ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 512.542
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-460-467

Поступила в редакцию 22.10.2018
Received 22.10.2018

С. Ю. Башун

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь

О ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ СИЛОВСКОЙ 2-ПОДГРУППЫ С НЕКОТОРЫМИ БИПРИМАРНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Аннотация. Исследуется композиционное строение конечной группы G, у которой силовская 2-подгруппа перестановочна с некоторыми не p-нильпотентными бипримарными подгруппами, содержащими силовскую p-подгруппу из G для всех нечетных простых делителей p порядка группы G, и такие бипримарные подгруппы взяты по одной для каждого нечетного p, которые образуют множество $SB(G)$. Доказано существование подмножества $SB(G)^*$ в $SB(G)$, состоящее из p-замкнутых подгрупп. Главный результат работы следующий: если силовская 2-подгруппа группы G перестановочна со всеми подгруппами $SB(G)^*$, то G может иметь простые неабелевы композиционные факторы только типа $L_2(7)$, если $p > 3$, и дополнительно типа $L_2(3^f)$, $f = 3^a$, $a \geq 1$, если $p = 3$.
Ключевые слова: конечная группа, бипримарная группа, перестановочные подгруппы
Для цитирования. Башун, С. Ю. О перестановочности силовской 2-подгруппы с некоторыми бипримарными подгруппами / С. Ю. Башун // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 460–467. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-460-467

S. Yu. Bashun

Polotsk State University, Novopolotsk, Belarus

PERMUTABILITY OF THE SYLOW 2-SUBGROUP WITH SOME BIPRIMARY SUBGROUPS

Abstract. In this paper, the compositional structure of a finite group G is investigated, which has the Sylow 2-subgroup that is permutable with some non p-nilpotent biprimary subgroups, which contain the Sylow p-subgroup of G for all odd simple divisors of the p order of the group G, and such biprimary subgroups are taken one by one for each odd p, and mark the set $SB(G)$. In this work, the existence of the subset $SB(G)^*$ in $SB(G)$ is proved, which consists of p-closed subgroups. The main result of this paper is as follows: if the Sylow 2-subgroup of the group G is permutable with all subgroups $SB(G)^*$, then G may have simple non-abelian compositional factors only of $L_2(7)$ type, if $p > 3$, and additionally of $L_2(3^f)$ type, $f = 3^a$, $a \geq 1$, if $p = 3$.
Keywords: finite group, biprimary group, permutable subgroups
For citation. Bashun S. Yu. Permutability of the Sylow 2-subgroup with some biprimary subgroups. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 460–467 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-460-467

В работе [1] доказан следующий интересный результат.

Т е о р е м а 1 [1]. *Пусть G – конечная K-группа, T – ее силовская 2-подгруппа. Если T перестановочна с силовскими p-подгруппами, взятыми по одной для каждого $p \in \pi(G)$, то G – разрешимая группа.*

Целью настоящей работы является выяснение нормального и подгруппового строения конечной группы G, у которой силовская 2-подгруппа перестановочна с некоторыми силовскими и некоторыми не p-нильпотентными бипримарными подгруппами из G, содержащими S_p-подгруппу P, для всех $2 < p \in \sigma \subset \pi(G)$ (см. ниже определение 1) (существование таких подгрупп доказано для не p-разрешимых групп в [2, следствие, с. 207]).

В работе используются стандартные обозначения и терминология современной теории конечных групп.

Приведем для удобства чтения некоторые обозначения:

$|X|$ – число различных элементов конечного множества X (порядок множества X);

π – множество некоторых простых чисел;

π' – множество всех простых чисел, не принадлежащих π;

$\pi(n)$ – число различных простых делителей натурального числа n;

$\pi(X) = \pi(|X|)$ для конечной группы X;

π-группа – группа X с $\pi(X) \subseteq \pi$;

(m, n) – наибольший общий делитель чисел m и n;

холлова π-подгруппа (S_π-подгруппа) – подгруппа H конечной группы X такая, что $\pi(H) \in \pi$ и $\pi(X : H) \in \pi'$;

E_π-свойство группы X – существование в X холловой π-подгруппы (кратко: $X \in E_\pi$);

бипримарная (примарная) группа – группа X, у которой $|\pi(X)| = 2$ $(\pi|(X)| = 1)$;

$cf(A)$-свободная (A-свободная) группа – группа, у которой нет композиционных факторов (секций), изоморфных группе A;

E_{p^m} – элементарная абелева подгруппа порядка p^m;

$A \lhd G$ $(A \lhd\lhd G)$ – подгруппа A нормальна (субнормальна) в группе G;

D_m – диэдральная группа порядка m;

Z_m – циклическая группа порядка m;

K-группа – конечная группа, у которой все простые неабелевы композиционные факторы исчерпываются известными простыми группами из множества $\mathrm{Chev} \cup \{A_n / n \geq 5\} \cup \mathrm{Spor}$;

p-нильпотентная группа – группа с нормальным p-дополнением;

pd-группа – группа, порядок которой делится на простое число p;

