ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.958 Поступила в редакцию 11.01.2019
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-7-21 Received 11.01.2019

В. И. Корзюк[1,2], И. И. Столярчук[2]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА КЛЕЙНА – ГОРДОНА – ФОКА С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ КОСЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Аннотация. Рассматривается смешанная задача для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока в полуполосе с первыми косыми производными в граничных условиях. При ее решении с помощью метода характеристик возникают эквивалентные интегральные уравнения Вольтерры второго рода. Для полученных интегральных уравнений доказано существование единственного решения в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций при заданной гладкости начальных данных. Также показано, что для гладкости решения исходной задачи необходимо и достаточно выполнения условий согласования заданных функций при их достаточной гладкости. Метод характеристик сводится к разбиению всей области решения на подобласти, в каждой из которых строятся решения подзадач с использованием начальных и граничных условий. Полученные решения затем склеиваются в общих точках, порождая условия склейки, которые и являются условиями согласования. Для случая, когда направления косых производных в граничных условиях совпадают с характеристическими направлениями, доказывается усиление требований на гладкость заданных функций. Данный подход позволяет строить как точные, так и приближенные решения. Точные решения могут быть найдены тогда, когда удается разрешить эквивалентные интегральные уравнения Вольтерры. В противном случае можно найти приближенное решение задачи либо в аналитическом, либо в численном виде. При этом при построении приближенного решения существенными оказываются условия согласования, которые необходимо учитывать при использовании численных методов решения задачи.

Ключевые слова: уравнение Клейна – Гордона – Фока, метод характеристик, косые производные, классическое решение, смешанная задача, условия согласования

Для цитирования. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с характеристическими косыми производными в граничных условиях / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 1. – С. 7–21. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-7-21

V. I. Korzyuk[1,2], I. I. Stolyarchuk[2]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
[2]Belarusian State University, Minsk, Belarus

CLASSICAL SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR THE KLEIN – GORDON – FOCK TYPE EQUATION WITH CHARACTERISTIC OBLIQUE DERIVATIVES AT BOUNDARY CONDITIONS

Abstract. The mixed problem for the one-dimensional Klein – Gordon – Fock type equation with oblique derivatives at boundary conditions in the half-strip is considered. The solution of this problem is reduced to solving the second-type Volterra integral equations. Theorems of existence and uniqueness of the solution in the class of twice continuously differentiable functions were proven for these equations when initial functions are smooth enough. It is proven that fulfilling the matching conditions on the given functions is necessary and sufficient for existence of the unique smooth solution, when initial functions are smooth enough. The method of characteristics is used for the problem analysis. This method is reduced to splitting the original definition area into subdomains. The solution of the subproblem can be constructed in each subdomain with the help of the initial and boundary conditions. The obtained solutions are then glued in common points, and the obtained glued conditions are the matching conditions. Intensification of smoothness requirements for source functions is proven when the directions of the oblique derivatives at boundary conditions are matched with the directions of the characteristics. This approach can be used in constructing both the analytical solution, when the solution of the integral equation can be found explicitly, and the approximate solution. Moreover, approximate solutions can be constructed in numerical and analytical form. When a numerical solution is constructed, the matching conditions are significant and need to be considered while developing numerical methods.

Keywords: Klein – Gordon – Fock type equation, method of characteristics, oblique derivatives, classical solution, mixed problem, matching conditions

For citation. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the Klein – Gordon – Fock type equation with characteristic oblique derivatives at boundary conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 7–21 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-7-21

Введение. Уравнение типа Клейна – Гордона – Фока, описывающее динамику релятивистской квантовой системы [1, 2], представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных, относящееся к классу гиперболических уравнений второго порядка.

В данной статье с помощью метода характеристик изучена смешанная задача для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с косыми производными первого порядка в граничных условиях для случая, когда направления косых производных в граничных условиях совпадают с характеристическими. Изучению смешанных задач для гиперболических уравнений с косыми производными в граничных условиях посвящен ряд статей. Так, например, в [3] рассмотрена смешанная задача для уравнения колебания полуограниченной струны, в [4] анализируются задачи для колебания уже ограниченной струны с косыми производными в граничных условиях. Для исследования поставленной задачи использовался метод характеристик, который успешно себя зарекомендовал при изучении, например, смешанных задач для волнового уравнения [5], а также первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока [6]. В [7] рассматривалась смешанная задача для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с косыми производными в граничных условиях, в случае, когда направление косых производных не совпадает с характеристическим.

В настоящей работе получены условия согласования на исходные данные для случая, когда направления косых производных первого порядка совпадает с характеристическим. Для данного случая показывается, что с ростом временного параметра гладкость решения ухудшается. Решение поставленной задачи получено в виде интегральных уравнений Вольтерры второго рода, которые достаточно легко поддаются численному решению. Выводятся необходимые и достаточные условия существования единственного решения в классе $C^{\infty}\left(\overline{Q}\right)$.

1. Постановка задачи. В замыкании $\overline{Q}$ области $Q=\{(t,x)\,|\,t\in(0;T),\ x\in(0;l)\}$ задается гиперболическое дифференциальное уравнение второго порядка

$$Lw=\partial_t^2 w-a^2\partial_x^2 w-\lambda(t,x)w=f(t,x), \tag{1}$$

где $T=\dfrac{(n+1)l}{a}$, $n\in\mathbb{N}\cup 0,$ и для определенности считаем, что $a>0$.

К уравнению (1) присоединяются начальные

$$w(0,x)=\varphi(x), \partial_t w(0,x)=\psi(x),\ x\in[0;l], \tag{2}$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} &B^{(0)}w=r_1^{(0)}(t)\partial_t w(t,0)+r_2^{(0)}(t)\partial_x w(t,0)+r_3^{(0)}(t)w(t,0)=\widetilde{\mu^{(0)}}(t),\ t\in[0;T],\\ &B^{(l)}w=r_1^{(l)}(t)\partial_t w(t,l)+r_2^{(l)}(t)\partial_x w(t,l)+r_3^{(l)}(t)w(t,l)=\widetilde{\mu^{(l)}}(t),\ t\in[0;T]. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $r_2^{(0)}\left(t\right)-ar_1^{(0)}\left(t\right)\equiv 0,\ r_2^{(l)}\left(t\right)+ar_1^{(l)}\left(t\right)\equiv 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{3}\left(r_j^{(m)}(t)\right)^2\neq 0, \forall t\in[0;T],\ m\in\{0,\ l\}.$

Условия (3) называются граничными с косыми производными [3; 4; 8, с. 403].

2. Частное решение неоднородного уравнения. В силу линейности задачи (1)–(3) общее решение w уравнения (1) принадлежит классу $C^2\left(\overline{Q}\right)$, если оно представимо в виде $w(t,x)=v(t,x)+u(t,x)$, где $v(t,x)\in C^2\left(\overline{Q}\right)$ – частное решение неоднородного уравнения, а $u(t,x)\in C^2\left(\overline{Q}\right)$ – общее решение однородного уравнения.

Область Q с помощью прямых линий $t=\dfrac{kl}{a}$ разделим на подобласти $Q^{(k)}$, где $Q^{(k)}=\left\{(t,x)\,|\,t\in\left(\dfrac{kl}{a};\dfrac{(k+1)l}{a}\right),\ x\in(0;l)\right\}$, $k=0,1,2,\ldots,n$. Разбиение области Q на подобласти изображено на рис. 1. Построение частного решения $v(t,x)$ будем осуществлять локально на подмножествах $Q^{(k)}$ области Q.

