ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.671
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-22-31

Поступила в редакцию 08.01.2019
Received 08.01.2019

П. П. Забрейко, А. В. Кривко-Красько

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

ОБ ИНДЕКСЕ ПУАНКАРЕ ПЛОСКИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ ТРЕТЬЕЙ И ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

Аннотация. Выписываются условия изолированности нулевой особой точки плоских полиномиальных полей третьей и четвертой степени через коэффициенты компонент этих полей. Как оказалось, данные условия существенно зависят от наибольшего общего делителя компонент плоских полиномиальных полей: в некоторых случаях только от его степени, а в некоторых – дополнительно от наличия у него ненулевых вещественных нулей. Соответствующие рассуждения строятся на понятии результанта и субрезультантов компонент поля. В случае изолированности особой точки для ее индекса предлагаются достаточно простые формулы через субрезультанты и коэффициенты компонент.

Ключевые слова: индекс Пуанкаре особой точки, результант, субрезультанты, наибольший общий делитель, изолированные особые точки

Для цитирования. Забрейко, П. П. Об индексе Пуанкаре плоских полиномиальных полей третьей и четвертой степени / П. П. Забрейко, А. В. Кривко-Красько // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 1. – С. 22–31. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-22-31

P. P. Zabreiko, A. V. Krivko-Krasko

Belarusian State University, Minsk, Belarus

POINCARÉ INDEX OF PLANE POLYNOMIAL FIELDS OF THIRD AND FOURTH DEGREE

Abstract. The conditions of isolation of a zero singular point of plane polynomial fields of third and fourth degree are considered in terms of the coefficients of the components of these fields. The isolation conditions depend on the greatest common divisor of the components of polynomial fields: in some cases only on its degree, and in some cases, additionally, on the presence of nonzero real zeros. The reasoning, which allows one to write out the isolation conditions, is based on the concept of the resultant and subresultants of components of plane polynomial fields. If the zero singular point is isolated, its index is calculated through the values of subresultants and coefficients of components.

Keywords: singular point index, Poincaré index, resultant, subresultant, greatest common divisor, isolated singular point

For citation. Zabreiko P. P., Krivko-Krasko A. V. Poincaré index of plane polynomial fields of third and fourth degree. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 22–31 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-22-31

Введение. В различных задачах качественной теории дифференциальных уравнений, в теории динамических систем, нелинейных интегральных уравнений и т. д. часто возникает необходимость вычисления индекса (индекса Пуанкаре) нулевой особой точки векторного поля

$$\Phi(x_1, x_2) = \big(a(x_1, x_2), b(x_1, x_2)\big)$$

на плоскости, компоненты $a(x_1, x_2)$ и $b(x_1, x_2)$ которого являются однородными полиномами степени n.

Общий метод вычисления индекса нулевой особой точки изложен в монографии [1]. Оказывается, что индекс нулевой особой точки векторного поля Φ определяется по числу перемен знака при достаточно больших положительных и достаточно больших по абсолютной величине отрицательных значениях аргумента в ряде Штурма. Построение ряда Штурма сводится к классическому алгоритму Евклида. Число перемен знака в ряде Штурма определяется знаками коэффициентов при старших степенях полиномов, входящих в ряд Штурма. Эти коэффициенты являются функциями от коэффициентов полиномов $a(x_1, x_2)$ и $b(x_1, x_2)$.

Иной способ вычисления индекса нулевой особой точки плоского векторного поля был предложен в работе [2]. Он основан на анализе последовательности субрезультантов (см., напр., [3]). Более точно этот метод основан на вычислении некоторых специальным образом выбранных миноров некоторой матрицы, конструируемой по коэффициентам компонент-полиномов рассматриваемого поля. Определитель этой матрицы и есть результант компонент-полиномов.

Для ряда приложений представляют интерес явные условия изолированности нулевой особой точки и явные формулы, выражающие индекс нулевой особой точки векторного поля Ф непосредственно через коэффициенты полиномов $a(x_1,x_2)$ и $b(x_1,x_2)$. Такие условия изолированности и формулы для индекса хорошо известны в случаях $n = 1$ и $n = 2$. Однако вывод таких условий и формул при $n > 2$ связан со значительными трудностями. Причиной, в первую очередь, является тот факт, что общий наибольший делитель компонент-полиномов может иметь различную степень, что существенно влияет как на число полиномов в ряде Штурма в первом методе, так и наличие нулей в соответствующей последовательности субрезультантов во втором. Более того, при вычислениях каждому из этих методов соответствует множество частных случаев, причем для каждого условия изолированности нулевой особой точки и формулы для вычисления индекса особой точки оказываются различными.

