

ISSN 1561-2430 (Print)
 ISSN 2524-2415 (Online)
 УДК 519.63
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-454-459>

Поступила в редакцию 26.04.2018
 Received 26.04.2018

В. М. Волков, Е. В. Проконина

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ И ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СМЕШАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Аннотация. Рассмотрены разностные схемы и итерационные методы для решения задач анизотропной диффузии, описываемых многомерными эллиптическими уравнениями со смешанными производными. На примере модельной двумерной задачи с разрывными коэффициентами показано, что спектральные свойства разностной задачи и эффективность ее переобусловливания при итерационной реализации зависят от способа аппроксимации смешанных производных. На основе сравнительного численного анализа выявлена наиболее адекватная схема аппроксимации смешанных производных, обеспечивающая максимальную скорость сходимости итерационного метода би-сопряженных градиентов с переобусловливателями Фурье – Якоби и неполной LU-факторизации. Показано, что свойство монотонности разностной схемы не гарантирует ее преимущество при итерационной реализации. Более того, в условиях сильной анизотропии не удастся обеспечить выполнение сеточного принципа максимума.

Ключевые слова: разностные схемы, эллиптические уравнения, смешанные производные, итерационные методы, сеточный принцип максимума

Для цитирования. Волков, В. М. Разностные схемы и итерационные методы для многомерных эллиптических уравнений со смешанными производными / В. М. Волков, Е. В. Проконина // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 454–459. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-454-459>

V. M. Volkov, A. U. Prakonina

Belarusian State University, Minsk, Belarus

FINITE-DIFFERENCE SCHEMES AND ITERATIVE METHODS FOR MULTIDIMENSIONAL ELLIPTIC EQUATIONS WITH MIXED DERIVATIVES

Abstract. Finite difference schemes and iterative methods of solving anisotropic diffusion problems governing multidimensional elliptic PDE with mixed derivatives are considered. By the example of the test problem with discontinuous coefficients, it is shown that the spectral characteristics of the finite difference problem and the efficiency of their preconditioning depend on the mixed derivatives approximation method. On the basis of the comparative numerical analysis, the most adequate approximation formulas for the mixed derivatives providing a maximum convergence rate of the bi-conjugate gradients method with the incomplete LU factorization and the Fourier – Jacobi preconditioners are discovered. It is shown that the monotonicity of the finite difference scheme does not guarantee advantages at their iterative implementation. Moreover, the grid maximum principle is not provided under the conditions of essential anisotropy.

Keywords: finite difference schemes, elliptic equations, mixed derivatives, iterative methods, grid maximum principle

For citation. Volkov V. M., Prakonina A. U. Finite-difference schemes and iterative methods for multidimensional elliptic equations with mixed derivatives. *Vestsi Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 454–459 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-454-459>

Введение. Краевые задачи для дифференциальных уравнений эллиптического типа составляют важный класс математических моделей, используемых для анализа стационарных полей различной физической природы [1]. Как и для большинства других задач математической физики, исчерпывающий анализ данных моделей в контексте конкретных приложений невозможен без использования численных методов. Для этих целей наиболее широко применяются методы конечных элементов и конечных разностей (см., напр., [2, 3]).

Разработка численной методики решения краевых задач для уравнений в частных производных включает две неотъемлемых составляющих. Во-первых, построение дискретной модели, которая ставит в соответствие дифференциальной задаче определенную систему линейных или нелинейных алгебраических уравнений. Во-вторых, поиск наиболее эффективного подхода к ре-

шению таких систем уравнений, которые, как правило, характеризуются большой разреженной матрицей специфической структуры.

В настоящей работе рассмотрены некоторые проблемы построения и реализации разностных схем для моделирования задач анизотропной диффузии, описываемых многомерными эллиптическими уравнениями со смешанными производными и кусочно-постоянными коэффициентами. Отсутствие непрерывности коэффициентов задачи приводит к ухудшению аппроксимирующих свойств разностных моделей, а наличие смешанных производных создает серьезные проблемы сохранения свойства эллиптичности разностного оператора, что может порождать сложности при итерационной реализации метода. Отмеченные обстоятельства, с точки зрения теории разностных схем [2], указывают на целесообразность использования дополнительных критериев оценки вычислительных качеств алгоритмов с учетом преемственности в рамках дискретной модели наиболее важных свойств дифференциальной задачи: законы сохранения, принцип максимума и т. п. Консервативные разностные схемы, удовлетворяющие дискретному принципу максимума (монотонности), для эллиптических уравнений со смешанными производными предложены и исследованы в работах [4–6], где также показано, что обеспечить выполнение этих двух характеристик не удастся без дополнительных условий. Условия монотонности налагают ограничение на соотношение шагов сетки и коэффициенты задачи в точках шаблона. Представляет интерес проверка выполнимости критерия монотонности и его влияние на эффективность итерационной реализации дискретной модели применительно к реальным задачам. В данной работе на примере модельной задачи проведен сравнительный анализ двух разностных схем с точки зрения эффективности их итерационной реализации методом би-сопряженных градиентов с различными типами переобусловливателей.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу Дирихле для двумерного эллиптического уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_{yx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y), \quad |x| < 1, \quad |y| < 1, \quad u(x, y)|_{\Gamma} = 0. \quad (1)$$

