ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.444
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-468-479

Поступила в редакцию 24.06.2018
Received 24.06.2018

И. С. Ковалёва

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАРКОВА – СТИЛТЬЕСА МЕР И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Аннотация. В предшествующих работах А. Р. Миротина и автора статьи исследовались свойства преобразования Маркова – Стилтьеса функций в пространствах Харди и Лебега. Данная работа посвящена изучению преобразования Маркова – Стилтьеса мер с точки зрения теории функций и теории интегральных преобразований. Доказана голоморфность данного преобразования в комплексной области с разрезом вдоль луча $[1,+\infty)$, теорема единственности. Установлены необходимые и достаточные условия, при которых функции могут быть представлены в виде преобразований Маркова – Стилтьеса положительных и знакопеременных мер. Доказаны формула обращения и теорема непрерывности. Исследованы предельные значения преобразования Маркова – Стилтьеса мер на границе области, в частности, установлены аналоги формул Сохоцкого – Племеля. Кроме того, изучаются граничные значения преобразования Маркова – Стилтьеса меры μ, точнее, как эти граничные значения отражают свойства меры μ. Указаны приложения полученных результатов к теории самосопряженных операторов: получен ряд утверждений о граничном поведении резольвенты без использования спектральной теоремы. Установленные результаты могут также найти применение в теории обработки сигналов.

Ключевые слова: интегральное преобразование, функция Маркова – Стилтьеса, мера, формула обращения, теорема непрерывности, граничное поведение, самосопрженный оператор

Для цитирования. Ковалёва, И. С. Преобразование Маркова – Стилтьеса мер и некоторые его приложения / И. С. Ковалёва // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 468–479. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-468-479

I. S. Kovalyova

Francisk Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

MARKOV – STIELTJES TRANSFORMATION OF MEASURES AND SOME OF ITS APPLICATIONS

Abstract. The paper is devoted to the study of the properties of the Markov – Stieltjes transformation of measures. In the works of J. Anderson, A. A. Pekarsky, N. S. Vyacheslavov, E. P. Mochalina et al., the functions of Markov – Stieltjes type were studied from the point of view of the approximation theory. In the works of A.R. Mirotin and the author, the Markov – Stieltjes transform of functions was studied as an operator in Hardy and Lebesgue spaces. In this paper, the general properties of the Markov – Stieltjes transform of measures are studied, the theorem of analyticity and the uniqueness theorem are proved, the Markov – Stieltjes transformations of positive and complex measures are described, the inversion formula and the continuity theorem are established, the boundary behavior of the given transformation is investigated. In particular, the analogues of the Sokhotsky – Plemelya formulas are established. Applications to the theory of self-conjugate operators are given. In addition, the results obtained can find use in the theory of functions and integral operators, as well as in the theory of information transfer, in particular, in the theory of signal processing.

Keywords: integral transform, Markov – Stieltjes function, measure, inversion formula, continuity theorem, boundary behavior, self-conjugate operator

For citation. Kovalyova I. S. Markov – Stieltjes transformation of measures and some of its applications. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 468–479 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-468-479

Введение. Ниже через $M^b([0,1],C)$ $\left(M^b([0,1],R)\right)$ будет обозначаться пространство всех ограниченных комплексных (вещественных) мер на $[0,1]$, а через $M_+^b([0,1])$ – его подпространство, состоящее из положительных мер. Функция распределения меры μ обозначается $\mu(t)$.

Определение 1 [1, гл. 6]. *Преобразованием Маркова – Стилтьеса меры* $\mu \in M^b([0,1],C)$ называется функция, задаваемая при $z \in C\setminus[1,+\infty)$ соотношением

$$S\mu(z)=\int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-tz}. \tag{1}$$

При $z \in [1,+\infty)$ интеграл в правой части (1) понимается как предел

$$S\mu(z)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{[0,1]\cap\{|t-1/z|>\varepsilon\}} \frac{d\mu(t)}{1-tz}. \tag{1′}$$

Теорема 1. *Преобразование Маркова – Стилтьеса меры* $\mu \in M^b([0,1],C)$ *голоморфно в области* $C\setminus[1,+\infty)$, *а также существует п.в. на луче* $[1,+\infty)$.

Доказательство. Первое утверждение следует из законности дифференцирования по параметру под знаком интеграла в (1). Для доказательства второго утверждения заметим, что

$$S\mu(z)=\int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-tz}=\frac{1}{z}\int_0^1 \frac{d\mu(t)}{z^{-1}-t}=\frac{\pi}{z}H\mu_1\left(\frac{1}{z}\right),$$

где $H\mu_1$ – преобразование Гильберта меры μ_1, имеющей функцию распределения

$$\mu_1(t):=\begin{cases}\mu(t), t\in(0,1),\\ 0, t\notin(0,1).\end{cases}$$

Применение теоремы Люмиса о преобразовании Гильберта (см., напр., [2, с. 239]) завершает доказательство теоремы.

Следующий пример при $\alpha = 1/2$ показывает, что утверждение о голоморфности в теореме 1 нельзя усилить (в том смысле, что $C\setminus[1,+\infty)$ есть область голоморфности рассматриваемого в нем преобразования Маркова – Стилтьеса).

Пример. Пусть $d\mu_\alpha(t)=t^{\alpha-1}/(1-t)^\alpha dt$ $(0<\mathrm{Re}\alpha<1)$. Имеем при $z \neq 1$ (см. [3, с. 242])

$$S\mu_\alpha(z)=\begin{cases}\left(\pi\sin^{-1}\alpha\pi\right)(1-z)^{-\alpha},\ z\in C\setminus[1,+\infty),\\ (\pi\operatorname{ctg}\alpha\pi)(z-1)^{-\alpha},\ z\in(1,+\infty).\end{cases}$$

В частности, $S\mu_{1/2}(z)=0$ при всех $z\in(1,+\infty)$.

Теорема 2 (единственности). *Пусть множество* $E\subseteq C\setminus[1,+\infty)$ *имеет предельную точку в* $C\setminus[1,+\infty)$, $\mu\in M^b([0,1],C)$. *Если* $S\mu(z)=0$ *для любого* $z \in E$, *то* $\mu = 0$.

