lim_{l\to\infty}\sqrt[l]{\frac{\Lambda\left(\vec d,\vec k\right)^l}{l!}\left|P\left(\vec d,\vec k,0\right)+\sum_{u=0}^{l-1}\frac{(-1)^{u+1}u!}{\Lambda\left(\vec d,\vec k\right)^{u+1}}G_{qu}\left(\vec d,\vec k\right)\right|}\le$$

$$\le\Lambda\left(\vec d,\vec k\right)\lim_{l\to\infty}\sqrt[l]{\frac{1}{l!}\left|P\left(\vec d,\vec k,0\right)+\sum_{u=0}^{l-1}\frac{(-1)^{u+1}u!}{\Lambda\left(\vec d,\vec k\right)^{u+1}}\frac{Q_{q-1u}\left(\vec d,\vec k\right)}{u!}\right|}\le$$

$$\le\Lambda\left(\vec d,\vec k\right)\lim_{l\to\infty}\sqrt[l]{\frac{1}{l!}\left|P\left(\vec d,\vec k,0\right)+Q_1\left(\vec d,\vec k\right)\sum_{u=0}^{l-1}\frac{(-1)^{u+1}}{\Lambda\left(\vec d,\vec k\right)^{u+1}}\right|}\le$$

$$\le\Lambda\left(\vec d,\vec k\right)\lim_{l\to\infty}\sqrt[l]{\frac{1}{(l-1)!}}\lim_{l\to\infty}\sqrt[l]{\left(\frac{P\left(\vec d,\vec k,0\right)}{l}+\frac{Q_1\left(\vec d,\vec k\right)}{l}\sum_{u=0}^{l-1}\frac{1}{\Lambda\left(\vec d,\vec k\right)^{u+1}}\right)}.\tag{20}$$

Так как

$$F_{l-1}\left(\vec d,\vec k\right)=\sum_{u=0}^{l-1}\frac{1}{\left[\Lambda\left(\vec d,\vec k\right)\right]^{u+1}}=\begin{cases}\dfrac{1-\left[\Lambda\left(\vec d,\vec k\right)\right]^{-l}}{\left(\Lambda\left(\vec d,\vec k\right)-1\right)},\ \Lambda\left(\vec d,\vec k\right)\ne1\\ l,\ \Lambda\left(\vec d,\vec k\right)=1\end{cases},$$

то

$$\lim_{l\to\infty}\frac{F_{l-1}\left(\vec d,\vec k\right)}{l}=\begin{cases}0,\Lambda\left(\vec d,\vec k\right)>1\\ 1,\Lambda\left(\vec d,\vec k\right)=1\end{cases}.\tag{21}$$

В [5] доказано, что имеет место равенство

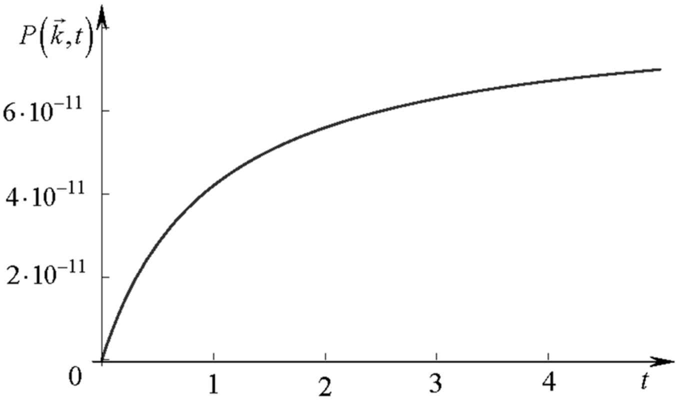
$$\lim_{l\to\infty}\sqrt[l]{\left(\frac{P\left(\vec d,\vec k,0\right)}{l}+\frac{Q_1\left(\vec d,\vec k\right)}{l}F_{l-1}\left(\vec d,\vec k\right)\right)}=1.$$

Можно показать [5], что $\lim_{l\to\infty}\sqrt[l]{\frac{1}{(l-1)!}}=0$. Поэтому, как следует из (21), радиус сходимости степенного ряда (15) равен $+\infty$.

П р и м е р. Рассмотрим сеть, состоящую из $n=4$ СМО:

$$\lambda^+=100,\ \lambda^-=90,\ p_{0i}^+=p_{0i}^-=0{,}25;\ i=\overline{1,4},$$

$$p_{ij}^+=p_{ij}^-=0{,}1;\ p_{i0}=0{,}2;\ i,j=\overline{1,4},\ \mu_i=20,\ \gamma_i=15,\ \beta_i=10,\ i=\overline{1,4}.$$



Вероятность состояния (1,1,1,1,2,3,4,5,t) на отрезке времени [0;5]
State probability (1,1,1,1,2,3,4,5,t) on the time interval [0;5]

Найдем вероятность состояния $\vec{k}=(1,1,1,1,2,3,4,5)$ при условии, что состояние (1,1,1,1,1,1,1,1) было начальным. Решая задачу при помощи языка программирования C# на отрезке [0,5] при $\varepsilon = 10^{-6}$, получим зависимость, представленную на рисунке.