G_p – силовская p-подгруппа группы G или S_p-подгруппа группы G;

$A \leftthreetimes B$ – полупрямое произведение групп A и B с $A \lhd A \leftthreetimes B$;

$A.B = G$ означает, что $A \lhd G$, $G / A \cong B$;

пусть $q = p^f$, $p > 2$, $\varepsilon(q) \in \{+1, -1\}$, т. е. $\varepsilon(q) = (-1)^{(q-1)/2}$;

p_+^{1+2n} – экстраспециальная группа экспоненты p порядка p^{1+2n};

$\mathrm{Chev}(q)$, $\mathrm{Chev}^a(q)$ – группы лиевского типа характеристики p с полем определения $GF(q)$, $q = p^f$ ($\mathrm{Chev}^a(q)$ – группа $\mathrm{Chev}(q)$ с единичным центром);

$A \circ B$ – центральное произведение групп A и B;

n-примарное число m – это число с $|\pi(m)| = n$;

$K < \cdot G$ – K есть максимальная подгруппа группы G.

Определение 1. Пусть σ – множество всех тех нечетных простых делителей p порядка конечной группы G, для которых G_2 не перестановочна ни с одной силовской p-подгруппой из G, а $\tau = \pi(G) \setminus \sigma$ и для $2 < s \in \tau$ имеем $G \in E_{\{2,s\}}$. Если для каждого $s \in \tau$ взять по одной силовской s-подгруппе, то это множество обозначим $S_\tau(G)$, а если для каждого $p \in \sigma$ рассмотрим систему $S_\sigma(G)$ бипримарных не p-нильпотентных подгрупп, содержащих S_p-подгруппы из G, также взятых по одной для каждого $p \in \sigma$, то обозначим $S_\sigma(G) \cup S_\tau(G)$ через $SB(G)$.

Определение 2. $sb\sigma$-Системой $SB(G)$ группы G назовем указанное в определении 1 множество $SB(G)$. Если $B \in S_\sigma(G)$, то $|B| = |G_p| \cdot s^n$, где $s \in \pi(G)$ и простое число $s \neq p$. (Если в группе G имеется несколько не p-нильпотентных подгрупп, содержащих G_p, то для определенности в $sb\sigma$-систему $SB(G)$ включаем подгруппу наибольшего порядка с наименьшим возможным s, так что $|\sigma| = |S_\sigma(G)|$.)

Определение 3. Если в определении 2 $S_\sigma(G)$ состоит из p-замкнутых групп, а при $p = 3$ группа G $cf(X^*)$-свободна с $X^* \cong L_2(3^f)$, $f = 3^a$, $a \geq 1$, то $sb\sigma$-систему $SB(G)$ будем обозначать как $SB(G)^*$, а множество $S_\sigma(G)$ – как $S_\sigma(G)^*$.

Теорема 2 [3, теорема 3.1]. *Пусть X – конечная группа с S_2-подгруппой T и $sb\sigma$-системой $SB(X)$. Предположим, что T перестановочна с каждой подгруппой из множества $SB(X)$. Тогда имеют место следующие утверждения*:

(1) *X обладает свойством* $E_{\{2,p\}}$ *для каждого* $p = 5$ *и* $p > 7$; *если* $\{3, 7\} \not\subseteq \sigma$, *то X – разрешимая группа и* $\sigma = \varnothing$;

(2) *X либо обладает свойством* $E_{\{2,7\}}$, *либо X не* $L_2(7)$*-свободна и любая* 7*d-подгруппа из* $SB(X)$ *есть* $\{3, 7\}$*-группа, где* $\{3, 7\} \subseteq \sigma$;

(3) *X либо обладает свойством* $E_{\{2,3\}}$, *либо не* $L_2(7)$*-свободна,* 3^6 *делит* $|X|$, *X не* E_{3^6} *-свободна и любая* 3*d-подгруппа из* $SB(X)$ *есть* $\{3, 7\}$*-группа,* $\{3, 7\} \subseteq \sigma$.

С л е д с т в и е [3, следствие 3.2]. *Если конечная K-группа X удовлетворяет условию теоремы* 2 *и* $L_2(7)$*-свободна, то X – разрешимая группа и* $\sigma = \varnothing$.

Л е м м а 1 [3, теорема 3.3.]. *Пусть X – простая неабелева конечная группа с* S_2*-подгруппой T,* $SB(X)$ *– ее sbσ-система. Если T перестановочна со всеми подгруппами из* $SB(X)$ *и* $|\pi(X)| = 3$, *то* $X \cong L_2(7)$.