Доказательство. В силу предыдущей теоремы $S\mu(z)=0$ при $z\in C\setminus[1,+\infty)$. Разлагая ядро оператора в сумму бесконечной геометрической прогрессии и применяя теорему Лебега, имеем

$$S\mu(z)=\int_0^1\frac{d\mu(t)}{1-tz}=\int_0^1\sum_{n=0}^\infty t^n z^n d\mu(t)=\sum_{n=0}^\infty z^n\int_0^1 t^n d\mu(t)=0 \quad (|z|<1).$$

Следовательно, $\int_0^1 t^n d\mu(t)=0$ для любого $n \geq 0$, а потому (см., напр., [4, теорема 6.1]) $\mu = 0$.

1. Теорема непрерывности. Напомним, что последовательность мер (μ_n) из пространства $M^b([0,1])$ (сопряженного пространству $C[0,1]$) называется **-слабо сходящейся к мере* $\mu\in M^b([0,1])$, если $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x(t)d\mu_n(t)=\int_0^1 x(t)d\mu(t)$ для каждой точки $x\in C[0,1]$.

Т е о р е м а 3. *Справедливы следующие утверждения.*

1) *Если последовательность мер* $(\mu_n) \in M^b([0,1])$ *сходится *-слабо к мере* μ, *то* $S\mu_n(z) \to S\mu(z)$ *для всех* $z \in C \setminus [1,+\infty)$.

2) *Пусть множество* $E \subset (0,1)$ *имеет предельную точку, отличную от* 1. *Если для* $\mu_n \in M_+^b([0,1])$ *последовательность* $S\mu_n(z)$ *сходится к F(z) при z ∈ E, то последовательность* (μ_n) *сходится *-слабо к мере* $\mu \in M_+^b([0,1])$ *и* $S\mu(z) = F(z)$ *для всех z ∈ E.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $\mu_n \to \mu$ *-слабо. В силу непрерывности подынтегральной функции при каждом $z \in C \setminus [1,+\infty)$, первое утверждение теоремы следует сразу из определения.

2) Зафиксируем $x_0 \in E$. Так как $S\mu_n(x_0) \to F(x_0)$, то последовательность $S\mu_n(x_0)$ ограничена, т. е. существует такое положительное a, что $S\mu_n(x_0) < a$ при всех n. С другой стороны,

$$S\mu_n(x_0) = \int_0^1 \frac{d\mu_n(t)}{1 - tx_0} > \int_0^1 d\mu_n(t) = \mu_n([0,1]) = \|\mu_n\|.$$

Следовательно, $\|\mu_n\| < a$, т. е. последовательность мер (μ_n) ограничена по норме. По теореме Банаха – Алаоглу существует подпоследовательность (μ_{n_k}), сходящаяся *-слабо к некоторой мере $\mu \in M_+^b([0,1])$. Согласно пункту 1) теоремы, $S\mu_{n_k}(z) \to S\mu(z)$ для всех $z \in E$.

Рассмотрим произвольную подпоследовательность (μ'_{n_k}) последовательности (μ_n), сходящуюся *-слабо к некоторой мере $\mu' \in M_+^b([0,1])$. Снова применяя пункт 1), имеем $S\mu'_{n_k}(z) \to S\mu'(z)$. Но по условию теоремы $S\mu'_{n_k}(z) \to F(z)$. Следовательно, $S\mu'(z) = F(z) = S\mu(z)$ на множестве E и по теореме единственности $\mu = \mu'$. А поскольку все *-слабо сходящиеся подпоследовательности последовательности (μ_n) *-слабо сходятся к мере μ, то и вся последовательность (μ_n) *-слабо сходится к этой же мере.

2. Описание преобразований Маркова – Стилтьеса мер. Следующие теоремы описывают функции, представимые в виде (1), для комплексных и положительных мер.

Т е о р е м а 4. *Для функции F(z) следующие утверждения равносильны.*

1) *Функция F(z) аналитична в единичном круге D,* $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, *и существует константа* $c > 0$ *такая, что для любых комплексных чисел* λ_i *и любого натурального m*

$$\left|\sum_{k=0}^{m} \lambda_k a_k\right| \le c \max\left\{\left|\sum_{k=0}^{m} \lambda_k t^k\right| : t \in [0,1]\right\}. \tag{2}$$

2) *Существует мера* $\mu \in M^b([0,1], C)$ *такая, что* $\|\mu\| \le c$ *и* $F = S\mu$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала, что из 2) следует 1). Пусть $F = S\mu$. Разлагая подынтегральную функцию в ряд и применяя теорему Лебега о почленном интегрировании, имеем

$$F(z) = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1 - tz} = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n z^n\right) d\mu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

где $a_n = \int_0^1 t^n d\mu(t)$. Поэтому

$$\left|\sum_{k=0}^{m} \lambda_k a_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{m} \lambda_k \int_0^1 t^k d\mu(t)\right| = \left|\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{m} \lambda_k t^k\right) d\mu(t)\right| \le \|\mu\| \max\left\{\left|\sum_{k=0}^{m} \lambda_k t^k\right| : t \in [0,1]\right\} \le c \max\left\{\left|\sum_{k=0}^{m} \lambda_k t^k\right| : t \in [0,1]\right\}.$$

Покажем теперь, что из 1) следует 2). Для произвольного полинома $p(t) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k t^k$ положим $\Lambda(p) := \sum_{k=0}^{m} \lambda_k a_k$. Очевидно, Λ – линейный ограниченный функционал на пространстве всех полиномов в метрике $C[0,1]$ и $\|\Lambda\| \le c.$ Применяя теорему Хана – Банаха, продолжим его на $C[0,1]$ с сохранением нормы. По теореме Ф. Рисса об общем виде функционалов в $C[0,1]$ существует мера $\mu \in M^b([0,1])$ такая, что $\Lambda(x) = \int_{[0,1]} x(t)d\mu(t)$, причем $\|\mu\| = \|\Lambda\| \le c.$ При этом $a_k = \Lambda\left(t^k\right) = \int_0^1 t^k d\mu(t).$

Таким образом,

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^1 t^k d\mu(t)\right) z^k = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k z^k\right) d\mu(t) = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-tz} = S\mu(z),$$

что и завершает доказательство теоремы.