В работах [4, 5] была предпринята попытка вывести условия изолированности и формулы для индекса нулевой особой точки векторного поля для случаев $n = 3$ и $n = 4$. Однако как условия изолированности, так и формулы для индекса нулевой особой точки векторного поля Ф фактически получены для некоторых частных случаев, к которым общее поле приводится некоторыми преобразованиями, не меняющими ни факта изолированности нулевой особой точки, ни его индекса. Тем самым полученные им условия невырожденности и формулы для индекса оказываются выраженными не через коэффициенты полиномов исходного векторного поля, а через коэффициенты компонент некоторого вспомогательного векторного поля.

В настоящей работе показано, что для случаев $n = 3$ и $n = 4$ явные условия невырожденности нулевой особой точки и формулы для индекса этой особой точки могут быть получены именно в терминах коэффициентов исходного поля.

Особо следует выделить случай $a_0 = b_0 = 0$. Очевидно, что в этом случае наибольший общий делитель $d(x_1,x_2)$ обращается в нуль при $x_2 = 0$, и, следовательно, нулевая особая точка поля Ф неизолирована. Поэтому ниже предполагается, что хотя бы одно из чисел a_0 и b_0 отлично от нуля.

В дальнейших рассуждениях нам понадобятся две элементарные (и забытые последующими авторами) теоремы из [3], которые позволяют для двух ненулевых полиномов одинаковых или различных степеней определить степень их наибольшего общего делителя, а также выписать наибольший общий делитель в явном виде через коэффициенты этих полиномов. Сформулируем эти теоремы в удобной для нас форме для однородных полиномов порядка n.

Пусть $f(x_1,x_2)$ и $g(x_1,x_2)$ – два однородных полинома степени n:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1}x_2 + \ldots + a_nx_2^n, \\ g(x_1,x_2) &= b_0x_1^n + b_1x_1^{n-1}x_2 + \ldots + b_nx_2^n. \end{aligned} \tag{1}$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$M_0(f,g)=\begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{a_0\quad a_1\quad a_2\quad \ldots\quad a_{n-1}\quad a_n}}^{n\text{ столбцов}}\;\overbrace{\hphantom{0\quad 0\quad \ldots\quad 0\quad 0\quad 0}}^{n\text{ столбцов}} \\ \left(\begin{array}{cccccccccccc}
a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} & b_n & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} & b_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)\end{array}
\begin{array}{l} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n\text{ строк} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n\text{ строк}\end{array}, \tag{2}$$

составленную из коэффициентов полиномов $f(x_1,x_2)$ и $g(x_1,x_2)$ и матрицы $M_i(f,g)$ ($i = 1,2,\ldots n$), полученные из матрицы $M_0(f,g)$ вычеркиванием первых i и последних i строк и первых i и последних i столбцов.

Ниже важную роль будет играть конечная последовательность

$$R_0, R_1, R_2, \ldots, R_n, \tag{3}$$

где $R_i = \det M_i(f,g)$ ($i = 0,1,2,\ldots n$) и $R_n = 1$ (определитель нулевого порядка по определению считается равным единице). Число R_0 – это результант полиномов $f(x_1,x_2)$ и $g(x_1,x_2)$, числа $R_1, R_2, \ldots, R_n$ – их последовательные субрезультанты первого, второго, … , n-го порядков соответственно.

Субрезультанты (3) позволяют определить степень наибольшего общего делителя $d(x_1,x_2)$ полиномов $f(x_1,x_2)$ и $g(x_1,x_2)$.

Т е о р е м а 1. *Пусть i – номер первого отличного от нуля субрезультанта* (3)

$$R_0, \ldots, R_{i-1} = 0, \ \ R_i \neq 0.$$

Тогда степень наибольшего общего делителя $d(x_1,x_2)$ полиномов $f(x_1,x_2)$ и $g(x_1,x_2)$ равна i.