Л е м м а 2. *Пусть G – конечная группа,* $|\pi(G)| = 3$ *и G имеет холлову* 2′*-подгруппу. Тогда либо G – разрешимая группа, либо не* $cf(L_2(7))$*-свободна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $M \lhd N \lhd\lhd G$ – подгруппы из композиционного ряда группы *G* и *N*/*M* – простая неабелева группа. *N* и *M* пересекаются с холловой 2′-подгруппой группы *G* по своим холловым подгруппам. Поэтому *N*/*M* имеет холлову 2′-подгруппу. Согласно [4, следствие 5.6 (1)] и [5, с. 20], $N / M \cong L_2(7)$. Если же все композиционные факторы группы *G* простые абелевы группы, то *G* – разрешимая группа. Лемма доказана.

Л е м м а 3 [6, лемма 1.2]. *Пусть p и s – различные простые числа, m и n – натуральные числа и* $p^m = s^n + 1$. *Тогда имеет место одно из следующих утверждений*:

(1) $s = 2$, $p = 3$, $n = 3$, $m = 2$;

(2) $s = 2$, $m = 1$, *n – степень числа* 2, $p = s^n + 1$ *– простое число Ферма*;

(3) $p = 2$, $n = 1$, $s = 2^m - 1$ *– простое число Мерсенна, в частности, m – простое число.*

В [7] доказана

Л е м м а 4 [7, лемма 1]. *Если группа* $G = {}^2B_2(q)$ *имеет подгруппу X бипримарного индекса, то* $q = 8$ *или* 32, $X \cong G_2 \leftthreetimes Z_{q-1}$, $|G : X| = 5 \cdot 13$ *или* $5^2 \cdot 41$ *соответственно.*

Л е м м а 5 [8]. *Пусть G – простая неабелева группа, X и Y – t-разрешимые td-подгруппы бипримарного индекса* $i = r^a s^b$. *Тогда X и Y являются разрешимыми подгруппами и имеют место только следующие возможности, указанные в таблице.*

Таблицу мы предваряем пояснениями. В столбце 1 указывается тип простой неабелевой группы *G*. В столбце 2 приводятся *t*-разрешимые подгруппы *X* для некоторого $t \in \pi(X)$ (которые на самом деле оказываются разрешимыми), являющиеся максимальными подгруппами в *G*. В столбце 3 даются другие (не максимальные) *t*-разрешимые подгруппы *Y* в *G*. В столбце 4 указываются индексы $i = r^a s^b$ этих подгрупп в *G* ($\{r, s\} \subseteq \pi(G)$, $r \neq s$, $a > 0$, $b > 0$ – натуральные числа). Для групп лиева типа с полем определения характеристики *p* подгруппа $P = G_p$, *PK* – подгруппа Бореля, *K* − подгруппа Картана, *R* − подгруппа группы *K*. Подчеркнуты индексы холловых подгрупп группы *G*.

Таблица

Table

G	$X < \cdot\, G$	$Y \subset G$	$i = r^a s^b$
1	2	3	4
A_5	D_{10}	Z_3	$2 \cdot 3$, $\underline{2^2 \cdot 5}$
		Z_5	$\underline{2^2 \cdot 3}$
		$Z_2 \times Z_2$	$\underline{3 \cdot 5}$
A_6	D_{10}	Z_5, D_8, E_9	$2^2 \cdot 3^2$, $\underline{2^3 \cdot 3^2}$, $\underline{3^2 \cdot 5}$, $\underline{2^3 \cdot 5}$
		$E_9 \leftthreetimes Z_2$	$2^2 \cdot 5$
		$E_9 \leftthreetimes Z_4$	$2 \cdot 5$

