УДК 512.553.1+512.553.5

Г. Е. ПУНИНСКИЙ

ПРИМЕР КОЛЬЦА ЭНДОМОРФИЗМОВ ПОЛУЦЕПНОГО МОДУЛЯ

Белорусский государственный университет

(*Поступила в редакцию 15.06.2012*)

В настоящей заметке изучаются кольца эндоморфизмов полуцепных модулей. Основные понятия и проблематика этого направления доступно изложена в монографии [1].

Пусть M – правый модуль над кольцом R. Мы скажем, что M – цепной, если его решетка подмодулей является цепью. Эквивалентно, для любых $m, n \in M$ существуют $r, s \in R$ такие, что или $mr = n$, либо $m = ns$. Прямая сумма (произвольного числа) цепных модулей называется полуцепным модулем.

Напомним, что кольцо R называется регулярным (по Нейману), если любой его правый (левый) главный идеал порожден идемпотентом. Через $\mathrm{Jac}(R)$ будем обозначать радикал Джекобсона кольца R. Если M – инъективный модуль и $S = \mathrm{End}(M)$ – кольцо эндоморфизмов M, то (см. [3, теорема 19.27]) $S/\mathrm{Jac}(S)$ – самоинъективное справа регулярное кольцо.

Факкини [1, с. 267, проблема 6] поставил вопрос о том, верно ли это утверждение для (кольца эндоморфизмов) произвольного полуцепного модуля. Цель настоящей заметки – дать отрицательный ответ на этот вопрос: а именно, имеет место следующая

Т е о р е м а. *Существует полуцепной модуль, чье кольцо эндоморфизмов по модулю радикала Джекобсона не самоинъективно ни справа, ни слева, и не регулярно по Нейману.*

Пусть Z_p обозначает локализацию кольца Z целых чисел по простому идеалу pZ. Это кольцо, рассматриваемое как модуль над собой, цепное, поэтому модуль $M = Z_p^{(\omega)}$ (прямая сумма счетного числа экземпляров кольца) – полуцепной. Каждый элемент M может быть записан как строка длины ω с конечным числом ненулевых элементов из Z_p. Пусть S – кольцо эндоморфизмов модуля M, действующее на нем правым умножением на $\omega\times\omega$ матрицы над Z_p, каждая строка которых содержит только конечное число ненулевых элементов. Например, диагональная матрица $\mathrm{diag}(p, p^2, p^3,\ldots)$ определяет эндоморфизм M, заданный умножением на p^i на i-й координате.

В следующей лемме мы опишем радикал Джекобсона кольца S.

Л е м м а 1. $\mathrm{Jac}(S)$ состоит из матриц из S, чьи элементы лежат в pZ_p, и с конечным числом ненулевых столбцов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что M – свободный Z_p-модуль. Пусть A – матрица из S и пусть A_i обозначает идеал кольца Z_p, порожденный элементами i-го столбца A. Из [2, теорема 2] вытекает, что $A \in \mathrm{Jac}(S)$ если и только если 1) $a_{ij} \in pZ_p$ для любых i, j и 2) последовательность A_i, $i \in \omega$ – исчезающее множество идеалов. Последнее означает, что для любой последовательности $a_1, a_2,\ldots$, где $a_i \in A_{\lambda_i}$ для различных $\lambda_i \in \omega$, выполняется $a_1\cdot\ldots\cdot a_n = 0$ для некоторого n. Поскольку Z_p – область, то последнее условие равносильно тому, что A имеет только конечное число ненулевых столбцов.

Итак, элементы $\mathrm{Jac}(S)$ – это $\omega\times\omega$ матрицы A над pZ_p с конечным числом ненулевых столбцов и такие, что каждая строка A содержит только конечное число ненулевых элементов. Например, матрица $\mathrm{diag}(p, p, \ldots)\in S$ не лежит в $\mathrm{Jac}(S)$.

Из следующей леммы вытекает, что кольцо $\overline{S} = S/\mathrm{Jac}(S)$ не регулярно по Нейману.