Внутри квадратной области с изотропной однородной средой, $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_0$, $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 0$, задана кольцевая подобласть Θ , в которой тензор диффузии определяется следующим образом:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 \\ 0 & \sigma_\tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь φ – угловая полярная координата, $\Theta = \{(x, y), 0, 4 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 0, 6\}$, $\sigma_\tau = 1 / \sigma_r = \sqrt{\lambda}$. Постановка задачи соответствует случаю, когда в кольцевой подобласти отношение коэффициентов диффузии в тангенциальном и радиальном направлениях равно коэффициенту анизотропии λ . Тензор диффузии симметричен и положительно определен. В случае $\lambda \neq 1$ коэффициенты задачи являются знакопеременными и разрывными на границе области Θ . В качестве правой части уравнения (1) использовалась функция в виде двух точечных источников противоположного знака и равной амплитуды, расположенных в кольцевой области на координатных осях. Таким образом, как коэффициенты, так и правая часть уравнения не являются гладкими.

Рассмотренная задача, в силу реалистичности и широких возможностей вариации параметров анизотропии, представляется хорошим примером для сравнительного анализа эффективности различных численных подходов к моделированию анизотропной диффузии в слоистых анизотропных средах.

Численный метод. Для решения рассмотренной задачи используем метод конечных разностей. На сетке $\omega_h = \{(x_i, y_j), x_i = ih_x, y_j = jh_y, i = 1, N_x, j = 1, N_y\}$, вторые производные уравнения аппроксимируем стандартным образом [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} = h_x^{-2} \left[\sigma_{xx}^{i+0,5,j} U_{i+1,j} - (\sigma_{xx}^{i+0,5,j} + \sigma_{xx}^{i-0,5,j}) U_{i,j} + \sigma_{xx}^{i-0,5,j} U_{i-1,j} \right], \quad (3)$$

где $\sigma_{xx}^{i\pm 0,5,j} = (\sigma_{xx}^{i,j} + \sigma_{xx}^{i\pm 1,j}) / 2$, $U_{i,j} = U(x_i, y_j)$.

Для аппроксимации смешанных производных рассмотрим два варианта разностных формул:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \cong \frac{1}{4h_x h_y} \left(\sigma_{xy}^{i+0,5,j} (U_{i+1,j+1} - U_{i+1,j-1} + U_{i,j+1} - U_{i,j-1}) - \sigma_{xy}^{i-0,5,j} (U_{i,j+1} - U_{i,j-1} + U_{i-1,j+1} - U_{i-1,j-1}) \right), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} \frac{\partial}{\partial y} &\cong \frac{1}{4h_x h_y} \left[\sigma_{xy}^{+(i+0,5,j)} (U_{i+1,j+1} - U_{i+1,j}) - \sigma_{xy}^{+(i-0,5,j)} (U_{i,j+1} - U_{i,j}) \right] + \\ &+ \frac{1}{4h_x h_y} \left[\sigma_{xy}^{+(i+0,5,j)} (U_{i,j} - U_{i,j-1}) - \sigma_{xy}^{+(i-0,5,j)} (U_{i-1,j} - U_{i-1,j-1}) \right] + \\ &+ \frac{1}{4h_x h_y} \left[\sigma_{xy}^{-(i+0,5,j)} (U_{i+1,j} - U_{i+1,j-1}) - \sigma_{xy}^{-(i-0,5,j)} (U_{i,j} - U_{i,j-1}) \right] + \\ &+ \frac{1}{4h_x h_y} \left[\sigma_{xy}^{-(i+0,5,j)} (U_{i,j+1} - U_{i,j}) - \sigma_{xy}^{-(i-0,5,j)} (U_{i-1,j+1} - U_{i-1,j}) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\sigma_{xy}^{\pm(i,j)} = \sigma_{xy}^{(i,j)} \pm \left| \sigma_{xy}^{(i,j)} \right|$.