Продолжение таблицы

G	$X <\cdot G$	$Y \subset G$	$i = r^a s^b$
1	2	3	4
A_7	$(A_4 \times Z_3) \lambda Z_2$		$\underline{5 \cdot 7}$
A_8	$E_{16} \lambda (S_3 \times S_3)$		$\underline{5 \cdot 7}$
M_{11}		$Z_{11} \lambda Z_5$	$\underline{2^4 \cdot 3^2}$
	$M_9 \lambda Z_2 \cong (E_9 \lambda Q_8) . Z_2$		$\underline{5 \cdot 11}$
M_{12}		$Z_{11} \lambda Z_5$	$\underline{2^6 \cdot 3^3}$
$L_2(11)$	A_4		$\underline{11 \cdot 5}$
$L_2(13)$	A_4		$\underline{7 \cdot 13}$
$L_2(23)$	S_4		$\underline{11 \cdot 23}$
$L_2(25)$		S_4	$\underline{5^2 \cdot 13}$
$L_2(2^{2^i})$	$D_{2(2^{2^i}-1)}$		$2^{2^i-1} \cdot (2^{2^i}+1)$, $2^{2^i}+1$ – простое число Ферма
		$Z_{2^{2^i}-1}$	$\underline{2^{2^i} \cdot (2^{2^i}+1)}$
$L_2(2^f)$	$D_{2(2^f+1)}$		$2^{f-1} \cdot (2^f-1)$, 2^f-1 – простое число Мерсенна
		Z_{2^f+1}	$\underline{2^f \cdot (2^f-1)}$
$L_2(8)$		E_8, Z_7, G_3	$\underline{7 \cdot 3^2}$, $\underline{8 \cdot 3^2}$, $\underline{8 \cdot 7}$
$L_2(p^{2^i})$	$D_{p^{2^i}-1}$		$\underline{p^{2^i}(p^{2^i}+1)/2}$, $(p^{2^i}+1)/2$ – степень простого числа
$L_2(p)$	D_{p+1}		$\underline{p(p-1)/2}$, $(p-1)/2$ – степень простого числа
$L_2(7)$		Z_3, Z_7, D_8	$\underline{8 \cdot 7}$, $\underline{8 \cdot 3}$, $\underline{7 \cdot 3}$
		A_4, $Z_3 \lambda Z_2$	$2 \cdot 7$, $2^2 \cdot 7$
$L_2(17)$		D_{16}, Z_9, Z_{17}	$\underline{17 \cdot 3^2}$, $\underline{17 \cdot 2^4}$, $\underline{3^2 \cdot 2^4}$
$L_2(p^f)$	$N(G_p)$		$p^f + 1 = r^a s^b$
$L_3(3)$	$Z_{13} \lambda Z_3$		$2^4 \cdot 3^2$
		G_2, G_3, G_{13}	$\underline{3^3 \cdot 13}$, $\underline{2^4 \cdot 13}$, $\underline{2^4 \cdot 3^3}$
$L_3(5)$	$(Z_4 \times Z_4) \lambda S_3$		$\underline{5^3 \cdot 31}$
	$Z_{31} \lambda Z_3$		$\underline{2^5 \cdot 5^3}$
$L_3(q)$ $q = p^f$		$N(G_p)$	$(q^2+q+1)(q+1) = r^a s^b$
$PSp_4(3)$		G_3, G_5, G_2	$\underline{2^6 \cdot 5}$, $\underline{2^6 \cdot 3^4}$, $\underline{3^4 \cdot 5}$
		$E_{16} \lambda A_4$	$\underline{3^3 \cdot 5}$
		$E_{16} \lambda E_4$	$3^4 \cdot 5$
		$E_{16} \lambda D_{10}$	$2 \cdot 3^4$
		$E_{16} \lambda Z_5$	$2^2 \cdot 3^4$
		$Z_5 \lambda Z_4$	$2^4 \cdot 3^4$
		$3_+^{1+2} \lambda Z_2 . A_4$; $E_{27} \lambda S_4$	$2^3 \cdot 5$
		$N(G_3)$	$2^5 \cdot 5$

Окончание таблицы

G	$X < \cdot G$	$Y \subset G$	$i = r^a s^b$
1	2	3	4
$PSp_4(q)$			
$q = 2^{2^i}$		$\lvert P_1 \rvert = q^4(q-1)^2$	$\underline{(q+1)^2(q^2+1)}$
$q = p = 2^r - 1$		$\lvert P_1 \rvert = p^4(p-1)^2$	$(p+1)^2(p^2+1)$
$q = 2^{2^i}$		$\lvert Y_1 \rvert = q^4(q-1)^2 / 2$	$(q+1)^2(q^2+1) \cdot 2$
$q = p = 2^r - 1$		$Y_1 \cong G_p \lambda (Z_{(p-1)/2} \times Z_{(p-1)/a})$	$(p+1)^2(p^2+1) \cdot 2a$, $a \in \{1,2\}$
$U_3(3)$	$(Z_4 \times Z_4).S_3$		$3^2 \cdot 7$
		$(Z_4 \times Z_4).Z_2$	$\underline{3^3 \cdot 7}$
		$Z_7 \lambda Z_3$	$2^5 \cdot 3^2$
		G_3, G_7	$\underline{2^5 \cdot 7}$, $\underline{2^5 \cdot 3^3}$
	$N(G_3)$		$2^2 \cdot 7$
$U_3(4)$	$E_{25} \lambda S_3$		$2^5 \cdot 13$
	$Z_{13} \lambda Z_3$		$\underline{2^6 \cdot 5^2}$
		$E_{25} \lambda Z_3$	$\underline{2^6 \cdot 13}$
$U_3(7)$	$(Z_8 \times Z_8) \lambda S_3$		$\underline{7^3 \cdot 43}$
	$Z_{43} \lambda Z_3$		$\underline{2^7 \cdot 7^3}$
$U_5(2)$		$Z_{11} \lambda Z_5$	$\underline{2^{10} \cdot 3^5}$
$U_3(q)$			
$q = 2^{2^i}$		$\lvert P \ \rvert = q^3(q^2-1)$	$(q+1)(q^2-q+1)$
$q = p = 2^r - 1$		$P_1 \cong G_p \lambda (Z_{p-1} \times Z_{p+1})$	$(p+1)(p^2-p+1)$
$q = p = 2^r - 1$		$\lvert Y_1 \rvert = \lvert G_p \cdot R_1 \rvert = p^3(p^2-1)/a$	$a(p+1)(p^2-p+1)$, $a \mid 2^r$, $\lvert K : R_1 \rvert = a$
$q = 2^{2^i}$		$\lvert Y_2 \rvert = \lvert G_2 \cdot R_2 \rvert = q^3(q-1)$	$\underline{(q+1)^2(q^2-q+1)}$, $\lvert K : R_2 \rvert = q+1$
${}^2B_2(8)$	$G_2 \lambda Z_{q-1}$		$\underline{5 \cdot 13}$
${}^2B_2(32)$	$G_2 \lambda Z_{q-1}$		$\underline{5^2 \cdot 41}$