Далее рассмотрим неоднородное уравнение

$$Lv=\partial_t^2 v-a^2\partial_x^2 v-\lambda(t,x)v=f(t,x) \tag{4}$$

относительно функции $v\in C^2\left(\overline{Q}\right)$ с однородными условиями Коши

$$v(0,x)=0,\partial_t v(0,x)=0,\ x\in[0;l]. \tag{5}$$

Общее решение уравнения (4), определенное на $\overline{Q^{(k)}}$, можно записать в виде [8, 9]

$$v^{(k)}(t,x)=-\frac{1}{4a^2}\int\limits_{-kl}^{x-at}\int\limits_{(k+1)l}^{x+at}(\lambda v^{(k)}+f)\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dzdy+$$
$$+h^{(1,k)}(x-at)+h^{(2,k)}(x+at),\ (t,x)\in\overline{Q^{(k)}}, \tag{6}$$

где $h^{(1,k)}$, $h^{(2,k)}$ – произвольные независимые функции из класса C^{n-k+2}, которые являются решениями однородного волнового уравнения $\partial_t^2 v-a^2\partial_x^2 v=0$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\lambda(t,x),f(t,x)\in C^{n+1}\left(\overline{Q}\right)$, $h^{(1,k)}\in C^{n-k+2}\left([-(k+1)l;-(k-1)l]\right)$, $h^{(2,k)}\in C^{n-k+2}\left([kl;(k+2)l]\right)$, *тогда решение* $v^{(k)}(t,x)$ *уравнения* (6) *существует в классе* $C^{n-k+2}\left(\overline{Q^{(k)}}\right)$

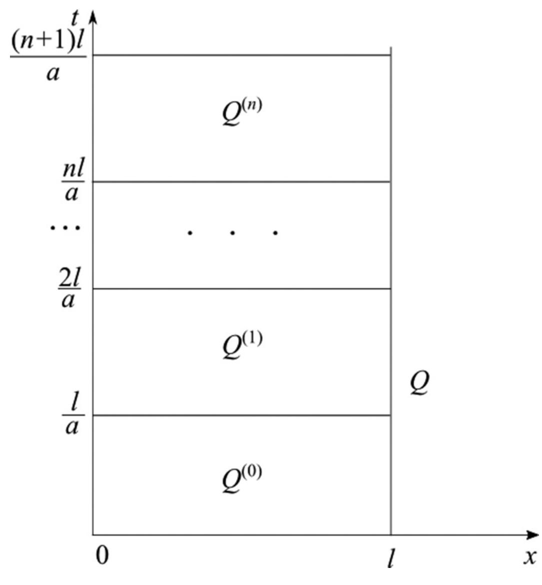

Рис. 1. Область Q

Fig. 1. Domain Q

и может быть найдено с помощью метода последовательных приближений. При этом функция $v(t,x)=v^{(k)}(t,x),(t,x)\in\overline{Q^{(k)}}$ *принадлежит классу* $C^2\left(\overline{Q}\right)$.

Доказательство. За счет выбора функций $h^{(j,k)}$, $j=1,2;\ k=0,1,2,...,n,$ соответствующим образом получим частное решение $v(t,x)$ уравнения (4) из класса $C^2\left(\overline{Q}\right)$, удовлетворяющее условиям (5), где $v(t,x)=v^{(k)}(t,x),\ (t,x)\in\overline{Q^{(k)}}$, $v^{(k)}$ – решение интегрального уравнения (6).

Следствие 1. *Теорема* 1 *справедлива, если в качестве n подставить* ∞. *При этом функция* $v(t,x)=v^{(k)}(t,x),(t,x)\in\overline{Q^{(k)}}$, *принадлежит классу* $C^\infty\left(\overline{Q}\right)$.

Так как задача (1)–(3) линейна, то при выполнении теоремы 1 она сводится к решению задачи для однородного уравнения $Lu=0$, т. е. задачи

$$\partial_t^2 u-a^2\partial_x^2 u-\lambda(t,x)u=0, \tag{7}$$

$$u(0,x)=\varphi(x),\partial_t u(0,x)=\psi(x),\ x\in[0;l], \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&r_1^{(0)}(t)\partial_t u(t,0)+r_2^{(0)}(t)\partial_x u(t,0)+r_3^{(0)}(t)u(t,0)=\mu^{(0)}(t),\ t\in[0;T],\\&r_1^{(l)}(t)\partial_t u(t,l)+r_2^{(l)}(t)\partial_x u(t,l)+r_3^{(l)}(t)u(t,l)=\mu^{(l)}(t),\ t\in[0;T],\end{aligned} \tag{9}$$

где $\mu^{(i)}(t)=\widetilde{\mu^{(i)}}(t)-B^{(i)}v(t,i),\ i\in\{0,l\},$ а v – решение задачи (4)–(5) для неоднородного уравнения.

3. Задача (7)–(9). Уравнение (7) можно записать в каноническом виде. Для этого сделаем замену независимых переменных

$$\xi=x-at,\ \eta=x+at \tag{10}$$

или

$$t=\frac{\eta-\xi}{2a},\quad x=\frac{\eta+\xi}{2}. \tag{11}$$

В результате замены (10) уравнение (7) представимо в виде

$$\partial_{\xi\eta}q-b(\xi,\eta)q=0, \tag{12}$$

где $b(\xi,\eta)=-\lambda(t,x)\dfrac{1}{4a^2}=-\dfrac{1}{4a^2}\lambda\left(\dfrac{\xi-\eta}{2a},\dfrac{\xi+\eta}{2}\right)$.

Область Ω, которая является образом области Q при преобразовании (10), разделим прямыми $\eta=\xi+2kl,\ k=0,1,...,n,$ на подобласти $\Omega^{(k)}$. Подобласть $\Omega^{(k)}$ находится между прямыми $\eta=\xi+2kl$ и $\eta=\xi+2(k+1)l$.

В подобластях $\Omega^{(k)}$ решение $q^{(k)}(\xi,\eta)$ уравнения (12) путем интегрирования представим в виде уравнения Вольтерры

$$q^{(k)}(\xi,\eta)=\int\limits_{-kl}^{\xi}\int\limits_{(k+1)l}^{\eta}b(y,z)q^{(k)}(y,z)dzdy+p^{(k)}(\xi)+g^{(k)}(\eta), \tag{13}$$

где $p^{(k)}$, $g^{(k)}$ – произвольные функции.

В уравнении (13) вернемся к переменным (t,x) с помощью замены (11)

$$u^{(k)}(t,x)=-\frac{1}{4a^2}\int\limits_{-kl}^{x-at}\int\limits_{(k+1)l}^{x+at}(\lambda u^{(k)})\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dzdy+p^{(k)}(x-at)+g^{(k)}(x+at). \tag{14}$$

При замене (11) подобласти $\Omega^{(k)}$ перейдут в подобласти $Q^{(k)}$, которые изображены на рис. 1.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\lambda(t,x)\in C^{m+1}\left(\overline{Q^{(k)}}\right)$, *тогда решение* $u^{(k)}(t,x)$ *уравнения* (14) *существует, единственно, принадлежит классу* $C^{m+2}\left(\overline{Q^{(k)}}\right)$ *и непрерывно зависит от правой части тогда и только тогда, когда функции* $p^{(k)}\in C^{m+2}\left([-(k+1)l;-(k-1)l]\right)$, $g^{(k)}\in C^{m+2}\left([kl;(k+2)l]\right)$, $m\in\mathbb{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству теоремы, приведенному в [9, 10].

С л е д с т в и е 2. *Теорема* 2 *справедлива, если принять* $m=\infty$.

Каждую из областей $Q^{(k)}$ для каждого индекса $k=0,1,2,...,n$ характеристиками $x-at=-kl$, $x+at=(k+1)l$ разделим на четыре подобласти $Q^{(k,j)}$, $j=\overline{1,4}$, следующим образом:

$$Q^{(k,1)}=\{(t,x)\in Q^{(k)}\mid x\in(0;l/2],\ at<x+kl\}\bigcup\{(t,x)\in Q^{(k)}\mid x\in[l/2;l),\ at<-x+(k+1)l\},$$

$$Q^{(k,2)}=\{(t,x)\in Q^{(k)}\mid x\in(0;l/2],\ kl+x<at<-x+(k+1)l\},$$

$$Q^{(k,3)}=\{(t,x)\in Q^{(k)}\mid x\in[l/2;l),-x+(k+1)l<at<kl+x\},$$

$$Q^{(k,4)}=\{(t,x)\in Q^{(k)}\mid x\in(0;l/2],\ at>-x+(k+1)l\}\bigcup\{(t,x)\in Q^{(k)}\mid x\in[l/2;l),\ at>x+kl\}.$$

Подобласти $Q^{(k,j)}$ представлены на рис. 2.

Рассмотрим решение задачи (7)–(9) в каждой из подобластей $\overline{Q^{(k)}}$, используя условия Коши и граничные условия с косыми производными.