Обе схемы консервативны и обладают вторым порядком точности на достаточно гладких входных данных. Кроме того, как показано в работах [5, 6], при выполнении следующих условий:

$$\max \{k_1, k_2\} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \min \{k_3, k_4\},$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\left| \sigma_{xy}^{(i-0,5,j)} \right| - \sigma_{xy}^{(i-0,5,j)} + \left| \sigma_{xy}^{(i+0,5,j)} \right| + \sigma_{xy}^{(i+0,5,j)} + 2 \left| \sigma_{xy}^{(i,j-0,5)} \right|}{4\sigma_{yy}^{(i,j-0,5)}}, \\ k_2 &= \frac{\left| \sigma_{xy}^{(i-0,5,j)} \right| + \sigma_{xy}^{(i-0,5,j)} + \left| \sigma_{xy}^{(i+0,5,j)} \right| - \sigma_{xy}^{(i+0,5,j)} + 2 \left| \sigma_{yx}^{(i,j+0,5)} \right|}{4\sigma_{yy}^{(i,j+0,5)}}, \\ k_3 &= \frac{4\sigma_{xx}^{(i-0,5,j)}}{2 \left| \sigma_{xy}^{(i-0,5,j)} \right| + \left| \sigma_{yx}^{(i,j-0,5)} \right| - \sigma_{yx}^{(i,j-0,5)} + \left| \sigma_{yx}^{(i,j+0,5)} \right| + \sigma_{yx}^{(i,j+0,5)}}, \\ k_4 &= \frac{4\sigma_{xx}^{(i+0,5,j)}}{2 \left| \sigma_{xy}^{(i+0,5,j)} \right| + \left| \sigma_{yx}^{(i,j-0,5)} \right| + \sigma_{yx}^{(i,j-0,5)} + \left| \sigma_{yx}^{(i,j+0,5)} \right| - \sigma_{yx}^{(i,j+0,5)}}. \end{aligned} \quad (6)$$

разностная схема на основе аппроксимаций (3), (5) удовлетворяет сеточному принципу максимума и, как следствие, является монотонной. Следствием сеточного принципа максимума (монотонности) является также гарантированное диагональное доминирование и положительная определенность разностного оператора задачи. Последнее обстоятельство позволяет предположить, что свойство монотонности может обеспечить преимущество данного класса схем при итерационной реализации соответствующей системы разностных уравнений, поскольку скорость сходимости итерационных методов существенно зависит от числа обусловленности матрицы.

Использование разностной аппроксимации (4) приводит к консервативной, но не монотонной дискретной модели [7]. Тем не менее аппроксимация смешанных производных по формуле (4) представляется наиболее естественной. Несложно заметить, что аппроксимация внутренних производных в дивергентной записи уравнения (1) со вторым порядком точности, согласно формулам (3) и (4), достигается в одних и тех же полужелтых точках сетки $(x_{i\pm 0,5}, y_j)$ и $(x_i, y_{j\pm 0,5})$. В этих же точках вычисляются и коэффициенты уравнения, определяемые как диагональными, так и недиагональными компонентами тензора диффузии. В отличие от (4), для разностной аппроксимации (5) второй порядок аппроксимации достигается благодаря усреднению смешанных производных

по диагонально симметричным ячейкам шаблона с центрами в точках $(x_{i\pm 0,5}, y_{j\pm 0,5})$ для положительных и $(x_{i\pm 0,5}, y_{j\mp 0,5})$ для отрицательных значений недиагональных компонент тензора диффузии.

Рассмотренные варианты разностных схем (3), (4) и (3), (5) сводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$AU = f, \quad (7)$$

где A – 9-диагональная разреженная матрица для разностных схем на основе формулы (4) и 7-диагональная матрица для схемы (5). Размерность матриц определяется числом узлов сетки, и при $N_x = N_y = N > 100$ для реализации разностных схем предпочтительно использовать итерационные методы.

Результаты численных экспериментов. Для реализации систем разностных уравнений (7) использован метод би-сопряженных градиентов [8], для которого количество итераций, обеспечивающее заданную точность, оценивается величиной, пропорциональной корню квадратному из числа обусловленности матрицы системы. Численные эксперименты подтверждают указанные оценки скорости сходимости. В частности, количество необходимых итераций для явного метода би-сопряженных градиентов при реализации рассмотренных разностных схем возрастает обратно пропорционально шагу сетки, что полностью согласуется со спектральными свойствами разностного оператора Лапласа [2].