З а м е ч а н и е к лемме 5. В леммах 3.1, 3.2, 4.1, 4.2, 4.5, 5.1 работы [8] приведены подгруппы бипримарного индекса $i = p^a r^b$, где p и r – различные простые числа, $a > 0$, $b > 0$ – целые числа для всех конечных простых групп.

Укажем случаи, когда подгруппы X или Y являются не t-разрешимыми, и это не сразу очевидно в таблице.

(1) [8, табл. 4.2].

В группе $PSp_4(q)$, $q = p^f$, подгруппа $(Sp_2(q) \circ Sp_2(q)).Z_2$ является не t-разрешимой для $q \neq 2, 3$, так как $Sp_2(q) \cong SL_2(q)$. Случаи $A_6 \cong PSp_4(2)'$ и $PSp_4(3)$ рассмотрены выше в таблице.

В группе $Sp_{2m}(2^f)$ подгруппа $O_{2m}^{+}(2^f)$ t-разрешима только в случае $fm = 2$. Но группа $Sp_4(2)$ не простая [5, теорема 2.13]. Подгруппа $O_4^{-}(2) \cong L_2(4)$ неразрешима.

(2) [8, табл. 4.3].

В группе $G = U_3(q)$ параболическая подгруппа P_1 t-разрешима. Группы PR, где P – силовская p-подгруппа в G, R – подгруппа группы Картана в G, разрешимы. Холловой является подгруппа

PR индекса $(q+1)^2(q^2-q+1)$ при $q=2^{2^i}$. При $p = 2^r - 1$ порядок группы $|PR| = p^3(p^2-1)$ не взаимно прост с индексом группы $(p+1)(p^2-p+1)$.

У групп $U_4(p)$ нет t-разрешимых подгрупп бипримарного индекса [5, с. 76].

У группы $U_n(q)$ подгруппа $GU_{n-1}(q)$ имеет бипримарный индекс и является разрешимой только при $n = 3$, $q \in \{2,3\}$. Группа $U_3(2)$ – не простая порядка $3^2 \cdot 2^3$. Случай группы $U_3(3)$ рассмотрен выше в таблице. Кроме того, у группы $U_3(3)$ исправлены опечатки в индексах.

(3) [8, таблицы 4.4, 4.5].

У групп $P\Omega^{\pm}_{2m}(q)$, $m \geq 4$, нет t-разрешимых подгрупп бипримарного индекса.

(4) [8, табл. 5.1].

Из таблицы 5.1 и леммы 4 следует выполнение утверждения для групп ${}^2B_2(q)$.

Т е о р е м а 3. *Пусть G – конечная простая группа и ее силовская 2-подгруппа $S = G_2$ перестановочна со всеми подгруппами множества $SB(G)$, тогда G изоморфна только группе $L_2(7)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отдельно случаи (1) $G \in \mathrm{Chev}^a(q)$, $q = p^f$; (2) $G \in \{A_n \,/\, n \geq 5\}$; (3) $G \in \mathrm{Spor}$.

(1). $G \in \mathrm{Chev}^a(q)$, $q = p^f$. Согласно теореме 2(1), если $p = 2$, то G обладает холловыми $\{2,r\}$-подгруппами для всех $r \notin \{3,7\}$. Так как $\{2,r\}$-подгруппы разрешимы, то по [9, теорема 8.3] все эти подгруппы лежат в подгруппе Бореля $B = G_p \leftthreetimes H$, где H – подгруппа Картана группы G (ввиду того, что все подгруппы Бореля сопряжены в G). Тогда $|G : B_0| = 3^a \cdot 7^b$, B_0 – холлова $\{3,7\}'$-подгруппа в B и G. Разрешимые подгруппы бипримарного индекса в группах лиева типа известны (см. лемму 5). Ни одна из них не имеет $\{3,7\}$-индекса, кроме $L_2(8)$. Но группа $L_2(8)$ не удовлетворяет условию.