Т е о р е м а 2. *Пусть степень наибольшего общего делителя $d(x_1,x_2)$ полиномов $f(x_1,x_2)$ и $g(x_1,x_2)$ равна i, тогда $d(x_1,x_2) = x_2^i \cdot \det D_i(f,g)$, где матрица $D_i(f,g)$ имеет вид*

$$
\begin{array}{cl}
2(n-i)\text{ столбцов} & \\
\left(\begin{array}{cccccccccccr}
a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & (x_1x_2^{-1})^{n-i-1} f(x_1x_2^{-1},1) \\
0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \ldots & 0 & 0 & (x_1x_2^{-1})^{n-i-2} f(x_1x_2^{-1},1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n & x_1x_2^{-1} f(x_1x_2^{-1},1) \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & f(x_1x_2^{-1},1) \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-1} & g(x_1x_2^{-1},1) \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} & b_n & x_1x_2^{-1} g(x_1x_2^{-1},1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & 0 & \ldots & 0 & 0 & (x_1x_2^{-1})^{n-i-2} g(x_1x_2^{-1},1) \\
b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} & b_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & (x_1x_2^{-1})^{n-i-1} f(x_1x_2^{-1},1)
\end{array}\right) &
\begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} n-i\text{ строк} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} n-i\text{ строк} \end{array}
\end{array};
$$

$D_i(f,g)$ получается из матрицы $M_i(f,g)$ путем замены элементов крайнего правого столбца

$$
\begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ \ldots \\ a_{n-i+1} \\ a_{n-i} \\ b_{n-i} \\ a_{n-i+1} \\ \ldots \\ 0 \\ 0
\end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix}
(x_1x_2^{-1})^{n-i-1} f(x_1x_2^{-1},1) \\
(x_1x_2^{-1})^{n-i-2} f(x_1x_2^{-1},1) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_1x_2^{-1} f(x_1x_2^{-1},1) \\
f(x_1x_2^{-1},1) \\
g(x_1x_2^{-1},1) \\
x_1x_2^{-1} g(x_1x_2^{-1},1) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(x_1x_2^{-1})^{n-i-2} g(x_1x_2^{-1},1) \\
(x_1x_2^{-1})^{n-i-1} f(x_1x_2^{-1},1)
\end{pmatrix}.
$$

Отметим, что теоремы 1 и 2 можно также сформулировать для однородных полиномов различных степеней.

1. Пусть $n = 3$. Тогда компоненты векторного поля Φ представимы в виде

$$a(x_1, x_2) = a_0 x_1^3 + a_1 x_1^2 x_2 + a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3,$$
$$b(x_1, x_2) = b_0 x_1^3 + b_1 x_1^2 x_2 + b_2 x_1 x_2^2 + b_3 x_2^3.$$

Матрица $M_0(a, b)$ в таком случае будет иметь следующий вид:

$$M_0(a,b) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим условия изолированности нулевой особой точки поля Φ.

Так как $n = 3$, то, во-первых, наибольший общий делитель $d(x_1, x_2)$ может быть полиномом первой, второй или третьей степени, а во-вторых, конечная последовательность субрезультантов (3) состоит из четырех элементов

$$R_0, R_1, R_2, R_3, \tag{4}$$

в которой, напомним, $R_3 = 1$.

Применяя теорему 1 к компонентам $a(x_1, x_2)$ и $b(x_1, x_2)$ векторного поля Φ, можно получить следующие выводы об изолированности нулевой особой точки.

Если $R_0 \neq 0$, то полиномы $a(x_1, x_2)$ и $b(x_1, x_2)$ взаимно просты, и поэтому нулевая особая точка поля Φ изолирована.

Если $R_0 = 0$, $R_1 \neq 0$ или $R_0 = 0$, $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, то наибольший общий делитель $d(x_1, x_2)$ полиномов $a(x_1, x_2)$ и $b(x_1, x_2)$ имеет нечетную степень: в первом случае – первую, а во втором – третью. В таких случаях наибольший общий делитель $d(x_1, x_2)$ обязательно обращается в нуль хотя бы на одной прямой, проходящей через начало координат, и, следовательно, нулевая особая точка поля Φ неизолирована. В частности, если $a_0 = b_0 = 0$, то $R_0 = 0$, $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, $d(x_1, x_2)$ обращается в нуль при $x_2 = 0$ и, следовательно, нулевая особая точка поля Φ неизолирована.