Количество членов ряда, вычисляемых по формуле (17), находилось с использованием соотношения $\left|d_{ql}\left(\vec{d},\vec{k}^*\right)\right| \le \varepsilon$, где $d^*,k^*: d_{ql}\left(\vec{d}^*,\vec{k}^*\right)=\max\limits_{\vec{k}}\left|d_{ql}\left(\vec{d},\vec{k}\right)\right|$, а количество итераций q – с помощью неравенства $\left|P_{q+1}(1,1,1,1,2,3,4,5,t)-P_q(1,1,1,1,2,3,4,5,t)\right| \le \varepsilon$. Получили, что количество итераций $q^* = 45$, а членов ряда – $l^* = 87$.

Список использованных источников

1. Gelenbe, E. Product-form queueing networks with negative and positive customers / E. Gelenbe // J. Appli. Probability. – 1991. – Vol. 28, №. 3. – P. 656–663. https://doi.org/10.2307/3214499

2. Маталыцкий, М. А. Стохастические сети с ограниченным временем ожидания заявок и ненадежным обслуживанием: монография / М. А. Маталыцкий, С. Э. Статкевич. – Гродно: ГрГУ, 2014. – 248 с.

3. Статкевич, С. Э. Исследование сети массового обслуживания с ненадежными системами в переходном режиме / С. Э. Статкевич, М. А. Маталыцкий // Вестн. Том. гос. ун-та. Сер. управление, вычисл. техника и информатика. – 2012. – № 1. – С. 112–125.

4. Matałycki, M. Analiza asymptotyczna wykładniczej sieci zawodnych systemów kolejkowych / M. Matałycki, S. Statkiewicz // Studia Informatica. – 2012. – Vol. 33, № 3-A. – P. 29–36.

5. Маталыцкий, М. А. Исследование марковских НМ-сетей с разнотипными заявками многих классов методом последовательных приближений, совмещенным с методом рядов / М. А. Маталыцкий // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 4. – С. 113–119.

6. Косарева, Е. В. О нахождении доходов в НМ-сетях с ограниченным временем ожидания заявок методом последовательных приближений, совмещенным с методом рядов / Е. В. Косарева, М. А. Маталыцкий, К. В. Розов // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, выліч. тэхніка і ўпраўленне. – 2012. – № 3. – С. 125–130.

7. Науменко, В. В. Исследование в переходном режиме сети со случайным временем ожидания положительных и отрицательных заявок / В. В. Науменко, Д. Я. Копать, М. А. Маталыцкий // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, выліч. тэхніка і ўпраўленне. – 2017. – Т. 7, № 1. – С. 154–163.

References

1. Gelenbe E. Product-form queueing networks with negative and positive customers. *Journal of Applied Probability*, 1991, vol. 28, no. 1, pp. 656–663. https://doi.org/10.2307/3214499

2. Matalytski M. A., Statkevich S. E. *Stochasic Networks with Limited Waiting Times for Customers and Unreliable Services.* Grodno, State University of Grodno, 2014. 248 p. (in Russian).

3. Statkevich S. E., Matalytski M. A. Investigation queueing network with unreliable systems in transient mode. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika = Vesnik of Tomsk State Univercity, Series Management, Computer Technology and Informatics*, 2012, no. 1, pp. 112–125 (in Russian).

4. Matalytski M., Statkiewicz S. Asimptotic analysis of open network unreliable systems in transient mode. *Studia Informatica*, 2012, vol. 33, no. 3-A, pp. 29–36.

5. Matalyski M. Investigation of Markov HM-network with with multi-type applications of many classes by the method of successive approximations, combined with the method of series *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series,* 2008, no. 4, pp. 113–119 (in Russian).

6. Kosareva E. V., Matalytski M. A. On finding incomes in HM-networks with a limited waiting time of applications using the method of successive approximations, combined with the method of series. *Vesnik Grodzenskaga dzyarzhaŭnaga ŭniversiteta imya Yanki Kupaly. Seryya 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naya tekhnika i ŭpraŭlenne = Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Contro*, 2012, no. 3, pp. 125–130 (in Russian).

7. Naumenko V. V., Kopats D. Ya., Matalytsky M. A. Research in the transient mode of the network with a random waiting time for positive and negative applications. *Vesnik Grodzenskaga dzyarzhaŭnaga ŭniversiteta imya Yanki Kupaly. Seryya 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naya tekhnika i ŭpraŭlenne = Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Contro,* 2017, vol. 7, no. 1, pp. 154–163 (in Russian).

Информация об авторах

Копать Дмитрий Ярославович – аспирант, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230020, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: dk80395@mail.ru

Маталыцкий Михаил Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики факультета математики и информатики, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230020, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: m.matalytski@gmail.com

Information about the authors

Dzmitry Ya. Kopats – Postgraduate Student, Grodno State University of Yanka Kupala (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: dk80395@mail.ru

Mikhail A. Matalytski – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer Science, Grodno State University of Yanka Kupala (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: m.matalytski@gmail.com