Л е м м а 2. Пусть $A = \mathrm{diag}(p, p, \ldots) \in S$ и $\overline{A}$ обозначает образ A в кольце $\overline{S}$. Тогда правый идеал $\overline{A} \cdot \overline{S}$ не порождается идемпотентом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В противном случае, как нетрудно видеть, $\overline{A} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{A}$ для некоторой матрицы $B \in S$ (в этом случае $\overline{E} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ – идемпотент, порождающий правый идеал $\overline{A} \cdot \overline{S}$). Итак, $A - ABA = J \in \mathrm{Jac}(S)$. Сравнивая элементы на месте $n \times n$, получаем $p - p^2 b_{nn} = j_{nn}$, поэтому $j_{nn} \neq 0$. Но тогда $J \notin \mathrm{Jac}(S)$ по лемме 1 – противоречие.

Чтобы завершить доказательство теоремы, осталось проверить, что кольцо S не самоинъективно (ни с одной стороны). На самом деле, мы докажем несколько больше.

Напомним, что правый модуль M над кольцом R называется p-инъективным (т. е. инъективным относительно главных правых идеалов), если любой морфизм $rR \to M,\ r \in R$ продолжается до морфизма (правых R-модулей) $R_R \to M$. Ясно, что это условие эквивалентно следующему. Если $m \in M$ такой, что имеет место включение правых аннуляторов $\mathrm{ann}(r)(R) \subseteq \mathrm{ann}(m)(M)$, то $nr = m$ для некоторого $n \in M$.

Определение p-инъективность для левых R-модулей дается аналогично. Кольцо R называется p-инъективным справа (слева), если R – p-инъективный правый (левый) модуль над собой.

Л е м м а 3. *Кольцо* $\overline{S}$ *не p-инъективно ни справа ни слева.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $r = \mathrm{diag}(p, p^2, p^3, \ldots)$, $m = \mathrm{diag}(p, p, \ldots)$ и пусть $\overline{r}$, $\overline{m}$ обозначают образы этих элементов в $\overline{S}$. Заметим, что правый и левый аннуляторы элементов r и m в S состоят из образов (в $\overline{S}$) всех матриц из S с конечным числом ненулевых столбцов. Действительно, для $\overline{r}$ это немедленно следует из равенств $(rA)_{ij} = p^i a_{ij}$ и $(Ar)_{ij} = p^j a_{ij}$ для $A \in S$. Например, образ (в $\overline{S}$) матрицы, чей первый столбец состоит из единиц, а остальные столбцы – нулевые, принадлежит $\mathrm{rann}(\overline{r})(\overline{S})$, в частности этот аннулятор ненулевой.

Покажем, что кольцо $\overline{S}$ не p-инъективно справа. В противном случае, по определению p-инъективного модуля, существует $n \in \overline{S}$ такой, что $n\overline{r} = \overline{m}$. Следовательно, найдется матрица N над S такая, что $N \cdot \mathrm{diag}(p, p^2, p^3, \ldots) - \mathrm{diag}(p, p, \ldots) = J \in \mathrm{Jac}(S)$. Из этого вытекает, что $n_{kk} p^k - p = j_{kk} \neq 0$ для каждого $k \geq 2$, что противоречит условию $J \in \mathrm{Jac}(S)$ (см. лемму 1).

Доказательство того, что кольцо S не p-инъективно слева, проводится аналогично.

Литература

1. *Facchini A.* Module Theory: Endomorphism Rings and Direct Sum Decompositions in Some Classes of Modules, Progress in Mathematics, Birkhauser, 1998. Vol. 167.
2. *Ware R., Zelmanowitz J.* // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 26. P. 15–20.
3. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории. М., 1979. Т. 2.

G. E. PUNINSKI

ONE EXAMPLE OF THE ENDOMORPHISM RING OF A SERIAL MODULE

Summary

We construct an example of a serial module, whose endomorphism ring modulo by its Jacobson radical is neither von Neumann regular nor one-sided self-injective. This solves a problem posed by Alberto Facchini.