С л е д с т в и е 1. *Пусть* $F_n = S\mu_n$, $\mu_n \in M^b([0,1],C)$, *и* $\|\mu_n\| \le c$ *при всех* $n \in N$. *Если для некоторой функции F имеем* $F_n(z) \to F(z)$ $(n \to \infty)$ *в некоторой r-окрестности нуля U,* $0 < r < 1$, *то существует такая (ограниченная комплексная) мера* μ, *что* $\|\mu\| \le c$, *и* $F = S\mu$. *Если дополнительно известно, что* $\mu_n \ge 0$, *то* (μ_n) *сходится *-слабо к мере* μ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Последовательность F_n равномерно ограничена в U, так как при $(z \in U)$

$$|F_n(z)| = \left|\int_0^1 \frac{d\mu_n(t)}{1-tz}\right| \le \int_0^1 \frac{1}{|1-tz|} d\,|\mu_n(t)| \le \frac{1}{\min\limits_{0\le t\le 1}|1-tz|}\|\mu_n\| \le \frac{c}{1-r}.$$

По теореме Витали последовательность F_n равномерно сходится к F в U и, согласно теореме Вейерштрасса о почленном дифференцировании, для любого $k \in N$ $F_n^{(k)}(z)$ сходится равномерно к $F^{(k)}(z)$ $(n \to \infty)$ в этой области. Рассмотрим тейлоровские разложения $z \in U$

$$F_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} z^k,\; a_k^{(n)} = \frac{F_n^{(k)}(0)}{k!}$$

и

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,\; a_k = \frac{F^{(k)}(0)}{k!}.$$

Согласно теореме 4, для любого многочлена $p(t) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k t^k$ справедливо неравенство $\left|\sum_{k=0}^{m} \lambda_k a_k^{(n)}\right| \le c \max\limits_{0\le t\le 1} |p(t)|$, а поскольку $F_n^{(k)}(0) \to F^{(k)}(0)$, то $a_k^{(n)} \to a_k$ $(n \to \infty)$, и потому $\left|\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k\right| \le c \max\limits_{0\le t\le 1} |p(t)|$. Следовательно, по теореме 4 существует такая мера μ, что $F = S\mu$ и $\|\mu\| \le c$. Утверждение о *-слабой сходимости следует из теоремы непрерывности.

Т е о р е м а 5. *Функция F имеет вид* $S\mu$ *для некоторой меры* $\mu \in M_+^b([0,1])$, *если и только если выполнены следующие два условия:*

1) *F голоморфна в* $C \setminus [1,+\infty)$ *и положительна на интервале* $(-\infty,1)$;

2) *функция* $\zeta F(\zeta)$ *отображает открытую нижнюю полуплоскость в свое замыкание.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Голоморфность F в $C \setminus [1,+\infty)$ была уже отмечена выше. Далее, если $\zeta < 1$, то $1 - t\zeta > 0$ при $t \in [0,1)$, а потому и $F(\zeta) > 0.$ А поскольку $\mathrm{Im}(\zeta/(1-t\zeta)) < 0$ при $\mathrm{Im}\zeta < 0$, $t \in (0,1)$, то $\mathrm{Im}(\zeta F(\zeta)) = \int_0^1 \mathrm{Im}(\zeta/(1-t\zeta))d\mu(t) \le 0.$ Необходимость доказана.

Для доказательства достаточности заметим, что при условиях 1) и 2) функция $(\zeta = 1/z)$ $F_1(z) := -1/z\,F(1/z) = -\zeta F(\zeta)$ голоморфна в верхней полуплоскости и $\mathrm{Im} F_1(z) \ge 0$ при $\mathrm{Im} z > 0.$ Кроме того, из условия 1 следует, что она голоморфна и отрицательна на интервале (0,1) и голоморфна и положительна на интервале $(-\infty,0)$. Таким образом, F_1 принадлежит классу $R[0,1]$ функций типа Маркова (см. [5]), и в силу [5, теорема П.6] $F_1(z) = \int_0^1 d\mu(t)/(t-z)$ для некоторой меры $\mu \in M_+^b([0,1])$, а потому $F(\zeta) = \int_0^1 d\mu(t)/(1-t\zeta) = S\mu(\zeta)$, что и требовалось доказать.

3. Комплексная формула обращения. Формула обращения для преобразования Маркова – Стилтьеса мер может быть выведена из соответствующего результата для преобразования Стилтьеса. Ниже приводится независимое доказательство.

Т е о р е м а 6. *Пусть* μ – *ограниченная комплексная мера,* $\xi \in (0,1)$. *Если* $F = S\mu$, *то*

$$\frac{\mu(\xi-0)+\mu(\xi+0)}{2}-\frac{\mu(+0)+\mu(0)}{2}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\eta\to+0}\int_0^{\xi}\left(\frac{1}{t-i\eta}F\left(\frac{1}{t-i\eta}\right)-\frac{1}{t+i\eta}F\left(\frac{1}{t+i\eta}\right)\right)dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{t-i\eta}F\left(\frac{1}{t-i\eta}\right)-\frac{1}{t+i\eta}F\left(\frac{1}{t+i\eta}\right)\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\eta}{(t-s)^2+\eta^2}d\mu(s).$$

Полагая $\mu(0) = 0$, проинтегрируем полученное выражения по частям

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\eta}{(t-s)^2+\eta^2}d\mu(s)=\frac{\eta}{\pi}\left(\left.\frac{\mu(s)}{(t-s)^2+\eta^2}\right|_0^1-\int_0^1\frac{2\mu(s)(t-s)}{((t-s)^2+\eta^2)^2}ds\right)=\frac{\eta}{\pi}\left(\frac{\mu(1-0)}{(t-1)^2+\eta^2}-\int_0^1\frac{2\mu(s)(t-s)}{((t-s)^2+\eta^2)^2}ds\right).$$

Обозначим

$$I_\eta:=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\xi}\left(\frac{1}{t-i\eta}F\left(\frac{1}{t-i\eta}\right)-\frac{1}{t+i\eta}F\left(\frac{1}{t+i\eta}\right)\right)dt=\frac{\eta}{\pi}\int_0^{\xi}\left(\frac{\mu(1-0)}{(t-1)^2+\eta^2}-\int_0^1\frac{2\mu(s)(t-s)}{((t-s)^2+\eta^2)^2}ds\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\mu(1-0)\left(\operatorname{arctg}\frac{\xi-1}{\eta}+\operatorname{arctg}\frac{1}{\eta}\right)-\int_0^1\frac{\mu(s)\eta ds}{s^2+\eta^2}+\int_0^1\frac{\mu(s)\eta ds}{(s-\xi)^2+\eta^2}\right).$$

Переходя к пределу при $\eta \to +0$ и учитывая, что

$$\lim_{\eta\to+0}\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\mu(s)\eta ds}{s^2+\eta^2}=\frac{\mu(+0)}{2},\quad \lim_{\eta\to+0}\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\mu(s)\eta ds}{(s-\xi)^2+\eta^2}=\frac{\mu(\xi+0)+\mu(\xi-0)}{2}$$

(см., напр., леммы 7.1 и 7.2 из [4, с. 338]), имеем при $\xi \in (0,1)$

$$\lim_{\eta\to+0}I_\eta=\frac{\mu(\xi+0)+\mu(\xi-0)}{2}-\frac{\mu(+0)}{2}.$$

Доказательство завершается заменой $\mu(t)$ на $\mu(t) - \mu(0)$.