Задача Коши. В области $Q^{(k)}$ рассмотрим уравнение (14), удовлетворяющее условиям Коши

$$\begin{aligned} u(t,x)\,|_{t=kl/a}&=\varphi^{(k)}(x),\ x\in[0;l],\\ \partial_t u(t,x)\,|_{t=kl/a}&=\psi^{(k)}(x),\ x\in[0;l]. \end{aligned} \tag{15}$$

Задача Коши (14), (15) решается аналогично случаю с граничными условиями первого рода, который рассмотрен в [6]. Выпишем значения функций $p^{(k)}$ и $g^{(k)}$ в этом случае:

$$p^{(k)}(z)=\frac{1}{2}\left(\varphi^{(k)}(z+kl)-\Psi^{(k)}(z+kl)-C\right)+\int\limits_{(k+1)l}^{z+2kl}\int\limits_{z}^{\eta-2kl}\mathcal{L}u^{(k)}\left(\xi,\eta\right)d\xi d\eta,\ z\in[-kl;-(k-1)l], \tag{16}$$

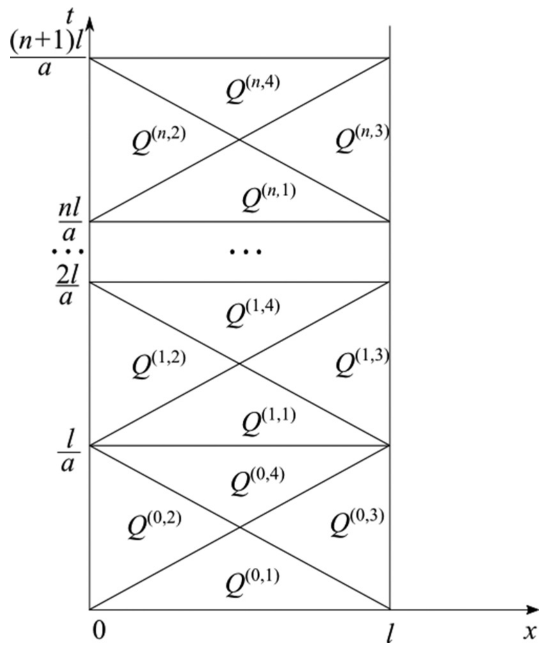

Рис. 2. Разбиение области $Q^{(k)}$ на подобласти $Q^{(k,j)}$, $j=\overline{1,4}$

Fig. 2. Splitting domain $Q^{(k)}$ on the subdomains $Q^{(k,j)}$, $j=\overline{1,4}$

$$g^{(k)}(y)=\frac{1}{2}\left(\varphi^{(k)}(y-kl)+\Psi^{(k)}(y-kl)+C\right)+\int\limits_{(k+1)l}^{y}\int\limits_{\eta-2kl}^{-kl}\mathcal{L}u^{(k)}\left(\xi,\eta\right)d\xi d\eta,\ y\in[kl;(k+1)l], \quad (17)$$

где $\Psi^{(\mathrm{k})}(x)=\dfrac{1}{a}\int\limits_{l}^{x}\psi^{(\mathrm{k})}(\xi)d\xi$ и $\mathcal{L}u^{(k)}(y,z)=-\dfrac{1}{4a^2}(\lambda u^{(k)})\left(\dfrac{z-y}{2a},\dfrac{z+y}{2}\right)$.

Исходя из формул (16), (17), выпишем представление решения задачи (7)–(9) в области $Q^{(k,1)}$:

$$u^{(k)}(t,x)=\int\limits_{x+at-2kl}^{x-at}\int\limits_{y+2kl}^{x+at}\mathcal{L}u^{(k)}\left(\xi,\eta\right)d\eta d\xi+\frac{1}{2}\left(\varphi^{(k)}(x-at+kl)+\varphi^{(k)}(x+at-kl)\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\Psi^{(k)}(x+at-kl)-\Psi^{(k)}(x-at+kl)\right). \quad (18)$$

Из (16) и (17) выразим функции $\varphi^{(k)}(x)$, $\Psi^{(k)}(x)$. Для этого в формуле (16) введем замену $x=z-kl$, а в выражении (17) – замену $x=y+kl$, тогда

$$\varphi^{(k)}(x)=p^{(k)}(x-kl)+g^{(k)}(x+kl)+\int\limits_{(k+1)l}^{x+kl}\int\limits_{-kl}^{x-kl}\mathcal{L}u^{(k)}\left(\xi,\eta\right)d\xi d\eta,$$
$$\Psi^{(k)}(x)=-p^{(k)}(x-kl)+g^{(k)}(x+kl)+\int\limits_{(k+1)l}^{x+kl}\left(\int\limits_{\eta-2kl}^{x-kl}\mathcal{L}u^{(k)}\left(\xi,\eta\right)d\xi+\int\limits_{\eta-2kl}^{-kl}\mathcal{L}u^{(k)}\left(\xi,\eta\right)d\xi\right)d\eta. \quad (19)$$

Установим зависимость гладкости решения задачи (14), (15), определенного по формуле (18), от гладкости функций $\varphi^{(k)}(x)$, $\Psi^{(k)}(x)$.

Л е м м а 1. *Пусть* $\lambda(t,x)\in C^m\left(\overline{Q}\right)$, *тогда функции* $p^{(k)}$ *и* $g^{(k)}$ *будут из класса* C^{m+1} *на множестве своего задания тогда и только тогда, когда* $\varphi^{(k)}(x)$, $\Psi^{(k)}(x)\in C^{m+1}([0;l])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Достаточность.* Рассмотрим систему (16), (17) и уравнение (18). Из уравнения (18) и достаточности теоремы 2 следует, что $u^{(k)}(t,x)\in C^{m+1}\left(\overline{Q^{(k,1)}}\right)$, так как заданные функции $\varphi^{(k)}(x)$, $\Psi^{(k)}(x)\in C^{m+1}([0;l])$. Из формулы (16) и того, что функции $\varphi^{(k)}(x)$, $\Psi^{(k)}(x)\in C^{m+1}([0;l])$, следует, что $p^{(k)}$ принадлежит классу C^{m+1} на множестве своего задания. Аналогично из (17) следует, что $g^{(k)}$ входит в класс C^{m+1} на множестве своего задания.

Необходимость. Рассмотрим систему (19). Поскольку $p^{(k)}$ и $g^{(k)}$ принадлежат классу C^{m+1} на множестве своего задания, то по достаточности теоремы 2 имеем $u^{(k)}(t,x)\in C^{m+1}\left(\overline{Q^{(k,1)}}\right)$. Из представления (18) и необходимости теоремы 2 следует, что $\varphi^{(k)}(x)$, $\Psi^{(k)}(x)\in C^{m+1}([0;l])$.

Условие на левой границе. С помощью первого из условий (9) получаем следующее уравнение для нахождения неизвестной функции $p^{(k)}$ в области $Q^{(k,2)}$:

$$\left(r_2^{(0)}(t)-ar_1^{(0)}(t)\right)\left(\int\limits_{(k+1)l}^{-at}\mathcal{L}u^{(k)}(-at,z)dz+dp^{(k)}(-at)\right)+\left(r_2^{(0)}(t)+ar_1^{(0)}(t)\right)\times$$
$$\times\left(\int\limits_{-kl}^{-at}\mathcal{L}u^{(k)}(y,at)dy+dg^{(k)}(at)\right)+r_3^{(0)}(t)\left(\int\limits_{-kl}^{-at}\int\limits_{(k+1)l}^{at}\mathcal{L}u^{(k)}(y,z)dzdy+p^{(k)}(-at)+\right.$$
$$\left.+\widetilde{g^{(k)}}(at)+\frac{C}{2}\right)=\mu^{(0)}(t), \quad (20)$$

где $\widetilde{g^{(k)}}=g^{(k)}-\dfrac{C}{2}$.

Далее введем в рассмотрение функцию $\theta(z)$, которая определяется по формуле

$$\theta(z) = r_2^{(0)}\left(-\frac{z}{a}\right) - ar_1^{(0)}\left(-\frac{z}{a}\right). \tag{21}$$

В уравнении (20) в левую часть вынесем все слагаемые, содержащие неизвестную функцию $p^{(k)}$. С помощью (21) и замены $-at = z,\ z \in [-(k+1)l; -kl]$ уравнение (20) запишется в виде

$$\theta(z)dp^{(k)}(z) + r_3^{(0)}\left(-\frac{z}{a}\right)p^{(k)}(z) = Z^{(k)}(z) - r_3^{(0)}\left(-\frac{z}{a}\right)\frac{C}{2}, \tag{22}$$

где функция

$$Z^{(k)}(z) = \mu^{(0)}\left(-\frac{z}{a}\right) - \theta(\xi)\int_{(k+1)l}^{-z}\mathcal{L}u^{(k)}(z,\eta)d\eta - \left(r_2^{(0)}\left(-\frac{z}{a}\right) + ar_1^{(0)}\left(-\frac{z}{a}\right)\right)\times$$

$$\times\left(\int_{-kl}^{z}\mathcal{L}u^{(k)}(\xi,-z)d\xi + dg^{(k)}(-z)\right) - r_3^{(0)}\left(-\frac{z}{a}\right)\left(\int_{-kl}^{z}\int_{(k+1)l}^{-z}\mathcal{L}u^{(k)}(\xi,\eta)d\eta d\xi + \widetilde{g^{(k)}}(-z)\right) \tag{23}$$

не содержит ни неизвестной функции $p^{(k)}$, ни свободной постоянной C.