Для ускорения сходимости предпочтительно использовать неявные аналоги итерационных методов с переобусловливанием. Рассмотрены переобусловливатели на основе неполной LU-факторизации (iLU) и комбинированный переобусловливатель Фурье – Якоби (FJ), в качестве которого использована стандартная диагональная матрица, построенная из диагональных элементов системной матрицы, и матрица однородной изотропной задачи, для обращения которой применимо быстрое дискретное преобразование Фурье. Для численных экспериментов использованы функции Matlab bicg и iLU. Итерации прекращались, когда относительная норма невязки достигала значения $\varepsilon = 10^{-9}$.

На примере решения модельной задачи (1), (2) исследованы зависимости числа итераций от количества узлов сетки и коэффициента анизотропии λ . Кроме того, произведен сравнительный анализ эффективности рассмотренных переобусловливателей на основе оценок числа обусловленности матрицы системы разностных уравнений A и переобусловленной матрицы $P^{-1}A$, где P – матрица переобусловливателя. Оценка числа обусловленности матриц производилась на основе отношения максимального и минимального сингулярных значений, вычисленных с помощью функции Matlab svds. Результаты численных экспериментов представлены на рис. 1, 2.

Зависимости спектральных свойств матрицы дискретной задачи и скорости сходимости итерационных методов от размерности сетки (рис. 1) показывают, что наиболее эффективные результаты демонстрирует разностная схема (3), (4), реализуемая методом би-сопряженных градиентов (biCG) с использованием переобусловливателя Фурье – Якоби (FJ). Использование данного типа переобусловливателя практически полностью устраняет зависимость числа итераций от размерности сетки, что позволяет сравнить по эффективности данную технику с многосеточными итерационными методами [9]. Принимая во внимание, что вычислительные затраты на одну итерацию в методе biCG FJ превосходят данный показатель для метода biCG iLU приблизительно в 2–2,5 раза, легко видеть что при $N \geq 50$ наблюдается превосходство в эффективности метода biCG FJ, которое возрастает пропорционально N .

Ожидаемое преимущество монотонной схемы (3), (5) не нашло подтверждения в численных экспериментах. Более того, для рассмотренной модельной задачи критерии монотонности (6) выполнялись лишь при умеренных значениях анизотропии $\lambda < 6 \div 7$, а при $\lambda \geq 10$ и более отмечалось прогрессирующее нарушение сеточного принципа максимума.

Отметим, что спектральные характеристики исходных разностных операторов на основе (4) и (5) практически совпадают. Вместе с тем разностная аппроксимация смешанных производных (4) неизменно обеспечивает лучшую сходимость итераций, особенно в комбинации biCG FJ, что, впрочем, не всегда коррелирует с соотношением числа обусловленности переобусловленных матриц.