С л е д с т в и е 2. *Пусть* $\mu\in M^b([0,1],R)$. *Тогда*

$$\lim_{\eta\to0}\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{-i\eta}^{\xi-i\eta}\frac{1}{s}F(s)ds=\frac{\mu(\xi+0)+\mu(\xi-0)}{2}-\frac{\mu(0+)+\mu(0)}{2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначения $z=t+i\eta$, $G(z)=(t-i\eta)^{-1}F\left((t-i\eta)^{-1}\right)$. Заметим, что если мера μ вещественная, то $\overline{G(z)}=G\left(\overline{z}\right)$ и $G(z)-G\left(\overline{z}\right)=G(z)-\overline{G(z)}=2i\operatorname{Im}\left(G(z)\right)$. Таким образом, правая часть формулы обращения может быть переписана в следующем виде:

$$\lim_{\eta\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\xi}\left(\frac{1}{t-i\eta}F\left(\frac{1}{t-i\eta}\right)-\frac{1}{t+i\eta}F\left(\frac{1}{t+i\eta}\right)\right)dt=$$

$$=\lim_{\eta\to+0}\frac{1}{\pi}\int_0^{\xi}\operatorname{Im}\left(\frac{1}{t-i\eta}F\left(\frac{1}{t-i\eta}\right)\right)dt=\lim_{\eta\to+0}\operatorname{Im}\frac{1}{\pi}\int_{-i\eta}^{\xi-i\eta}\frac{1}{s}F(s)ds=\lim_{\eta\to+0}\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{-i\eta}^{\xi-i\eta}\frac{1}{s}F(s)ds.$$

Отсюда и из теоремы 6 вытекает утверждение следствия.

4. Граничное поведение. В данном разделе рассматриваются предельные значения преобразования Маркова – Стилтьеса на границе области $C\setminus[1,+\infty)$.

Следующая простая теорема описывает поведение преобразования Маркова – Стилтьеса в $-\infty$.

Теорема 7. *Пусть* μ – *положительная мера на* [0,1], $F = S\mu$. *Тогда*

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=\mu(\{0\})$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} xF(x)=-\int_0^1 t^{-1}d\mu(t)$ (*случай* $\int_0^1 t^{-1}d\mu(t)=\infty$ *не исключается*);

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2F'(x)=\int_0^1 t^{-1}d\mu(t)$ (*случай* $\int_0^1 t^{-1}d\mu(t)=\infty$ *не исключается*);

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} xF'(x)/F(x)=-1,$ *если* $\int_0^1 t^{-1}d\mu(t)\neq\infty.$

Рассмотрим функцию $G(x):=\int_0^1 t(1-tx)^{-2}d\mu(t),\ x\in R,$ со значениями в $[0,+\infty]$.

Теорема 8. *Пусть* μ – *положительная мера на* [0,1], $F = S\mu$.

1) $G(1/y)=\infty$ *для* μ-*п.в.* $y\in(0,1]$.

Если $G(x)<\infty$ *при некотором* $x\in[1,+\infty)$, *то*

2) $\int_0^1\dfrac{d\mu(t)}{(1-tx)^2}<\infty,\quad \int_0^1\dfrac{d\mu(t)}{|1-tx|}<\infty$ (*в частности, интеграл* (1) *существует в смысле Лебега*);

3) $\lim\limits_{y\to0}F(x+iy)=F(x)$;

4) $\lim\limits_{y\to0}y^{-1}\mathrm{Im}F(x+iy)=G(x)$;

5) $\lim\limits_{y\to0}(iy)^{-1}(F(x+iy)-F(x))=G(x).$

Доказательство. 1) Пусть $y\neq0$. Тогда $G(1/y)=y^2\int_{-\infty}^{\infty}(y-t)^{-2}d\mu_1(t),$ где

$$\mu_1(t)=\begin{cases}\mu(0),\ t\in(-\infty,0),\\ \mu(t),\ t\in[0,1],\\ \mu(1),\ t\in(1,+\infty).\end{cases}$$

Но известно (см., напр., [6, лемма 3.3]), что последний интеграл равен ∞ для μ_1-п.в. $y\in R$.

2) Сходимость первого интеграла следует из тождества

$$\frac{1}{(1-xt)^2}=1-x^2t\frac{t}{(1-xt)^2}+2x\frac{t}{(1-xt)^2}.$$

Теперь сходимость второго интеграла следует из неравенства $1/|1-xt|\le x/(1-xt)^2$, справедливого при $t\in[0,1]$, $x\in[1,+\infty)$.

3) Заметим, что $\mathrm{Im}\,F(x+iy)=\int_0^1 ty\left((1-tx)^2+t^2y^2\right)^{-1}d\mu(t).$ Поскольку при $y\neq0$

$$\left|ty\left((1-tx)^2+t^2y^2\right)^{-1}\right|\le\frac{1}{2}\frac{1}{|1-tx|},$$

то в силу 2) и теоремы Лебега о мажорированной сходимости $\lim\limits_{y\to0}\mathrm{Im}\,F(x+iy)=0$. Далее,

$$\mathrm{Re}\,F(x+iy)=\int_0^{1/x}+\int_{1/x}^1(1-tx)\left((1-tx)^2+t^2y^2\right)^{-1}d\mu(t).$$

Следовательно, по теореме Леви $\lim\limits_{y\to0}\mathrm{Re}\,F(x+iy)=\int_0^1(1-tx)^{-1}d\mu(t)=F(x)$.

4) Это следует из формулы для $\mathrm{Im}F(x+iy)$ (см. выше) и теоремы Леви.

5) В силу 1) при $y \to 0$

$$\left(iy\right)^{-1}\left(F(x+iy)-F(x)\right)=\int_0^1 \frac{td\mu(t)}{(1-tx)(1-tx-ity)} \to G(x)$$

по теореме Лебега о мажорированной сходимости, так как

$$\left|t(1-tx)^{-1}(1-tx-ity)^{-1}\right| \le t(1-tx)^{-2}.$$

Теорема доказана.