Пусть $p > 2$, $p \in \sigma$.

По условию G_2 перестановочна с подгруппой $G_pT_s = T \in SB(G)$.

Если для всех подгрупп T из $SB(G)$ подгруппы $X = G_2T$ разрешимы, то утверждение следует из [10, теорема 1.15.1] и теоремы 1. Группа $X = G_2G_pT_s$ неразрешима, если имеет композиционный фактор $\overline{L} \cong L_2(7)$ по лемме 2. Тогда $p = 7$, $s = 3$ или $p = 3$, $s = 7$.

Согласно теореме 2, G имеет холловы $\{2,s\}$-подгруппы для всех $s > 7$ и $s = 5$. Пусть $q = 3^f$ или 7^f. Пусть $G \notin \{{}^2G_2(3^{2m+1})^a,\ {}^2B_2(2^{2m+1})^a,\ A_1(q)^a\}$. По [9, теорема 8.9] все $s \in \pi(q-1)$, если $\varepsilon(q) = 1$, и все $s \in \pi(q+1)$, если $\varepsilon(q) = -1$. Кроме того, $2 \in \pi(q \pm 1)$. Так как $q(q^2-1)$ делит $|G|$, то получается, что либо $q - 1 = 3^x$, либо $q + 1 = 3^y$ с $q = 7^f$; либо $q - 1 = 7^y$, либо $q + 1 = 7^x$ с $q = 3^f$. Согласно лемме 3, эти равенства невозможны.

Пусть теперь $G = A_1(q)^a$, $q \in \{3^f, 7^f\}$. Так как подгруппа X предполагается неразрешимой, то по [12, теорема II.8.27] $X \in \{L_2(5),\ L_2(p^m),\ m \mid f,\ PGL_2(p^m),\ 2m \mid f\}$. Но X содержит G_p. Поэтому $G \notin \{L_2(p^m), PGL_2(p^m)\}$.

Предположим, что 5 делит $|G|$. По условию G_2 перестановочна с подгруппой из $SB(G)$ порядка $|G_5|\cdot|R_h|$, где $R_h \ntriangleleft R = G_5R_h$, h – простое число из $\pi(G)$. По [4, следствие 5.6 (1)] либо $G_2(R)$ разрешимая группа, либо не $cf(L_2(7))$-свободна. Но тогда в группе $G_2(R)$ нет секции, изоморфной $L_2(5)$. Поэтому все собственные подгруппы группы G разрешимы, т. е. X – не собственная подгруппа в G. Поэтому $G = X$, и по лемме 1 $G \cong L_2(7)$.

Пусть теперь $p \notin \sigma$ или $G = {}^2G_2(3^{2m+1})$. Если $G = {}^2G_2(3^{2m+1})$ или $p \notin \sigma$, то $G_2{}' = 1$ по [9, теорема 8.3] и G есть $cf(L_2(7))$-свободная группа. Согласно теореме 2 (3), группа G имеет холлову $\{2,3\}$-подгруппу. По теореме 2 (1) группа G разрешима. Противоречие. Если $G = {}^2B_2(2^{2m+1})$, то $p = 2$, что исключено выше.

(2). $G \in \{A_n \,/\, n \geq 5\}$. Предположим, что $G \cong A_n$, $n \geq 5$. Тогда по условию подгруппа $X = G_2T$, где $T \in SB(G)$ и $G_5 = T_5$, существует. X разрешима по лемме 2. По [9, табл. 2] в G холловых

{2,5}-подгрупп нет, в то время как в разрешимой (по следствию) группе X холлова {2,5}-подгруппа существует. Противоречие.

(3). $G \in$ Spor. Предположим, что 11 делит $|G|$. Согласно [12, 5.3], $G \notin \{J_2, J_3, He, Ru, Th\}$. По условию и [9, табл. 4] G_2T существует, где $T \in SB(G)$ и $T_{11} \cong G_{11}$. Согласно лемме 2, G_2T – разрешимая группа. Тогда в этой группе есть холлова {2,11}-подгруппа $G_2T_{11} \cong G_2G_{11}$, что невозможно по [9, табл. 4]. Заменив в предыдущих рассуждениях 11 на 13, если $G = Ru, Th$, или 11 на 7, если $G = J_2$, 11 на 17, если $G = J_3$, He (см. [12, 5.3]), получим существование в этих группах холловых {2,13}-, {2,7}- или {2,17}-подгрупп. Но по [9, табл. 4] в этих группах таких холловых подгрупп нет. Противоречие. Теорема доказана.