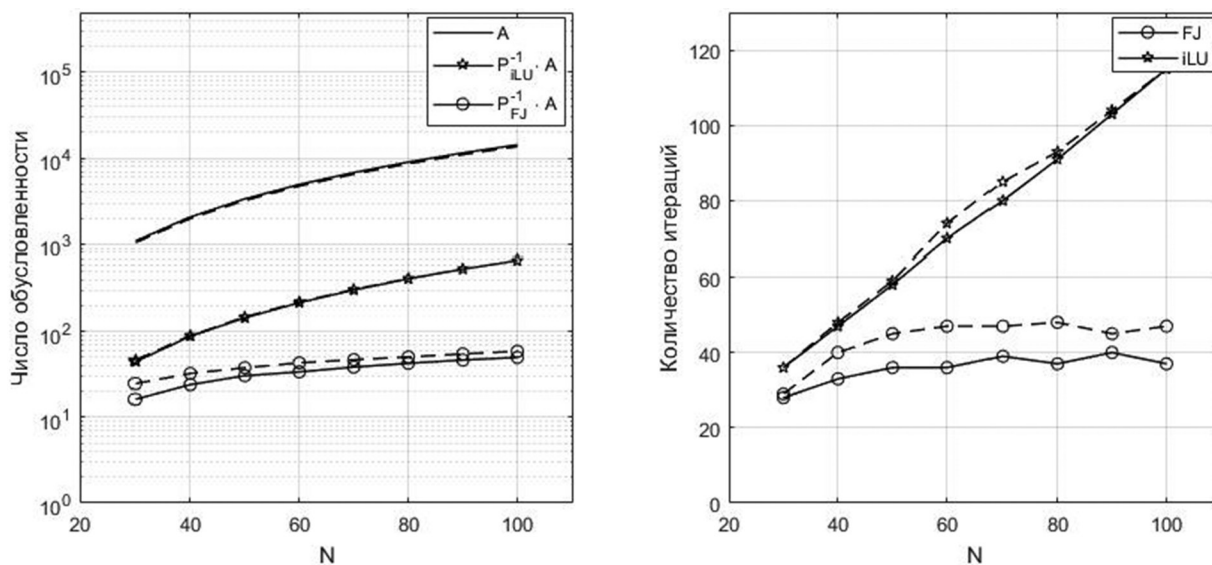


Рис. 1. Зависимости числа обусловленности исходных и переобусловленных матриц дискретной задачи (слева), а также количества итераций (справа) от числа узлов сетки $N \times N$ для разностных схем (3), (5) – пунктирные линии и (3), (4) – сплошные линии, $\lambda = 20$

Fig. 1. The dependences of the condition number of the original and preconditioned matrices of the discrete problem (left) and the iterations number (right) on the grid resolution $N \times N$ for finite difference schemes (3), (5) – dashed lines and (3), (4) – solid lines, $\lambda = 20$

Заклучение. Представленные выше результаты показывают, что при решении краевых задач для эллиптических уравнений со смешанными производными вопросы построения и реализации разностных методов уместно рассматривать как единую проблему, поскольку выбор способа аппроксимации смешанных производных во многом определяет эффективность последующей итерационной реализации дискретной задачи. Среди известных переобусловливателей для данного класса задач лучшие результаты демонстрирует метод Фурье – Якоби, для которого при умеренной анизотропии практически устраняется зависимость числа итераций для достижения

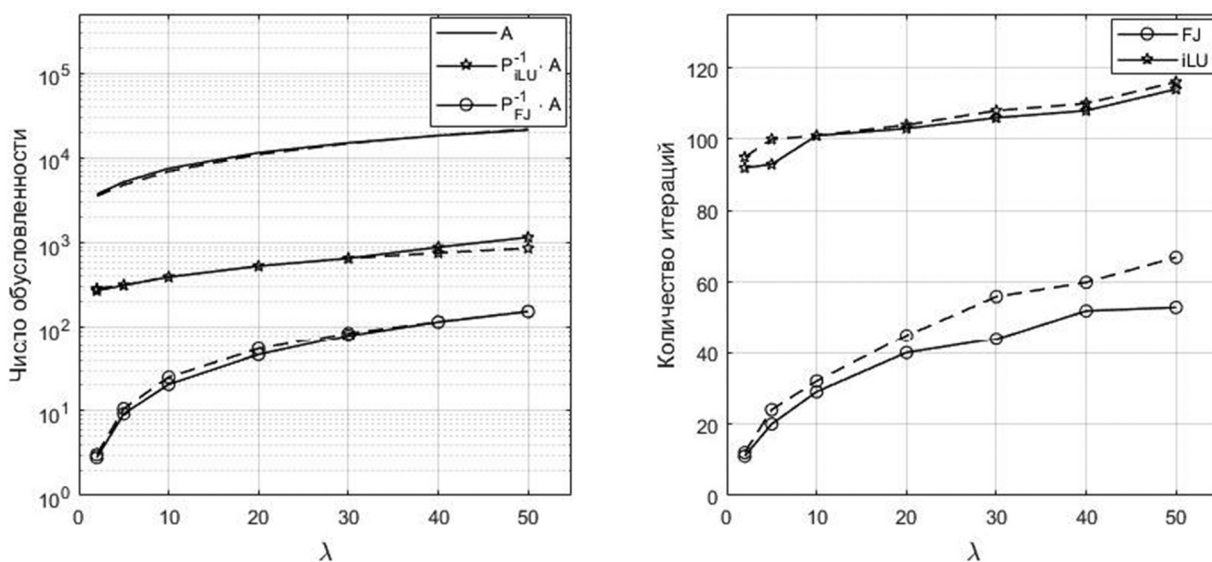


Рис. 2. Зависимости числа обусловленности исходных и переобусловленных матриц дискретной задачи (слева), а также количества итераций от коэффициента анизотропии λ для разностных схем (3), (5) – пунктирные линии и (3), (4) – сплошные линии, $N = 90$