С учетом того, что функция $\theta(\xi) \equiv 0$, уравнение (22) перестает быть дифференциальным и превращается в алгебраическое относительно неизвестной функции $p^{(k)}$:

$$r_3^{(0)}\left(-\frac{z}{a}\right)p^{(k)}(z) = Z^{(k)}(z) - r_3^{(0)}\left(-\frac{z}{a}\right)\frac{C}{2},\ z \in [-(k+1)l; -kl]. \tag{24}$$

Решая (24), получим представление функции $p^{(k)}$ в области $Q^{(k,2)}$:

$$p^{(k)}(z) = \left(\frac{\mu^{(0)}}{r_3^{(0)}}\right)\left(-\frac{z}{a}\right) - 2a\left(\frac{r_1^{(0)}}{r_3^{(0)}}\right)\left(-\frac{z}{a}\right)\left(\int_{-kl}^{z}\mathcal{L}u^{(k)}(\xi,-z)d\xi + dg^{(k)}(-z)\right) -$$

$$-\int_{-kl}^{z}\int_{(k+1)l}^{-z}\mathcal{L}u^{(k)}(\xi,\eta)d\eta d\xi - \frac{C}{2} - \widetilde{g^{(k)}}(-z),\ z \in [-(k+1)l; -kl]. \tag{25}$$

С учетом (25) решение задачи (7)–(9) в области $Q^{(k,2)}$ запишется в виде

$$u^{(k)}(t,x) = \int_{-kl}^{x-at}\int_{-x+at}^{x+at}\mathcal{L}u^{(k)}(\xi,\eta)d\eta d\xi + \left(\frac{\mu^{(0)}}{r_3^{(0)}}\right)\left(-\frac{x-at}{a}\right) - \widetilde{g^{(k)}}(-x+at) + \widetilde{g^{(k)}}(x+at) -$$

$$-2a\left(\frac{r_1^{(0)}}{r_3^{(0)}}\right)\left(-\frac{x-at}{a}\right)\left(\int_{-kl}^{x-at}\mathcal{L}u^{(k)}(\xi,-x+at)d\xi + dg^{(k)}(-x+at)\right),\ (t,x) \in \overline{Q^{(k,2)}}. \tag{26}$$

Для рассматриваемого случая, поскольку $\theta(\xi) \equiv 0$, условия согласования для функции $p^{(k)}$, определенной по формуле (16), и $p^{(k)}$, выраженной формулой (25), в точке $z = -kl$ запишутся в виде

$$\mu^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right) - r_3^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)\varphi^{(k)}(0) - r_1^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)\left(ad\varphi^{(k)}(0) + \psi^{(k)}(0)\right) = 0, \tag{27}$$

$$r_1^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)\left(\frac{1}{a}\lambda\left(\frac{kl}{a},0\right)\varphi^{(k)}(0) + \left(ad^2\varphi^{(k)}(0) + d\psi^{(k)}(0)\right)\right) -$$

$$-\frac{1}{a}r_3^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)\left(\left(d\varphi^{(k)}(0) + \frac{1}{a}\psi^{(k)}(0)\right)\left(d\,\frac{r_1^{(0)}(t)}{r_3^{(0)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a} - \psi^{(k)}(0) + \left(d\,\frac{\mu^{(0)}(t)}{r_3^{(0)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}\right) = 0, \tag{28}$$

$$-ar_1^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)\left(r_3^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)\right)^{-1}\left(\frac{2}{a^2}\partial_t\lambda\left(\frac{kl}{a},0\right)\varphi^{(k)}(0)+\frac{2}{a^2}\lambda\left(\frac{kl}{a},0\right)\psi^{(k)}(0)+d^3\varphi^{(k)}(0)+\frac{1}{a}d^2\psi^{(k)}(0)\right)-$$
$$-d^2\varphi^{(k)}(0)-\frac{1}{a^2}\lambda\left(\frac{kl}{a},0\right)\varphi^{(k)}(0)\left(2\left(d\frac{r_1^{(0)}(t)}{r_3^{(0)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}+1\right)+\frac{1}{a^2}\left(d^2\frac{\mu^{(0)}(t)}{r_3^{(0)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}-$$
$$-2\left(d^2\varphi^{(k)}(0)+\frac{1}{a}d\psi^{(k)}(0)\right)\left(d\frac{r_1^{(0)}(t)}{r_3^{(0)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}-\frac{1}{a}\left(d\varphi^{(k)}(0)+\frac{1}{a}\psi^{(k)}(0)\right)\left(d^2\frac{r_1^{(0)}(t)}{r_3^{(0)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}=0. \quad (29)$$

Л е м м а 2. *Пусть функции* $\varphi^{(k)}\in C^3([0;l])$, $\psi^{(k)}\in C^2([0;l])$, $\mu^{(0)}\in C^2([0;T])$, $r_i^{(0)}\in C^2([0;T])$, $i=\overline{1,3}$, $\lambda(t,x)\in C^2(\overline{Q})$. *Функция* $p^{(k)}$, *определенная по формулам* (16), (25), *принадлежит классу* $C^2([-(k+1)l;-(k-1)l])$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования* (27)–(29).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 1 функция $p^{(k)}$, определенная по формуле (16), будет принадлежать классу $C^2([-kl;-(k-1)l])$ тогда и только тогда, когда $\varphi^{(k)}\in C^2([0;l])$, а $\psi^{(k)}\in C^1([0;l])$. Функция $p^{(k)}$, определенная по формуле (25), принадлежит классу $C^2([-(k+1)l;-kl])$, если на функции $\varphi^{(k)}(x)$, $\psi^{(k)}(x)$ будут налагаться более сильные требования на гладкость. Пусть $\mu^{(0)}\in C^2([0;T])$, $r_i^{(0)}\in C^2([0;T])$, $i=\overline{1,3}$. Рассмотрим выражение (26). Для того чтобы $u^{(k)}(t,x)\in C^2\left(\overline{Q^{(k,2)}}\right)$, необходимо и достаточно, чтобы $dg^{(k)}(z)$ была дважды непрерывно диффренцируемой, а следовательно, функция $g^{(k)}(z)$ была трижды непрерывно диффренцируемой на области своего задания. Для выполнения последнего условия в силу леммы 1 необходимо и достаточно, чтобы $\varphi^{(k)}\in C^3([0;l])$, $\psi^{(k)}\in C^2([0;l])$. Дважды непрерывная дифференцируемость функции $p^{(k)}$ на отрезке $[-(k+1)l;-(k-1)l]$ следует из ее дважды непрерывной дифференцируемости на отрезках $[-(k+1)l;-kl]$ и $[-kl;-(k-1)l]$, а также выполнения условий согласования (27)–(29) в точке $z=-kl$.

З а м е ч а н и е 1. Если выполняется тождество $r_1^{(0)}(t)\equiv r_2^{(0)}(t)\equiv 0$, то требования на функции $\varphi^{(k)}$, $\psi^{(k)}$ и λ в лемме 2 можно ослабить: $\varphi^{(k)}\in C^2([0;l])$, $\psi^{(k)}\in C^1([0;l])$, $\lambda(t,x)\in C^1(\overline{Q})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства достаточно в первое граничное условие (9) подставить $r_1^{(0)}(t)\equiv r_2^{(0)}(t)\equiv 0$, затем разделить полученное выражение на $r_3^{(0)}(t)$, так как $r_3^{(0)}(t)\neq 0$. В итоге получится граничное условие первого рода, задача для которого рассмотрена в [6].

Условие на правой границе. Исследование второго граничного условия из (9) во многом повторяет исследование граничного условия на левой границе.

Из второго условия в (9) получаем следующее уравнение для нахождения неизвестной функции $g^{(k)}$ в области $Q^{(k,3)}$:

$$\left(r_2^{(l)}(t)+ar_1^{(l)}(t)\right)dg^{(k)}(l+at)+r_3^{(l)}(t)g^{(k)}(l+at)=\mu^{(l)}(t)-$$
$$-r_1^{(l)}(t)\left(a\int_{-kl}^{l-at}\mathcal{L}u^{(k)}(y,l+at)dy-a\int_{(k+1)l}^{l+at}\mathcal{L}u^{(k)}(l-at,z)dz-adp^{(k)}(l-at)\right)-$$
$$-r_2^{(l)}(t)\left(\int_{-kl}^{l-at}\mathcal{L}u^{(k)}(y,l+at)dy+\int_{(k+1)l}^{l+at}\mathcal{L}u^{(k)}(l-at,z)dz+dp^{(k)}(l-at)\right)-$$
$$-r_3^{(l)}(t)\left(\int_{-kl}^{l-at}\int_{(k+1)l}^{l+at}\mathcal{L}u^{(k)}(y,z)dzdy+\widetilde{p^{(k)}}(l-at)\right)+r_3^{(l)}(t)\frac{C}{2}, \quad (30)$$

где $\widetilde{p^{(k)}} = p^{(k)} + \frac{C}{2}.$ Введем обозначение

$$\rho(l+at) = r_2^{(l)}(t) + ar_1^{(l)}(t). \tag{31}$$

С помощью (31) и замены $y = l + at,\ y \in [(k+1)l; (k+2)l],$ уравнение (30) запишется в виде

$$\rho(y)dg^{(k)}(y) + r_3^{(l)}\left(\frac{y-l}{a}\right)g^{(k)}(y) = Y^{(k)}(y) + r_3^{(l)}\left(\frac{y-l}{a}\right)\frac{C}{2}, \tag{32}$$