Из леммы 5 и [5, теорема 1.42] легко вытекает следующая

Т е о р е м а 4. *Пусть G – конечная простая группа, H – ее нильпотентная холлова подгруппа бипримарного индекса. Тогда имеет место только одна из следующих возможностей*:

(1) $G \cong L_2(q),\ q = 2^{2^i},\ H \cong Z_{q-1},\ |G:H| = q(q+1),\ q+1$ – *простое число Ферма*;

(2) $G \cong L_2(q),\ q = 2^f,\ H \cong Z_{q+1},\ |G:H| = q(q-1),\ q-1$ – *простое число Мерсенна*;

(3) $|\pi(G)| = 3$.

Из множества не p-нильпотентных бипримарных подгрупп не p-разрешимой группы G, $p > 2$, можно выделить более узкий класс таких подгрупп, которые являются p-замкнутыми для $p > 3$ и для $p = 3$ при условии, что G является $cf(X^*)$-свободной (см. определение 3).

Заметим также, что если группа p-разрешима, то G_p перестановочна с некоторыми силовскими p'-подгруппами G_s для всех $s \in \pi(G)$ [10, теорема 4.3.1]. В частности, $G_2G_p = G_pG_2$.

Т е о р е м а 5 [13]. *Пусть $p \neq 2$ – простое число. Если $p = 3$, то пусть группа G $cf(X^*)$-свободна* (*см. определение* 3). *Пусть $p \in \pi(G)$, $P = G_p$. Тогда*

(1) *если $N_G(P) = P$, то G – разрешимая группа*;

(2) *если $N_G(P)$ есть p-нильпотентная группа, то группа $G/O_{p'}(G)$ разрешима*.

Л е м м а 6. *Пусть $p > 2$, G – не p-разрешимая группа и для $p = 3$ $cf(X^*)$-свободная группа* (*см. определение* 3), *тогда в G существует бипримарная p-замкнутая не p-нильпотентная подгруппа порядка $|G_p|\cdot s^n$, $p \neq s$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $N = N_G(G_p)$. Если $s \in \pi(N)$ и $N_s \ntriangleleft N$, то N_pN_s – искомая подгруппа. Если же $N_s \triangleleft N$ для всех $s \in \pi(N)$, то группа N имеет нормальное p-дополнение. Но тогда, согласно теореме 5, G есть p-разрешимая группа. Это противоречит условию. Лемма доказана.

Т е о р е м а 6. *Пусть в конечной группе G силовская 2-подгруппа G_2 перестановочна с подгруппами из множества $SB(G)^*$* (*определение* 3, лемма 6) *и если $3 \in \sigma$, то пусть группа G не имеет композиционных факторов типа $L_2(3^f)$, $f = 3^a$, $a \geq 1$. Тогда G может иметь простые неабелевы композиционные факторы, изоморфные только группе $L_2(7)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если G – простая группа, то утверждение следует из теоремы 3, так как подгруппы из множества $SB(G)^*$ не p-нильпотентны. Если $S_\sigma(G)^* = \varnothing$, то группа G разрешимая по определению 1 и теореме 1.

Пусть $T \in S_\sigma(G)^*$, $T = T_sT_r = G_sT_r$, $Y = G_2T$. Пусть $1 \neq M \triangleleft G$. Пусть $M \cap Y = X = M_2M_sX_r$. Если $X_r = 1$, то $M \in E_{\{2,s\}}$. Если $X_r \neq 1$ и $X_r \ntriangleleft M_sX_r$, то $X_rM_s \in S_\sigma(M)^*$. Если $X_r \triangleleft M_sX_r$, то $M_2(M_s \times X_r)$ – разрешимая группа как произведение нильпотентных групп. Тогда опять $M \in E_{\{2,s\}}$ [10, теорема 4.3.1]. Таким образом, группа M удовлетворяет условию. Аналогично показывается, что в группе $G/M = \overline{G}$ выполняются условия теоремы. Поэтому применение индукции к группам $\overline{G}$ и M дает результат. Теорема доказана.

Список использованных источников

1. Тютянов, В. Н. О гипотезе Холла / В. Н. Тютянов // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 7. – С. 1181–1191.

2. Беркович, Я. Г. Существование ненильпотентных разрешимых подгрупп у конечной неразрешимой группы / Я. Г. Беркович // Сиб. мат. журн. – 1966. – Т. 7, № 1. – С. 206–211.

3. Башун, С. Ю. О перестановочности подгрупп в конечных группах / С. Ю. Башун, А. В. Капусто, Э. М. Пальчик // Вестн. Полоц. гос. у-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2006. – № 4. – С. 7–11.

4. Arad, Z. On finite factorizable groups / Z. Arad, E. Fisman // J. Algebra. – 1984. – Vol. 86, № 2. – P. 522−548. https://doi.org/10.1016/0021-8693(84)90046-2

5. Горенстейн, Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – М.: Мир, 1985. – 352 с.

6. Huppert, B. Simple groups of order divisible by at most four primes / B. Huppert, W. Lempken // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2000. – № 3 (16). – С. 64−75.