Введем обозначения $S\mu(x \pm i0) := \lim\limits_{y\to+0} S\mu(x \pm iy).$ Следующая теорема устанавливает для преобразования Маркова – Стилтьеса меры аналоги формул Сохоцкого – Племеля.

Т е о р е м а 9. *Пусть* $\mu \in M^b([0,1], R)$. *Если в некоторой точке* $x \in [1,+\infty)$ *существует производная* $d\mu(x^{-1})/dx$, *то существуют пределы* $S\mu(x \pm i0)$, *причем*

$$S\mu(x \pm i0) = S\mu(x) \pm \pi i \mu'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что для любого $y \ne 0$

$$S\mu(x+iy)=\int_0^1 \frac{d\mu(t)}{(1-tx)-ity}=\int_0^1 \frac{1-tx}{(1-tx)^2+t^2y^2}d\mu(t)+i\int_0^1 \frac{ty}{(1-tx)^2+t^2y^2}d\mu(t). \quad (3)$$

Обозначим

$$U(z)=\frac{1}{\pi}\operatorname{Re} S\mu(x+iy)=\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{1-tx}{(1-tx)^2+t^2y^2}d\mu(t), \quad V(z)=\frac{1}{\pi}\operatorname{Im} S\mu(x+iy)=\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{ty}{(1-tx)^2+t^2y^2}d\mu(t).$$

Выполняя замену $s=t^{-1}, d\nu(s)=-t^{-1}d\mu(t),$ имеем

$$U(z)=-\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{x-t^{-1}}{(x-t^{-1})^2+y^2}t^{-1}d\mu(t)=-\frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{x-s}{(x-s)^2+y^2}d\nu(s)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{x-s}{(x-s)^2+y^2}d\nu_1(s),$$

где

$$\nu_1(s)=\begin{cases}\nu(s),\ s\in[1,+\infty),\\ \nu(1),\ s\in(-\infty,1).\end{cases}$$

Полагая $y \to 0$ и применяя известное свойство преобразования Гильберта (см. [7, с. 223]), получим

$$\lim_{y\to0} U(z) = -\lim_{y\to0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{x-s}{(x-s)^2+y^2}d\nu_1(s)=-H\nu_1(x),$$

где $H\nu_1$ – преобразование Гильберта меры ν_1. Выполняя обратную замену, имеем

$$-H\nu_1(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{d\nu_1(s)}{x-s}=-\frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{d\nu(s)}{x-s}=-\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{t^{-1}d\mu(t)}{x-t^{-1}}=\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-tx}=\frac{1}{\pi}S\mu(x).$$

Таким образом, для $U(z)$ окончательно получаем $\lim\limits_{y\to0} U(z)=(1/\pi)S\mu(x).$

Выполнив, как и выше, замену $s=t^{-1},\ d\nu(s)=-t^{-1}d\mu(t),$ для $V(z)$ имеем

$$V(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{y}{(t^{-1}-x)^2+y^2}t^{-1}d\mu(t)=\frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{y}{(s-x)^2+y^2}d\nu(s)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{y}{(s-x)^2+y^2}d\nu_1(s).$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|d\nu_1(s)|}{1+s^2}=\int_1^{\infty}\frac{|d\nu(s)|}{1+s^2}=\int_0^1\frac{|t^{-1}d\mu(t)|}{1+t^{-2}}=\int_0^1\frac{|td\mu(t)|}{1+t^2}<\infty,$$

то, применяя теорему Фату для верхней полуплоскости (см., напр., [8, с. 136]), получим $\lim\limits_{y\to 0}V(z)=\nu_1'(x)=\nu'(x)$. Кроме того, $\dfrac{d\nu(x)}{dx}=\dfrac{-t^{-1}d\mu(t)}{-t^{-2}dt}=t\mu'(t)=(1/x)\mu'\left(1/x\right)$, откуда $\lim\limits_{y\to 0}V(z)=(1/x)\mu'\left(1/x\right)$. Таким образом, $S\mu(x+i0)=S\mu(x)+\pi i(1/x)\mu'\left(1/x\right)$.

Для $S\mu(x-i0)$ доказательство аналогично.

Следствие 3. *При выполнении условий теоремы 9*

$$S\mu(x)=\frac{S\mu(x+i0)+S\mu(x-i0)}{2},\qquad S\mu(x+i0)-S\mu(x-i0)=2\pi i\mu'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}.$$

Введем обозначение

$$d\tilde{\mu}(s)=\begin{cases}-sd\mu(s^{-1}),\ s\in[1,+\infty),\\ 0,\ s\in(-\infty,1).\end{cases}$$

Лемма 1. *Пусть* $\mu\in M^b\left([0,1],C\right)$. *Тогда* $\operatorname{Im}F_{g\mu}(x+iy)=P_{g\tilde{\mu}}(x+iy)$, *где* $P_{g\tilde{\mu}}$ *– интеграл Пуассона,* $dg\tilde{\mu}(s)=g(s^{-1})d\tilde{\mu}(s)$.

Доказательство. Действительно, выполняя замену $s=t^{-1}$, имеем

$$\operatorname{Im}F_{g\mu}(x+iy)=\int_{(0,1]}\frac{ty\,g(t)d\mu(t)}{(1-tx)^2+t^2y^2}=\int_{(0,1]}\frac{y\,t^{-1}g(t)d\mu(t)}{(x-t^{-1})^2+y^2}=\int_{-\infty}^{1}\frac{y}{(x-s)^2+y^2}sg(s^{-1})d\mu(s^{-1})=$$

$$=\int_1^{\infty}\frac{y}{(x-s)^2+y^2}\left(-sg(s^{-1})d\mu(s^{-1})\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-s)^2+y^2}dg\tilde{\mu}(s)=P_{g\tilde{\mu}}(x+iy).$$

Следствие 4. *Для ограниченной комплексной меры* μ *на* $[0,1]$ $\operatorname{Im}F_{\mu}(x+iy)=P_{\tilde{\mu}}(x+iy)$.

Лемма 2. *Пусть* $\mu_1\perp\mu_2$ *для некоторых мер* $\mu_1,\mu_2\in M^b\left([0,1],C\right)$. *Тогда* $\tilde{\mu}_1\perp\tilde{\mu}_2$.