где

$$Y^{(k)}(y) = \mu^{(l)}\left(\frac{y-l}{a}\right) - r_3^{(l)}\left(\frac{y-l}{a}\right)\left(\int_{-kl}^{2l-y}\int_{(k+1)l}^{y} \mathcal{L}u^{(k)}(\xi,\eta)d\eta d\xi + \widetilde{p^{(k)}}(2l-y)\right) -$$
$$-\rho(y)\int_{-kl}^{2l-y}\mathcal{L}u^{(k)}(\xi,y)d\xi - \left(r_2^{(l)}\left(\frac{y-l}{a}\right) - ar_1^{(l)}\left(\frac{y-l}{a}\right)\right)\times$$
$$\times\left(\int_{(k+1)l}^{y}\mathcal{L}u^{(k)}(2l-y,\eta)d\eta + dp^{(k)}(2l-y)\right). \tag{33}$$

Так как функция $\rho(y) \equiv 0,$ то уравнение (32) записывается в виде

$$r_3^{(l)}\left(\frac{y-l}{a}\right)g^{(k)}(y) = Y^{(k)}(y) + r_3^{(l)}\left(\frac{y-l}{a}\right)\frac{C}{2}. \tag{34}$$

Из уравнения (34) и формулы (33) находится функция $g^{(k)}$:

$$g^{(k)}(y) = \left(\frac{\mu^{(l)}}{r_3^{(l)}}\right)\left(\frac{y-l}{a}\right) - \left(\int_{-kl}^{2l-y}\int_{(k+1)l}^{y}\mathcal{L}u^{(k)}(\xi,\eta)d\eta d\xi + \widetilde{p^{(k)}}(2l-y)\right) -$$
$$-2a\left(\frac{r_1^{(l)}}{r_3^{(l)}}\right)\left(\frac{y-l}{a}\right)\left(\int_{(k+1)l}^{y}\mathcal{L}u^{(k)}(2l-y,\eta)d\eta + dp^{(k)}(2l-y)\right) + \frac{C}{2}, \tag{35}$$
$$y \in [(k+1)l; (k+2)l].$$

С учетом выражения (35) решение задачи (7)–(9) в области $Q^{(k,3)}$ представляется формулой

$$u^{(k)}(t,x) = \int_{(k+1)l}^{x+at}\int_{-kl}^{x-at}\mathcal{L}u^{(k)}(\xi,\eta)d\xi d\eta + \widetilde{p^{(k)}}(x-at) + \left(\frac{\mu^{(l)}}{r_3^{(l)}}\right)\left(\frac{x+at-l}{a}\right) -$$
$$-\left(\int_{-kl}^{2l-x-at}\int_{(k+1)l}^{x+at}\mathcal{L}u^{(k)}(\xi,\eta)d\eta d\xi + \widetilde{p^{(k)}}(2l-x-at)\right) -$$
$$-2a\left(\frac{r_1^{(l)}}{r_3^{(l)}}\right)\left(\frac{x+at-l}{a}\right)\left(\int_{(k+1)l}^{x+at}\mathcal{L}u^{(k)}(2l-x-at,\eta)d\eta + dp^{(k)}(2l-x-at)\right). \tag{36}$$

Поскольку для данного случая $\rho(\xi) \equiv 0,$ условия согласования для функции $g^{(k)}$, определенной по формулам (17) и (35), в точке $y = (k+1)l$ запишутся в следующем виде:

$$\mu^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right) - r_3^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)\varphi^{(k)}(l) - ar_1^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)\left(d\varphi^{(k)}(l) - \frac{1}{a}\psi^{(k)}(l)\right) = 0, \tag{37}$$

$$r_1^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)\left(\frac{1}{a}\lambda\left(\frac{kl}{a},l\right)\varphi^{(k)}(l)+a\left(d^2\varphi^{(k)}(l)-\frac{1}{a}d\psi^{(k)}(l)\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{a}r_3^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)\left(\left(d\varphi^{(k)}(l)-\frac{1}{a}\psi^{(k)}(l)\right)\left(d\frac{r_1^{(l)}(t)}{r_3^{(l)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}+\psi^{(k)}(l)-\left(d\frac{\mu^{(l)}(t)}{r_3^{(l)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}\right)=0, \tag{38}$$

$$a\left(r_3^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)\right)^{-1}r_1^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)\left(-\frac{2}{a^2}\partial_t\lambda\left(\frac{kl}{a},l\right)\varphi^{(k)}(l)-\frac{2}{a^2}\lambda\left(\frac{kl}{a},l\right)\psi^{(k)}(l)-d^3\varphi^{(k)}(l)+\frac{1}{a}d^2\psi^{(k)}(l)\right)-$$

$$-\frac{1}{a^2}\lambda\left(\frac{kl}{a},l\right)\varphi^{(k)}(l)\left(-2\left(d\frac{r_1^{(l)}(t)}{r_3^{(l)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}+1\right)+\frac{1}{a^2}\left(d^2\frac{\mu^{(l)}(t)}{r_3^{(l)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}-d^2\varphi^{(k)}(l)+$$

$$+2\left(d\frac{r_1^{(l)}(t)}{r_3^{(l)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}\left(d^2\varphi^{(k)}(l)+\frac{1}{a}d\psi^{(k)}(l)\right)+\frac{1}{a}\left(-d\varphi^{(k)}(l)+\frac{1}{a}\psi^{(k)}(l)\right)\left(d^2\frac{r_1^{(l)}(t)}{r_3^{(l)}(t)}\right)\Bigg|_{t=kl/a}=0. \tag{39}$$

Таким образом, лемма доказана.

Л е м м а 3. *Пусть дана задача* (7)–(9) *на множестве* $\overline{Q^{(k,1)}\bigcup Q^{(k,3)}}$. *Функции* $\varphi^{(k)}\in C^3([0;l])$, $\psi^{(k)}\in C^2([0;l])$, $\mu^{(l)}\in C^2([0;T])$, $r_i^{(0)}\in C^2([0;T])$, $i=\overline{1,3}$, $\lambda(t,x)\in C^2(\overline{Q})$. *Функция* $g^{(k)}$ *принадлежит классу* $C^2([kl;(k+2)l])$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования* (37)–(39).

Усиление требований на гладкость функций $\varphi^{(k)}(x),\psi^{(k)}(x)$ доказывается аналогично случаю, описанному в лемме 2.

З а м е ч а н и е 2. Если выполнено тождество $r_1^{(l)}(t)\equiv r_2^{(l)}(t)\equiv 0$, то требования на функции $\varphi^{(k)}$, $\psi^{(k)}$ и λ в лемме 3 можно ослабить: $\varphi^{(k)}\in C^2([0;l])$, $\psi^{(k)}\in C^1([0;l])$, $\lambda(t,x)\in C^1(\overline{Q})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится аналогично доказательству замечания 1.

Нахождение решения в области $Q^{(k,4)}$. В области $Q^{(k,4)}$ решение строится автоматически по формуле (14), где функция $g^{(k)}$ задается по формуле (35), а функция $p^{(k)}$ – по формуле (25).

Из лемм 2, 3 вытекает следующее

У т в е р ж д е н и е. Пусть выполняются условия лемм 2, 3. Решение $u^{(k)}$ задачи (7)–(9) из класса $C^2\left(\overline{Q^{(k)}}\right)$, определенное на всем множестве $\overline{Q^{(k)}}$, существует и единственно тогда и только тогда, когда выполнены условия согласования (27)–(29), а также (37)–(39).

З а м е ч а н и е 3. Формула (18) определяет решение задачи (7)–(9) в области $Q^{(k,1)}$. Однако косые характеристические производные вносят ухудшение гладкости. Так, если ограничить гладкость функций $\varphi^{(k)}(x),\Psi^{(k)}(x)$ только второй степенью, то максимальная гладкость решения в области $Q^{(k,2)}$ будет только первого порядка. Для того чтобы добиться дважды непрерывной дифференцируемости решения в области $Q^{(k,j)}$, $j=\overline{2,4}$, гладкость функций $\varphi^{(k)}(x),\Psi^{(k)}(x)$, а также ядра $\lambda(t,x)$ должна повышаться. Если при этом одновременно выполнены условия в замечаниях 1, 2, то дополнительного усиления гладкости не требуется, так как в этом случае задача (7)–(9) сводится к первой смешанной задаче.