7. Башун, С. Ю. Конечные простые группы, факторизуемые *p*-разрешимой и бипримарной подгруппами / С. Ю. Башун, Э. М. Пальчик // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: XIII Междунар. конф., посвящ. 80-летию со дня рождения проф. С. С. Рышкова. – Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2015. – С. 57−59.

8. Li, C. H. On permutation groups of degree a product of two prime-powers / C. H. Li, X. Li // Commun. Algebra. – 2014. – Vol. 42, № 11. – P. 4722−4743. https://doi.org/10.1080/00927872.2013.823500

9. Вдовин, Е. П. Теоремы силовского типа / Е. П. Вдовин, Д. О. Ревин // Успехи мат. наук. – 2011. – Т. 66, вып. 5 (401). – С. 3−46. https://doi.org/10.4213/rm9440

10. Чунихин, С. А. Подгруппы конечных групп / С. А. Чунихин. – Минск: Наука и техника, 1964. –154 с.

11. Huppert, B. Finite groups I / Huppert B. – Berlin: Springer, 1982. – 793 p.

12. Gorenstein, D. The Classification of the finite simple groups. Pt. I, Chapter A: Almost Simple K-Groups / D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon. – American Mathematical Society, 1997. – 419 p.

13. Guralnik, R. Self-normalizing Sylow subgroups / R. Guralnik, G. Malle, G. Navarro // Proc. Am. Math. Soc. – 2004. – Vol. 132, № 4. – P. 973−979.

References

1. Tyutyanov V. N. About the Hall's hypothesis. *Ukrainskii matematicheskii zhurnal = Ukranian Mathematical Journal*, 2002, vol. 54, no. 7, pp. 1181–1191 (in Russian).

2. Berkovich Ya. G. The existing of nonnilpotent solvable subgroups of a finite unsolvable group]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal = Siberian Mathematical Journal*, 1966, vol. 7, no. 1, pp. 206–211 (in Russian).

3. Bashun S. Y., Kapusto A. V., Palchik E. M. About permutability subgroups in finite groups. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya S: Fundamental'nye nauki = Vestnik of Polotsk State University. Part C. Fundamental Sciences*, 2006, no. 4, pp. 7−11 (in Russian).

4. Arad Z., Fishman E. On finite factorizable groups. *Journal of Algebra*, 1984, vol. 86, no. 2, pp. 522–548. https://doi.org/10.1016/0021-8693(84)90046-2

5. Gorenstein D. *Finite Simple Groups. An Introduction to Their Classification*. N. Y., Plenum Press, 1982. 333 p.

6. Huppert B., Lempken W. Simple groups of order divisible by at most four primes. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta imeni F. Skoriny = Proceedings of the Francisk Scorina Gomel State University*, 2000, no. 3 (16), pp. 64 –75 (in Russian).

7. Bashun S. Y., Palchik E. M. Finite simple groups, factorized by p-solvable and biprimary sobgroups. *Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennye problemy i prilozheniya, XIII Mezhdunarodnaya konferentsiya posvyashchennaya 80-letiyu so dnya rozhdeniya professora Sergeya Sergeevicha Ryshkova* [Algebra, the theory of numbers and descrete geometry: modern problemsand applications, XIII International conference dedicated to the 80th anniversary of the birth of Professor Sergey Sergeevich Ryshkov]. Tula, Publishing house of L. N. Tolstoy Tula State Pedagogical University, 2015, pp. 57–59 (in Russian).

8. Li C.H., Li X. On permutation groups of degree a product of two prime-powers. *Communications in Algebra*, 2014, vol. 42, no. 11, pp. 4722–4743. https://doi.org/10.1080/00927872.2013.823500

9. Vdovin E. P., Revin D. O. Theorems of Sylow type. *Russian Mathematical Surveys*, 2011, vol. 66, no. 5, pp. 829–870. https://dx.doi.org/10.1070/RM2011v066n05ABEH004762

10. Chunikhin S. A. *Subgroups of Finite Groups*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1964. 154 p. (in Russian).

11 Huppert B. *Finite groups I*. Berlin, Springer, 1982. 793 p.

12. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. Gorenstein D. *The Classification of the finite simple groups. Part I, Chapter A: Almost Simple K-Groups*. American Mathematical Society, 1997. 419 p

13. Guralnik R., Malle G., Navarro G. Self-normalizing Sylow subgroups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2004, vol. 132, no. 4, pp. 973–979..

Информация об авторе

Башун Светлана Юрьевна – старший преподаватель кафедры высшей математики, Полоцкий государственный университет (ул. Блохина, 29, 211440, г. Новополоцк, Витебская обл., Республика Беларусь). E-mail: bashunsviat@mail.ru

Information about the author

Svetlana Y. Bashun – Senior Lecturer of Higher Mathematics Department, Polotsk State University (29, Blokhin Str., 211440, Novopolotsk, Vitebsk region, Republic of Belarus). E-mail: bashunsviat@mail.ru