Доказательство. Пусть для непересекающихся множеств $X_1,X_2\subset[0,1]$ имеем $\mu_2(X_1)=0$, $\mu_1(X_2)=0$. Рассмотрим множества $X_i:=\left\{1/x:x\in X_i\setminus\{0\}\right\}\subset[1,+\infty)$. Тогда $\tilde{\mu}_1\left(\tilde{X}_2\right)=0$, так как

$$\tilde{\mu}_1\left(\tilde{X}_2\right)=\int_1^{\infty}\chi_{\tilde{X}_2}(s)d\tilde{\mu}_1(s)=-\int_1^{\infty}\chi_{\tilde{X}_2}(s)sd\mu_1\left(\frac{1}{s}\right)=\int_{[0,1]}\frac{1}{x}\chi_{\tilde{X}_2}\left(\frac{1}{x}\right)d\mu_1(x)=$$

$$=\int_{[0,1]}\frac{1}{x}\chi_{X_2\setminus\{0\}}(x)d\mu_1(x)=\int_{X_2\setminus\{0\}}\frac{1}{x}d\mu_1(x)=0.$$

Аналогично доказывается, что $\tilde{\mu}_2\left(\tilde{X}_1\right)=0$.

Теорема 10. *Пусть для некоторой комплексной меры* ν *и положительной меры* μ *справедливо разложение Радона – Никодима* $\nu=g\mu+\nu_s$. *Тогда*

1)
$$\lim_{y\downarrow 0}\frac{\operatorname{Im}F_{\nu}(x+iy)}{\operatorname{Im}F_{\mu}(x+iy)}=g\left(\frac{1}{x}\right)$$

для μ-п.в. $x\geq 1$.

2) При $\nu\geq 0$. Для ν_s-п.в. $x\in[0,1]$ имеем

$$\lim_{y\downarrow 0}\frac{\operatorname{Im}F_{\nu}(x+iy)}{\operatorname{Im}F_{\mu}(x+iy)}=\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Заметим, что для $x \in [1,+\infty]$

$$d\tilde{\nu}(x) = -xd\nu\left(\frac{1}{x}\right) = -xg\left(\frac{1}{x}\right)d\mu\left(\frac{1}{x}\right) - xd\nu_s\left(\frac{1}{x}\right),$$

откуда $d\tilde{\nu}_a(x) = -xg(1/x)d\mu(1/x) = g(1/x)d\tilde{\mu} \ll d\tilde{\mu}(x),$ а по лемме 2 $d\tilde{\nu}_s(x) \perp d\tilde{\mu}(x).$

Применяя теперь следствие 4 и [6, теорема 3.5], имеем

$$\lim_{y\downarrow 0}\frac{\operatorname{Im} F_\nu(x+iy)}{\operatorname{Im} F_\mu(x+iy)} = \lim_{y\downarrow 0}\frac{P_{\tilde{\nu}}(x+iy)}{P_{\tilde{\mu}}(x+iy)} = \frac{d\tilde{\nu}_a(x)}{d\tilde{\mu}(x)} = g\left(\frac{1}{x}\right).$$

2) Пусть $\nu \geq 0$. Применяя, как и ранее, следствие 4 и утверждение 2 теоремы 3.5 из [6], имеем

$$\lim_{y\downarrow 0}\frac{\operatorname{Im} F_\nu(x+iy)}{\operatorname{Im} F_\mu(x+iy)} = \lim_{y\downarrow 0}\frac{P_{\tilde{\nu}}(x+iy)}{P_{\tilde{\mu}}(x+iy)} = \infty$$

для $\tilde{\nu}_s$-п.в. $x \in [1,+\infty]$, а так как $d\tilde{\nu}_s(x) = -xd\nu_s\left(x^{-1}\right),$ то это равенство верно для ν_s-п.в. $x \in [0,1]$.

Т е о р е м а 11. *Пусть* $A \subset [1,+\infty)$ *– ограниченное борелевское множество. Тогда при* $p \in (0,1)$

$$\lim_{y\downarrow 0}\int_A\left|\frac{\operatorname{Im} F_\nu(x+iy)}{\operatorname{Im} F_\mu(x+iy)}\right|^p d\tilde{\mu}(x) = \int_{A^{-1}}|g(t)|^p\frac{d\mu(t)}{t}.$$

В частности, $\nu \perp \mu$ *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{y\downarrow 0}\int_A\left|\frac{\operatorname{Im} F_\nu(x+iy)}{\operatorname{Im} F_\mu(x+iy)}\right|^p d\tilde{\mu}(x) = 0. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из следствия 4 и [6, теорема 3.6] следует

$$\lim_{y\downarrow 0}\int_A\left|\frac{\operatorname{Im} F_\nu(x+iy)}{\operatorname{Im} F_\mu(x+iy)}\right|^p d\tilde{\mu}(x) = \lim_{y\downarrow 0}\int_A\left|\frac{P_{\tilde{\nu}}(x+iy)}{P_{\tilde{\mu}}(x+iy)}\right|^p d\tilde{\mu}(x) = \int_A\left|g\left(\frac{1}{x}\right)\right|^p d\tilde{\mu}(x) = \int_{A^{-1}}|g(t)|^p\frac{d\mu(t)}{t}.$$

Пусть теперь $\nu \perp \mu$. Тогда $\nu = \nu_s$, т. е. $g(t) = 0$, и потому выполнено (4). Обратно, пусть выполнено (4). Тогда $g(t) = 0$ и $\nu \perp \mu$.

Т е о р е м а 12. *Для любой непрерывной с компактным носителем функции* f *на* R *и положительной меры* ν

$$\lim_{y\downarrow 0}\int_R\frac{f(x)}{\pi}\operatorname{Im} F_\nu(x+iy)dx = \int_0^1\frac{1}{t}f\left(\frac{1}{t}\right)d\nu(t).$$

В частности, если $\operatorname{Im} F_{\nu_1} = \operatorname{Im} F_{\nu_2}$, *то* $\nu_1 = \nu_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь следствием 4 и [6, теорема 3.7], имеем

$$\lim_{y\downarrow 0}\int_R\frac{f(x)}{\pi}\operatorname{Im} F_\nu(x+iy)dx = \lim_{y\downarrow 0}\int_R\frac{f(x)}{\pi}P_{\tilde{\nu}}(x+iy)dx = \int_R f(x)d\tilde{\nu}(x) = -\int_1^\infty xf(x)d\nu\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^1\frac{1}{t}f\left(\frac{1}{t}\right)d\nu(t).$$

Пусть $\operatorname{Im} F_{\nu_1} = \operatorname{Im} F_{\nu_2}$. Тогда по следствию 4 $P_{\tilde{\nu}_1} = P_{\tilde{\nu}_2}$ и согласно [6, теорема 3.7] $\tilde{\nu}_1 = \tilde{\nu}_2$. Отсюда $\nu_1 = \nu_2$, что и завершает доказательство.