4. Задача в полуполосе. В предыдущем пункте было построено решение задачи (7)–(9) и получены условия согласования для него в каждой отдельной области $Q^{(k)}$. В [6] получены необходимые и достаточные условия существования единственного решения в классе $C^2(\overline{Q})$ для первой смешанной задачи. Определим начальные функции $\varphi^{(k)}$ и $\psi^{(k)}$ следующим образом:

$$\varphi^{(k)}(x)=u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a},x\right)=\int_{-(k-1)l}^{x-kl}\int_{kl}^{x+kl}\mathcal{L}u^{(k)}(\xi,\eta)d\eta d\xi+p^{(k-1)}(x-kl)+g^{(k-1)}(x+kl),$$

$$\psi^{(k)}(x) = \partial_t u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a}, x\right) = a \int_{-(k-1)l}^{x-kl} \mathcal{L}u^{(k)}(\xi, x+kl)d\xi -$$

$$-a\int_{kl}^{x+kl} \mathcal{L}u^{(k)}(x-kl,\eta)d\eta - adp^{(k-1)}(x-kl) + adg^{(k-1)}(x+kl), \quad x \in [0;l]. \qquad (40)$$

Введем обозначение $u^{(k-1,k)}(t,x) = u^{(i)}(t,x),\ (t,x) \in \overline{Q^{(i)}},\ i \in \{k-1,k\}$.

Л е м м а 4. *Для того чтобы решение* $u^{(k-1,k)}(t,x) \in C^2\left(\overline{Q^{(k-1)}} \cup \overline{Q^{(k)}}\right)$, *необходимо и достаточно, чтобы функции* $\varphi^{(k)}$ *и* $\psi^{(k)}$ *были определены по формуле* (40), *а функция* $u^{(k-1)} \in C^{2+i}\left(\overline{\mathrm{Q}^{(k-1)}}\right)$, *где* $i = 1$, *если* $\left(r_1^{(0)}(t)\right)^2 + \left(r_2^{(0)}(t)\right)^2 \neq 0$ *либо* $\left(r_1^{(l)}(t)\right)^2 + \left(r_2^{(l)}(t)\right)^2 \neq 0$, *в противном случае* $i = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится аналогично доказательству, описанному в [6, 7]. Рассмотрим дополнительное требование на усиление гладкости решения. Пусть выполнены условия $\left(r_1^{(0)}(t)\right)^2 + \left(r_2^{(0)}(t)\right)^2 \neq 0$ или $\left(r_1^{(l)}(t)\right)^2 + \left(r_2^{(l)}(t)\right)^2 \neq 0$, тогда требования на усиление гладкости вытекают из замечания 3. В случае, когда выполнены условия $\left(r_1^{(0)}(t)\right)^2 + \left(r_2^{(0)}(t)\right)^2 \equiv 0$ и $\left(r_1^{(l)}(t)\right)^2 + \left(r_2^{(l)}(t)\right)^2 \equiv 0$, производные вида $d^3\varphi^{(k)}, d^2\psi^{(k)}$ в выражении для $\partial^2 u^{(k)}(t,x)$ присутствовать не будут.

Из леммы 4 вытекают следствия.

С л е д с т в и е 3. *Пусть* $\left(r_1^{(0)}(t)\right)^2 + \left(r_2^{(0)}(t)\right)^2 \neq 0$ *или* $\left(r_1^{(l)}(t)\right)^2 + \left(r_2^{(l)}(t)\right)^2 \neq 0$. *Решение* $u^{(k)} \in C^2\left(\overline{Q^{(k)}}\right)$ *тогда и только тогда, когда решение* $u^{(0)} \in C^{2+k}(\overline{Q^{(0)}}),\ k \le n$.

Для д о к а з а т е л ь с т в а данного следствия требуется по индукции по номеру области (k) повторить доказательство леммы 4.

Следствие 3 требует, чтобы в точках (0,0), (0,l) выполнялись следующие условия согласования:

$$d^j\left(\frac{\mu^{(0)}}{r_3^{(0)}}\left(-\frac{z}{a}\right) - a\frac{r_1^{(0)}}{r_3^{(0)}}\left(-\frac{z}{a}\right)\left(d\varphi(-z) + \frac{1}{a}\psi(-z)\right)\right)\Bigg|_{z=0} -$$

$$-\sum_{m=0}^{j} C_j^m\left(2d^{j-m}\left(\frac{r_1^{(0)}}{r_3^{(0)}}\left(-\frac{z}{a}\right)\right)\Bigg|_{z=0}\right)\frac{(-1)^m}{4a^2}\sum_{i=0,n-2i-1\ge 0}^{m} C_m^{2i+1}G(i,m;\lambda,0,0) +$$

$$+\left(\frac{1}{2}\left(\left((-1)^{j+1}-1\right)d^j\varphi(0) + \left((-1)^{j+1}+1\right)d^j\Psi(0)\right)\right) =$$

$$= 2\sum_{m=0}^{j-2}\cos\left(\pi(j-m+1)\right)(-1)^{j+1}C_{2\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor}^{2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+1}G(i,m;\lambda,0,0),\ j = \overline{0,2+k}, \qquad (41)$$

$$d^j\left(\left(\frac{\mu^{(l)}}{r_3^{(l)}}\right)\left(\frac{y-l}{a}\right) - a\left(\frac{r_1^{(l)}}{r_3^{(l)}}\right)\left(\frac{y-l}{a}\right)\left(d\varphi(2l-y) - \frac{1}{a}\psi(2l-y)\right)\right)\Bigg|_{y=l} +$$

$$+\sum_{m=0}^{j} C_j^m\left(2d^{j-m}\left(\left(\frac{r_1^{(0)}}{r_3^{(0)}}\right)\left(\frac{y-l}{a}\right)\right)\Bigg|_{y=l}\right)\frac{(-1)^m}{4a^2}\sum_{i=0,m-2i-1\ge 0}^{m} C_m^{2i+1}G(i,m;\lambda,0,l) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left((-1)^{j+1}-1\right)d^j\varphi(l) + \left((-1)^{j+1}+1\right)d^j\Psi(l)\right) +$$

$$+2\sum_{m=0}^{j-2}\cos\left(\pi(j-m+1)\right)(-1)^{j+1}C_{2\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor}^{2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+1}G(i,m;\lambda,0,l),\ \ j = \overline{0,2+k}. \qquad (42)$$

Здесь функция $G(i,m;\lambda,t,x)$ представляет собой

$$G(i,m;\lambda,t,x)=\sum_{\beta=0,\alpha_1+\alpha_2\le\beta}^{m-1} C_{m-1}^{\beta}\partial_t^{m-1-\beta-\alpha_1}\partial_x^{m-1-\beta-\alpha_2}\lambda(t,x)\times$$

$$\times\left(\mathrm{Init}(\alpha_2,\alpha_1,x)+\sum_{h=1}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor-1}\left(\prod_{r=1}^{h}\sum_{n_r=1}^{N_r}a^{2n_r}\left(\sum_{\beta_r=0,\ \alpha_r^{(1)}+\alpha_r^{(2)}\le\beta_r}^{s_r} C_{s_r}^{\beta_r}\partial_t^{\alpha_r^{(1)}}\partial_x^{\alpha_r^{(2)}}\lambda(t,x)\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\mathrm{Init}\left(\alpha_2+\sum_{q=0}^{h}(2n_q-\alpha_q^{(2)}),\alpha_1-\sum_{q=0}^{h}(2n_q-2-\alpha_q^{(1)}),x\right)\right)\right)\right),$$

где индексы суммирования меняются следующим образом:

$$\alpha_1\le 2i,\ \alpha_2\le n-2i-1,\ \alpha_r^{(1)}\le\alpha_1-\sum_{q=0}^{r-1}2n_q-2-\alpha_q^{(1)},\ \alpha_r^{(2)}\le\alpha_2+\sum_{q=0}^{r-1}2n_q-\alpha_q^{(2)},$$

а пределы суммирования представляют собой

$$s_r=\alpha_1+\alpha_2-2(r+1)-\sum_{q=0}^{r-1}\alpha_q^{(1)}+\alpha_q^{(2)},\ \ N_r=\left\lfloor\frac{\alpha_1-\sum\limits_{q=0}^{r-1}2n_r-2-\alpha_r^{(1)}}{2}\right\rfloor-1.$$

$\mathrm{Init}(\alpha_2,\alpha_1,x)$ определяет следующее выражение начальных данных:

$$\mathrm{Init}(\alpha_2,\alpha_1,x)=a^{\alpha_2+2\left\lfloor\frac{\alpha_1}{2}\right\rfloor}d^{\alpha_2+2\left\lfloor\frac{\alpha_1}{2}\right\rfloor}\left(\varphi(x)\sin\left|\frac{\pi}{2}\left(\alpha_1-2\left\lfloor\frac{\alpha_1}{2}\right\rfloor+1\right)\right|+\Psi(x)\sin\left|\frac{\pi}{2}\left(\alpha_1-2\left\lfloor\frac{\alpha_1}{2}\right\rfloor+1\right)\right|\right),$$

здесь $C_n^j=\dfrac{n!}{j!(n-j)!}$ – биномиальный коэффициент.