Fig. 2. The dependence of the condition number of the original and preconditioned matrices of the discrete problem (left) and the iterations number (right) on the anisotropy coefficient λ for finite difference schemes (3), (5) – dashed lines and (3), (4) – solid lines, $N = 90$

заданной точности от шага сетки. В случае использования неполной LU-факторизации количество итераций для достижения заданной точности растёт обратно пропорционально шагу сетки, в силу чего данный тип переобусловливания может быть конкурентоспособен лишь при относительно крупных шагах сетки. Среди преимуществ переобусловливателя на основе неполного LU-разложения можно отметить, что он показал себя практически одинаково эффективным для рассмотренных разностных схем. Кроме того, использование данного переобусловливателя позволяет устранить существенный рост числа итераций при увеличении параметра анизотропии.

Список использованных источников

1. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
2. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
3. Ciarlet, P. G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems* / P. G. Ciarlet. – SIAM, 2002. – 530 p. <https://doi.org/10.1137/1.9780898719208>
4. Шишкин, Г. И. Аппроксимация решений сингулярно возмущённых краевых задач с параболическим пограничным слоем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1989. – Т. 29, № 7. – С. 963–977.
5. Монотонные разностные схемы для уравнений со смешанными производными / А. А. Самарский [и др.]. // Мат. моделирование. – 2001. – Т. 13, № 2. – С. 17–26.
6. Rybak, I. V. Monotone and conservative difference schemes for elliptic equations with mixed derivatives // I. V. Rybak // *Mathematical Modelling and Analysis*. – 2004. – Vol. 9, № 2. – P. 169–178.
7. 3D Finite-Difference BiCG Iterative Solver with the Fourier-Jacobi Preconditioner for the Anisotropic EIT/EEG Forward Problem / S. Turovets [et al.] // *Comput. Math. Methods in Medicine*. – 2014. – Vol. 2014. – P. 1–12. <https://doi.org/10.1155/2014/426902>
8. Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods / R. Barrett [et al.]. – SIAM, 1994. <https://doi.org/10.1137/1.9781611971538.ch2>
9. Мартыненко, С. И. Универсальная многосеточная технология для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных на структурированных сетках / С. И. Мартыненко // Вычисл. методы и программирование. – 2000. – Т. 1, № 1. – С. 83–102.

References

1. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Equations of Mathematical Physics*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 735 p. (in Russian).
2. Samarskii A. A. *The Theory of Finite Difference Schemes*. Moscow, Nauka Publ., 1989. 432 p. (in Russian).
3. Ciarlet P. G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. SIAM, 2002. 530 p. <https://doi.org/10.1137/1.9780898719208>
4. Shishkin G. I. Approximation of the solutions of singularly perturbed boundary-value problems with a parabolic boundary layer. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1989, vol. 29, no. 4, pp. 1–10. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(89\)90109-2](https://doi.org/10.1016/0041-5553(89)90109-2)
5. Samarskii A. A., Mazhukin V. I., Matus P. P., Shishkin G. I. Monotone difference schemes for equations with mixed derivative. *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 44, no. 3–4, pp. 501–510. [https://doi.org/10.1016/s0898-1221\(02\)00164-5](https://doi.org/10.1016/s0898-1221(02)00164-5)
6. Rybak I. V. Monotone and conservative difference schemes for elliptic equations with mixed derivatives. *Mathematical Modelling and Analysis*, 2004, vol. 9, no. 2, pp. 169–178.
7. Turovets S., Volkov V., Zherdetsky A., Prakonina A., Malony A. D. 3D Finite-Difference BiCG Iterative Solver with the Fourier-Jacobi Preconditioner for the Anisotropic EIT/EEG Forward Problem. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2014, vol. 2014, pp. 1–12. <https://doi.org/10.1155/2014/426902>
8. *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*. SIAM, 1994. <https://doi.org/10.1137/1.9781611971538.ch2>
9. Martynenko S. I. Robust multigrid technique for solving partial differential equations on structured grids. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye = Numerical Methods and Programming*, 2000, vol. 1, no. 1, pp. 83–100. (in Russian).

Информация об авторах

Волков Василий Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: v.volkov@tut.by

Прокопина Елена Владимировна – старший преподаватель, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: helen.prokonina@mail.ru

Information about the authors

Vasily M. Volkov – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: v.volkov@tut.by

Alena U. Prakonina – Senior Lecturer, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: helen.prokonina@mail.ru