Т е о р е м а 13. *Пусть мера* $\nu \geq 0$ *имеет разложение Радона – Никодима* $\nu = gm + \nu_{\text{sing}}$ (m *– мера Лебега*), $A \subset R$ *открыто,* $p > 1$, *и* $\sup\limits_{0<y<1}\int_A\left|\operatorname{Im} F_\nu(x+iy)\right|^p dx < \infty$. *Тогда*

1) $\nu_{\text{sing}}|_{A^{-1}} = 0$;

2) $\int_{A^{-1}} |g(t)|^p \, t^{p-2} dt < \infty$;

3) $\lim\limits_{y\downarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} F_\nu(x+iy) = \frac{1}{x} g\left(\frac{1}{x}\right)$ в $L^p([a,b],dx)$ *для всех* $[a,b] \subset A$.

Доказательство. Поскольку

$$\sup_{0<y<1} \int_A \left|\operatorname{Im} F_\nu(x+iy)\right|^p dx = \sup_{0<y<1} \int_A \left|P_{\tilde{\nu}}(x+iy)\right|^p dx < \infty,$$

то выполнены условия теоремы 3.8 из [6], откуда $\tilde{\nu}_{\text{sing}}|_A = 0$, а так как $d\tilde{\nu}_{\text{sing}}(x) = -x d\nu_{\text{sing}}\left(x^{-1}\right)$, то $\nu_{\text{sing}}|_{A^{-1}} = 0$ и первое утверждение теоремы доказано. Заметим, что

$$d\tilde{\nu}(x) = -x d\nu\left(x^{-1}\right) = -xg\left(x^{-1}\right) d\left(x^{-1}\right) - x d\nu_{\text{sing}}\left(x^{-1}\right) = x^{-1} g\left(x^{-1}\right) dx + d\tilde{\nu}_{\text{sing}}(x).$$

Отсюда и из утверждения 2 теоремы 3.8 из [6] следует, что

$$\int_A \left|\frac{1}{x} g\left(\frac{1}{x}\right)\right|^p dx = -\int_{A^{-1}} \left|g(t)\right|^p t^{p-2} dt < \infty,$$

откуда и вытекает утверждение 2.

Применяя следствие 4 и утверждение 3 из [6, теорема 3.8], для всех $[a,b] \subset A$ имеем

$$\lim_{y\downarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} F_\nu(x+iy) = \lim_{y\downarrow 0} \frac{1}{\pi} P_{\tilde{\nu}}(x+iy) = \frac{1}{x} g\left(\frac{1}{x}\right)$$

в $L^p([a,b],dx)$. Это завершает доказательство теоремы.

Теорема 14. *Мера* $\nu \in M^b([0,1],R)$ *не имеет атомов на* $[\beta,\alpha] \subset (0,1]$, *если и только если*

$$\lim_{y\downarrow 0} y \int_{\beta^{-1}}^{\alpha^{-1}} \left(\operatorname{Im} F_\nu(x+iy)\right)^2 dx = 0.$$

Доказательство. Пусть $a := \beta^{-1}, b := \alpha^{-1}$. Согласно [6, следствие 3.10] знакопеременная мера $\tilde{\nu}$ не имеет атомов на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{y\downarrow 0} y \int_a^b \left(P_{\tilde{\nu}}(x+iy)\right)^2 dx = 0$. По следствию 4 данное утверждение равносильно тому, что мера $\tilde{\nu}$ не имеет атомов на $[a,b]$, если и только если $\lim\limits_{y\downarrow 0} y \int_a^b \left(\operatorname{Im} F_\nu(x+iy)\right)^2 dx = 0$, что эквивалентно условию $\tilde{\nu}(x) = 0$ для всех $x \in [a,b]$, т. е. $\int_{\{x\}} d\tilde{\nu}(t) = -\int_{\{x\}} t d\nu\left(t^{-1}\right) = 0$. Отсюда $\nu\left(\left\{x^{-1}\right\}\right) = 0$ для всех $x \in [a,b]$, и $\nu(\{t\}) = 0$ на $[\beta,\alpha]$.

5. Приложения к теории операторов. Пусть A есть ограниченный самосопряженный оператор в комплексном гильбертовом пространстве H. Если его спектр $\sigma(A)$ содержится в $[m,M]$, то спектр оператора $(M-m)^{-1}(A-mI)$ содержится в $[0,1]$. Поэтому далее будем предполагать, что спектр самого оператора A содержится в $[0,1]$. В этом случае при $z \in C \setminus [1,+\infty)$ существует резольвента (оператор Эйлера) $(I-zA)^{-1}$. Для фиксированного вектора $\varphi \in H$ рассмотрим функцию

$$F_\varphi(z) := \langle (I-zA)^{-1}\varphi, \varphi\rangle \ \left(z \in C \setminus [1,+\infty)\right),$$

где угловые скобки обозначают скалярное произведение в H.

Лемма 3. *Существует такая мера* $\mu_\varphi \in M_+^b([0,1])$, *что* $F_\varphi(z) = S\mu_\varphi(z)$ *при* $z \in C \setminus [1,+\infty)$.

Доказательство. Отметим, что при $z \neq 0$ оператор $(I - zA)^{-1} = z^{-1}\left(z^{-1}I - A\right)^{-1}$ существует, если $z \notin [1,+\infty)$ (тогда $z^{-1} \notin [0,1]$). Покажем, что функция F_φ удовлетворяет условиям теоремы 5.

1а) Поскольку резольвента $R(\zeta, A) := (\zeta I - A)^{-1}$ голоморфна на $\rho(A) \supset C \setminus [0,1]$, то для всех $z \neq 0$ функция $F_\varphi(z) = z^{-1}R\left(z^{-1}, A\right)$ голоморфна на $C \setminus [1,+\infty)$. Голоморфность в точке $z = 0$ следует из разложения $(I - zA)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n A^n$ $\left(|z| < 1/\|A\|\right)$.

1б) Поскольку оператор A – самосопряженный и $\sigma(A) \subset [0,1]$, то $0 \le A \le I$ и $\alpha A < A$ для всех $\alpha < A$. Отсюда $I - \alpha A > I - A \ge 0$, и потому $F_\varphi(\alpha) = \langle (I - \alpha A)^{-1}\varphi, \varphi\rangle > 0$.