Следствие 4. *В точках* (0,0), (0,*l*) *условия согласования* (41)–(42) *выполняются до порядка* $m+2$ *тогда и только тогда, когда в точках* $\left(\frac{kl}{a},0\right),\left(\frac{kl}{a},l\right)$, $0\le k\le m\le n,\ \ k,m\in\mathbb{N}$, *выполняются условия согласования*

$$d^j\left(\left(\frac{\mu^{(0)}}{r_3^{(0)}}\right)\left(-\frac{z}{a}\right)-a\left(\frac{r_1^{(0)}}{r_3^{(0)}}\right)\left(-\frac{z}{a}\right)\left(d\varphi^{(k)}(-z+kl)+\frac{1}{a}\psi^{(k)}(-z+kl)\right)\right)\Bigg|_{z=-kl}-$$

$$-\sum_{m=0}^{j}C_j^m\left(2d^{j-m}\left(\left(\frac{r_1^{(0)}}{r_3^{(0)}}\right)\left(-\frac{z}{a}\right)\right)\Bigg|_{z=-kl}\right)\frac{(-1)^m}{4a^2}\sum_{i=0,m-2i-1\ge0}^{m}C_m^{2i+1}G\left(i,m;\lambda,\frac{kl}{a},0\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\left(\left((-1)^{j+1}-1\right)d^j\varphi^{(k)}(0)+\left((-1)^{j+1}+1\right)d^j\Psi^{(k)}(0)\right)\right)=$$

$$=2\sum_{m=0}^{j-2}\cos\left(\pi(j-m+1)\right)(-1)^{j+1}C_{2\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor}^{2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+1}G\left(i,m;\lambda,\frac{kl}{a},0\right),\ j=\overline{0,2+k}, \tag{43}$$

$$d^j\left(\left(\frac{\mu^{(l)}}{r_3^{(l)}}\right)\left(\frac{y-l}{a}\right)-a\left(\frac{r_1^{(l)}}{r_3^{(l)}}\right)\left(\frac{y-l}{a}\right)\left(d\varphi^{(k)}(2l-kl-y)-\frac{1}{a}\psi^{(k)}(2l-kl-y)\right)\right)\Bigg|_{y=(k+1)l}+$$

$$+\sum_{m=0}^{j} C_j^m \left(2d^{j-m} \left(\left(\frac{r_1^{(0)}}{r_3^{(0)}} \right) \left(\frac{y-l}{a} \right) \right) \Bigg|_{y=(k+1)l} \right) \frac{(-1)^m}{4a^2} \sum_{i=0,\, m-2i-1\ge 0}^{m} C_m^{2i+1} G\left(i,m;\lambda,\frac{kl}{a},l \right) =$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\Big((-1)^{j+1}-1 \Big) d^j \varphi^{(k)}(l) + \Big((-1)^{j+1}+1 \Big) d^j \Psi^{(k)}(l) \Big) +$$

$$+2\sum_{m=0}^{j-2} \cos\big(\pi(j-n+1)\big)(-1)^{j+1} C_{2\left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor}^{2\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor+1} G\left(i,m;\lambda,\frac{kl}{a},l \right),\ j=\overline{0,2+k}, \tag{44}$$

где в функцию $\mathrm{Init}(\alpha_2,\alpha_1,x)$ *вместо функций* φ, Ψ *подставляются функции* $\varphi^{(k)}$, $\Psi^{(k)}$ *соответственно.*

Для д о к а з а т е л ь с т в а данного следствия в условия согласования (27)–(29), а также (37)–(39), подставляются значения функций $\varphi^{(k-1)}$ и $\Psi^{(k-1)}$, которые определяются по формуле (40). После приведения подобных слагаемых и упрощения выражений получаются условия согласования при $k-1$, а также дополнительное условие согласования вида (43)–(44), где $j=\overline{0,3}$. Продолжая этот процесс далее, получаем требуемое утверждение.

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\left(r_1^{(0)}(t)\right)^2+\left(r_2^{(0)}(t)\right)^2\ne 0$ *или* $\left(r_1^{(l)}(t)\right)^2+\left(r_2^{(l)}(t)\right)^2\ne 0$. *Функции* $\varphi\in C^{n+3}([0;l])$, $\psi\in C^{n+2}([0;l])$, $\mu^{(j)}, r_i^{(j)}\in C^{n+2}([0;T])$, $j\in\{0,l\}$, $i=\overline{1,3}$, $\lambda\in C^{n+2}\left(\overline{Q}\right)$. *Решение задачи* (7)–(9) *существует и единственно в классе* $C^2\left(\overline{Q}\right)$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования* (41)–(42) *при* $j=\overline{0,n+2}$.

В постановке задачи (7)–(9) область Q была ограничена сверху прямой $t=T=(n+1)l/a$. Для доказательства существования единственного решения задачи в неограниченной полуполосе, т. е. при $T=\infty$, достаточно в теореме 3 положить $n=\infty$. Сформулируем для этого случая теорему.

Т е о р е м а 4. *Пусть* $\left(r_1^{(0)}(t)\right)^2+\left(r_2^{(0)}(t)\right)^2\ne 0$ *или* $\left(r_1^{(l)}(t)\right)^2+\left(r_2^{(l)}(t)\right)^2\ne 0$. *Функции* $\varphi\in C^{\infty}([0;l])$, $\psi\in C^{\infty}([0;l])$, $\mu^{(j)}, r_i^{(j)}\in C^{\infty}([0;\infty))$, $j\in\{0,l\}$, $i=\overline{1,3}$, $\lambda\in C^{\infty}\left(\overline{Q}\right)$. *Решение задачи* (7)–(9) *существует и единственно в классе* $C^{\infty}\left(\overline{Q}\right)$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования* (41)–(42) *при* $j=\overline{0,\infty}$.

З а м е ч а н и е 4. Пусть выполняются тождества $\left(r_1^{(0)}(t)\right)^2+\left(r_2^{(0)}(t)\right)^2\equiv 0$ и $\left(r_1^{(l)}(t)\right)^2+\left(r_2^{(l)}(t)\right)^2\equiv 0$, тогда получаем первую смешанную задачу, которая рассмотрена в работе [6].

Отметим, что предыдущие теоремы сформулированы для однородного уравнения (7). Для того чтобы получить необходимые и достаточные условия существования единственного гладкого решения смешанной задачи для неоднородного уравнения (1)–(3), воспользуемся условиями согласования, полученными для однородного уравнения, но заменим в них $d^j\mu^{(i)}(0)$ на $d^j\widetilde{\mu^{(i)}}(0)-d^jB^{(i)}v(t,i)|_{t=0}$, $i\in\{0,l\}$, где $v(t,x)$ – решение задачи (4)–(5).

Рассмотрим выражение $d^jB^{(i)}v(t,i)|_{t=0}=d^j\left(r_1^{(i)}(t)\partial_t v(t,i)+r_2^{(i)}(t)\partial_x v(t,i)+r_3^{(l)}(t)v(t,i)\right)|_{t=0}$ подробнее. Данный полином представляет собой сумму

$$d^jB^{(i)}v(t,i)|_{t=0}=\sum_{q=0}^{j} C_j^q\left(d^{j-q}r_1^{(i)}(t)\partial_t^{q+1}v(t,i)+d^{j-q}r_1^{(i)}(t)\partial_t^q v(t,i)+d^{j-q}r_1^{(i)}(t)\partial_t^q\partial_x v(t,i)\right)\Bigg|_{t=0}. \tag{45}$$

Найдем значения выражений $\partial_t^q v(t,i)|_{t=0}$, $q=\overline{0,j+1}$, и $\partial_t^q\partial_x v(t,i)|_{t=0}$, $q=\overline{0,j}$.

С учетом начальных условий (5), $v(0,i)=\partial_t v(0,i)=0$. Также из (5) будет следовать, что $\partial_t^j\partial_x^k v(t,i)|_{t=0}=0$ как касательные производные. Из уравнения (4) получаем, что $\partial_t^2 v(0,i)=f(0,i)$. Для того чтобы вычислить производные более высоких порядков, продифференцируем уравнение (4) по переменной t. Получим

$$\partial_t^3 v - a^2 \partial_t \partial_x^2 v + \partial_t \lambda v + \lambda \partial_t v = \partial_t f.$$

Из того, что $v(0,i) = \partial_t v(0,i) = 0,$ следует, что $\partial_t^3 v(0,i) = \partial_t f(0,i).$ Дифференцируя уравнение (4) еще раз по переменной t, находим

$$\partial_t^4 v - a^2 \partial_t^2 \partial_x^2 v + \partial_t^2 \lambda v + \lambda \partial_t^2 v + 2\partial_t \lambda \partial_t v = \partial_t^2 f,$$

откуда $\partial_t^4 v(0,i) = -\lambda(0,i) f(0,i) + \partial_t^2 f.$ Продолжая процесс, получаем рекуррентное выражение для производных $\partial_t^q v(0,i),\ i \in \{0,l\}$:

$$\partial_t^q v(0,i) = \begin{cases} 0,\ q = 0,1; \\ \partial_t^{q-2} f(0,i),\ q = 2,3; \\ \partial_t^{q-2} f(0,i) - \partial_t^{q-2}(\lambda(t,i)v(t,i))|_{t=0},\ q = 4,\dots. \end{cases} \tag{46}$$

Таким образом, значения функций $d^q \widetilde{\mu^{(i)}}(0) - d^q B^{(i)} v(t,i)|_{t=0}$ выражаются через известные функции $\widetilde{\mu^{(i)}}, \lambda, f$ и их производные.

Функция $w(t,x)$ представляет собой сумму решения $u(t,x)$ задачи для однородного уравнения (7)–(9), а также функции $v(t,x)$ – решения задачи для неоднородного уравнения (4)–(5). Данные функции принадлежат классу $C^2\left(\overline{Q}\right)$. Отсюда следует, что функция $w(t,x)$ будет принадлежать классу $C^2\left(\overline{Q}\right)$ при выполнении условий согласования (41)–(42), где $d^n \mu^{(i)}(0)$ заменяется на $d^n \widetilde{\mu^{(i)}}(0) - d^n B^{(i)} v(t,i)|_{t=0}$, а значения производных $\partial_t^j v(0,i)$ вычисляются по формуле (46). Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 5. *Пусть* $\left(r_1^{(0)}(t)\right)^2 + \left(r_2^{(0)}(t)\right)^2 \neq 0$ *или* $\left(r_1^{(l)}(t)\right)^2 + \left(r_2^{(l)}(t)\right)^2 \neq 0.$ *Функции* $\varphi \in C^{n+3}([0;l]),\ \ \psi \in C^{n+2}([0;l]),\ \ \widetilde{\mu^{(j)}}, r_i^{(j)} \in C^{n+2}([0;T]),\ j \in \{0,l\},\ i = \overline{1,3},\ \ \lambda, f \in C^{n+2}\left(\overline{Q}\right).$ *Решение задачи* (1)–(3) *существует и единственно в классе* $C^2\left(\overline{Q}\right)$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования* (41)–(42) *при* $j = \overline{0,n+2},$ *где* $d^j \mu^{(i)}(0)$ *заменяется на* $d^j \widetilde{\mu^{(i)}}(0) - d^j B^{(i)} v(t,i)|_{t=0}$, *а значения производных* $\partial_t^j v(0,i)$ *вычисляются по формуле* (46).

Отметим, что для функции $u(t,x)$ в теореме 4 выведены необходимые и достаточные условия принадлежности решения классу $C^\infty\left(\overline{Q}\right)$. В силу следствия 1 можно построить частное решение $v(t,x)$ также из класса $C^\infty\left(\overline{Q}\right)$. Таким образом, для решения $w(t,x)$ задачи (1)–(3) справедлива

Теорема 6. *Пусть* $\left(r_1^{(0)}(t)\right)^2 + \left(r_2^{(0)}(t)\right)^2 \neq 0$ *или* $\left(r_1^{(l)}(t)\right)^2 + \left(r_2^{(l)}(t)\right)^2 \neq 0.$ *Функции* $\varphi \in C^\infty([0;l]),\ \psi \in C^\infty([0;l]),\ \mu^{(j)}, r_i^{(j)} \in C^\infty([0;\infty)),\ j \in \{0,l\},\ i = \overline{1,3},\ \lambda, f \in C^\infty\left(\overline{Q}\right)$. *Решение задачи* (1)–(3) *существует и единственно в классе* $C^\infty\left(\overline{Q}\right)$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования* (41)–(42) *при* $j = \overline{0,\infty},$ *где* $d^j \mu^{(i)}(0)$ *заменяется на* $d^j \widetilde{\mu^{(i)}}(0) - d^j B^{(i)} v(t,i)|_{t=0}$ *и значения производных* $\partial_t^j v(0,i)$ *вычисляются по формуле* (46).

Заключение. Рассмотрена смешанная задача для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с косыми производными первого порядка в граничных условиях. Для поставленной задачи с помощью метода характеристик выведены необходимые и достаточные условия существования единственного классического решения при заданной гладкости исходных данных. Кроме того, доказано, что в случае, когда направление косой производной совпадает с характеристическим, происходит ухудшение гладкости решения. Также показано, что в случае, когда выполняются тождества $\left(r_1^{(0)}(t)\right)^2 + \left(r_2^{(0)}(t)\right)^2 \equiv 0$ и $\left(r_1^{(l)}(t)\right)^2 + \left(r_2^{(l)}(t)\right)^2 \equiv 0,$ поставленная задача сводится к первой смешанной задаче, рассмотренной в работе [6]. При этом условия согласования, полученные в обоих случаях, совпадают.

Список использованных источников

1. Боголюбов, Н. Н. Квантовые поля / Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. – 3-е изд., доп. – М., Физматлит, 2005. – 384 с.
2. Иваненко, Д. Д. Классическая теория поля (новые проблемы) / Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов. – 2-е изд. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1951. – 479 с.
3. Барановская, С. Н. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии / С. Н. Барановская, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1188–1191.
4. Новиков, Е. Н. Необходимые и достаточные условия колебаний ограниченной струны при косых производных в граничных условиях / Ф. Е. Ломовцев, Е. Н. Новиков // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 1. – С. 126–129.
5. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для волнового уравнения с интегральным условием / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2016. – Т. 6, № 60. – С. 22–27.
6. Корзюк, В. И. Первая смешанная задача для уравнения Клейна – Гордона – Фока в полуполосе / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 8. – С. 1105–1117.
7. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения Клейна – Гордона – Фока в полуполосе с косыми производными в граничных условиях / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Весц. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук — 2018. – Т. 54, № 4. – С. 391–403. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-391-403
8. Михлин, С. Г. Курс математической физики / С. Г. Михлин. – 2-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2002. – 575 с.
9. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения Клейна – Гордона – Фока с нелокальными условиями / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 6. – С. 20–27.
10. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения Клейна – Гордона – Фока с нелокальными условиями / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Тр. Ин-та математики. – 2018. – Т. 26, № 1. – С. 56–72.

References

1. Bogolyubov N. N., Shirkov D. V. *The Quantum Fields*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005. 384 p. (in Russian).
2. Ivanenko D. D., Sokolov A. A. *Classical Field Theory (New Problems)*. Moscow, Leningrad, Gostekhteoretizdat Publ., 1951. 479 p. (in Russian).
3. Baranovskaya S. N., Yurchuk N. I. Mixed problem for the string vibration equation with a time-dependent oblique derivative in the boundary condition. *Differential Equations,* 2009, vol. 45, no. 8, pp. 1212–1215. https://doi.org/10.1134/s0012266109080126
4. Lomovtsev F. E., Novikov E. N. Necessary and sufficient conditions for the vibrations of a bounded string with directional derivatives in the boundary conditions. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 1, pp. 128–131. https://doi.org/10.1134/S0374064114010178
5. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution to the mixed problem for the wave equation with the integral condition. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2016, vol. 60, no. 6, pp. 22–27 (in Russian).
6. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the first mixed problem for the Klein-Gordon-Fock equation in a half-strip. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 8, pp. 1098–1111. https://doi.org/10.1134/S0374064114080081
7. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the Klein – Gordon – Fock type equation in the half-strip with curve derivatives at boundary conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 391–403 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-391-403
8. Mikhlin S. G. *Course of Mathematical Physics*. 2nd ed. Saint Petersburg, Lan' Publ., 2002. 575 p. (in Russian).
9. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution to the mixed problem for the Klein-Gordon-Fock equation with the unlocal conditions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 6, pp. 20–27 (in Russian).
10. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution to the mixed problem for the Klein-Gordon-Fock equation with the unlocal conditions. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2018. vol. 26, no. 1, pp. 56–72 (in Russian).

Информация об авторах

Виктор Иванович Корзюк – академик, профессор, доктор физико-математических наук, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь), Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by

Столярчук Иван Игоревич – соискатель, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ivan.telkontar@gmail.com. https://orcid.org/0000-0001-6839-7997

Information about the authors

Viktor I. Korzyuk – Academician, Professor, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus), Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by

Ivan I. Stolyarchuk – Postgraduate Student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ivan.telkontar@gmail.com. https://orcid.org/0000-0001-6839-7997