2) Функция $\zeta F_\varphi(\zeta) = \langle \left(\zeta^{-1} - A\right)^{-1} \varphi, \varphi\rangle$ отображает открытую нижнюю полуплоскость в свое замыкание. Действительно, пусть $\operatorname{Im} \zeta < 0$. Тогда $\operatorname{Im} z > 0$ для всех $z = \zeta^{-1}$ и, выполняя замену $\psi = (z - A)^{-1}\varphi$, имеем

$$\zeta F_\varphi(\zeta) = \langle \left(z - A\right)^{-1} \varphi, \varphi\rangle = \langle \psi, (z - A)\psi\rangle = \langle \psi, z\psi\rangle - \langle \psi, A\psi\rangle = \overline{z}\langle \psi, \psi\rangle - \langle A\psi, \psi\rangle.$$

Значит, $\operatorname{Im}\left(\zeta F_\varphi(\zeta)\right) = \|\psi\|^2 \operatorname{Im} \overline{z} \le 0$, что и завершает доказательство.

Как известно, поведение резольвенты в окрестности спектра является одной из важнейших характеристик оператора. Результаты раздела 4, примененные к функции F_φ, приводят к следующим утверждениям о граничном поведении оператора Эйлера без использования спектральной теоремы.

Теорема 15. *Пусть для некоторых мер* $\nu, \mu \in M_+^b([0,1])$ *справедливо разложение Радона – Никодима* $\nu = g\mu + \nu_s$. *Тогда* для ν_s*-п.в.* $x \in [0,1]$

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{F_{\varphi,\nu}(x + iy)}{F_{\varphi,\mu}(x + iy)} = \infty.$$

Теорема 16. *Пусть* $A \subset [1,+\infty)$ *– ограниченное борелевское множество,* $p \in (0,1)$. *Тогда* $\nu \perp \mu$, *если и только если*

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_A \left|\frac{F_{\varphi,\nu}(x + iy)}{F_{\varphi,\mu}(x + iy)}\right|^p d\tilde{\mu}(x) = 0.$$

Теорема 17. *Пусть мера* $\nu \in M_+^b([0,1])$ *имеет разложение Радона – Никодима* $\nu = gm + \nu_{\text{sing}}$ *(*m *– мера Лебега), и* $\sup\limits_{0<y<1} \int_A \left|F_\varphi(x + iy)\right|^p dx < \infty$ *для некоторого* $p > 1$. *Тогда* $\nu_{\varphi,\text{sing}}\,|_{A^{-1}} = 0$.

Теорема 18. *Мера* μ_φ*, отвечающая оператору* A*, не имеет атомов на отрезке* $[\beta, \alpha] \subset (0,1]$, *если и только если*

$$\lim_{y \downarrow 0} y \int_{\beta^{-1}}^{\alpha^{-1}} \left(F_\varphi(x + iy)\right)^2 dx = 0.$$

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования Республики Беларусь для студентов и аспирантов, номер госрегистрации 20180641.

Acknowledgements. The work was supported by the grant (State registration number 20180641) from the Ministry of Education of the Republic of Belarus for students and graduate students.

Список использованных источников

1. Миротин, А. Р. Гармонический анализ на абелевых полугруппах / А. Р. Миротин. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. – 207 с.

2. King, F. W. Hilbert transforms: in 2 vol. / F. W. King. – Cambridge University Press, 2009. – Vol. 1. – 858 p. https://doi.org/10.1017/CBO9780511721458

3. Прудников, А. П. Интегралы и ряды: в 3 т. / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2002. – Т. 1: Элементарные функции. – 632 с.

4. Widder, D. V. The Laplace transform / D. V. Widder. – N. J.: Princeton Univ. Press, 1946. – 425 p. https://doi.org/10.1515/9781400876457

5. Крейн, М. Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М. Г. Крейн, А. А. Нудельман. – М.: Наука, 1973. – 552 с.

6. Jaksic, V. Topics in spectral theory / V. Jaksic // Lecture Notes in Mathematics. Open Quantum Systems I. The Hamiltonian Approach. – 2006. – Vol. 1880. – P. 235–312. https://doi.org/10.1007/3-540-33922-1_6

7. Дынькин, Е. М. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики / Е. М. Дынькин, С. В. Кисляков, В. П. Хавин. – М.: ВИНИТИ, 1987. – Т. 15: Коммутативный гармонический анализ-1. – 304 с.

8. Кусис, П. Введение в теорию пространства H^p / П. Кусис; под ред. В. П. Хавина. – М.: Мир, 1984. – 368 с.

References

1. Mirotin A. R. *Harmonic Analysis on Abelian Semigroups*. Gomel, Gomel State University, 2008. 207 p. (in Russian).

2. King F. W. *Hilbert Transforms. Vol. 1*. Cambridge University Press, 2009. 858 p. https://doi.org/10.1017/CBO9780511721458

3. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and Series. Vol. 1: Elementary functions*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002. 632 p. (in Russian).

4. Widder D. V. *The Laplace transform*. N. J., Princeton Univ. Press, 1946. 425 p. https://doi.org/10.1515/9781400876457

5. Kreyn M. G., Nudel'man A. A. *Markov Moments Problem and Extremal Problems*. Moscow, Nauka Publ., 1973. 552 p. (in Russian).

6. Jaksic V. Topics in spectral theory. *Lecture Notes in Mathematics. Open Quantum Systems I. The Hamiltonian Approach*, 2006, vol. 1880, pp. 235–312. https://doi.org/10.1007/3-540-33922-1_6

7. Dyn'kin Ye. M., Kislyakov S. V., Khavin V. P. *The Results of Science and Technology. Modern Problems of Mathematics. Vol. 15: Commutative harmonic analysis-1*. Moscow, All-Russian Institute of Scientific and Technical Information, 1987. 304 p. (in Russian).

8. Koosis P. *Introduction to the H_p Space*. Cambridge University Press, 1998. 290 p. https://doi.org/10.1017/cbo9780511470950.

Информация об авторе

Ковалёва Ирина Сергеевна – аспирант, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины (ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель, Республика Беларусь). E-mail: isida89@list.ru

Information about the author

Irina S. Kovalyova – Postgraduate Student, Francisk Scorina Gomel State University (104, Sovetskaya Str., 246019, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: isida89@list.ru