Наконец, если $R_0 = 0$, $R_1 = 0$, $R_2 \neq 0$, то наибольший общий делитель $d(x_1, x_2)$ полиномов $a(x_1, x_2)$ и $b(x_1, x_2)$ имеет четную степень равную двум и проверка изолированности нулевой особой точки сводится к вопросу о существовании ненулевых вещественных решений уравнения

$$d(x_1, x_2) = 0.$$

Воспользовавшись в последнем случае теоремой 2, определим наибольший общий делитель $d(x_1, x_2)$ через коэффициенты полиномов $a(x_1, x_2)$ и $b(x_1, x_2)$:

$$d(x_1, x_2) = x_2^2 \cdot \begin{vmatrix} a_0 & a(x_1 x_2^{-1}, 1) \\ b_0 & b(x_1 x_2^{-1}, 1) \end{vmatrix}.$$

Отсюда следует, что общий наибольший делитель $d(x_1, x_2)$ компонент поля Φ определяется равенством

$$d(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \cdot x_1^2 + \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} \cdot x_1 x_2 + \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix} \cdot x_2^2.$$

Если выполнено неравенство

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}^2 - 4\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix} < 0, \tag{5}$$

то уравнение $d(x_1, x_2) = 0$ не имеет ненулевых вещественных решений и, в свою очередь, нулевая особая точка изолирована, в противном случае – неизолирована (наибольший общий делитель обращается в нуль на одной или двух прямых).

Из проведенных рассуждений вытекает

Теорема 3. *Пусть* $n = 3$. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $R_0 \neq 0$, *то нулевая особая точка поля* Φ *изолирована;*

2) *если* $R_0 = 0$ *и* $R_1 \neq 0$, *то нулевая особая точка поля* Φ *неизолирована;*

3) *если* $R_0 = 0$, $R_1 = 0$, $R_2 \neq 0$, *то нулевая особая точка поля* Φ *изолирована в том и только том случае, когда выполнено неравенство*

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}^2 - 4\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix} < 0,$$

в противном случае – неизолирована;

4) *если* $R_0 = 0$, $R_1 = 0$, $R_2 = 0$ (*в частности, если* $a_0 = b_0 = 0$), *то нулевая особая точка поля* Φ *неизолирована.*

Для вычисления ind Φ (индекса нулевой особой точки векторного поля Φ) воспользуемся теоремой Сенчаковой [2], которая для случая $n = 3$ может быть упрощена следующим образом.

Теорема 4. *Пусть* $n = 3$ *и нулевая особая точка поля* Φ *изолирована. Справедливы следующие утверждения:*

1) $R_0, R_1, R_2 \neq 0$, *тогда* $\operatorname{ind}\Phi = \operatorname{sign}(R_0 R_1) + \operatorname{sign}(R_1 R_2) + \operatorname{sign} R_2$;

2) $R_0, R_2 \neq 0, R_1 = 0$ *или* $R_0, R_1 = 0, R_2 \neq 0$, *тогда* $\operatorname{ind}\Phi = \operatorname{sign} R_2$;

3) $R_0, R_1, \neq 0, R_2 = 0$, *тогда* $\operatorname{ind}\Phi = \operatorname{sign}(R_0 R_1)$;

4) $R_0 \neq 0, R_1 = R_2 = 0$, *тогда* $\operatorname{ind}\Phi = -\operatorname{sign} R_0$.

В качестве примера применения теорем 3 и 4 рассмотрим векторное поле с компонентами

$$a(x_1, x_2) = x_1^3 - x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 - 2x_2^3,$$

$$b(x_1, x_2) = x_1^3 + 2x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2^2 + x_2^3,$$

$$M_0(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $R_0 = \det M_0(a,b) = 0,$ то полиномы $a(x_1, x_2)$ и $b(x_1, x_2)$ не являются взаимно простыми. Определим степень наибольшего общего делителя $d(x_1, x_2)$:

$$M_1(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad R_1 = \det M_1(a,b) = 0;$$

$$M_2(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad R_2 = \det M_2(a,b) = 3 \neq 0.$$

Так как $R_0 = 0$, $R_1 = 0$, $R_2 \neq 0$, то наибольший общий делитель является полиномом второй степени и по теореме 2 представим в виде

$$d(x_1, x_2) = x_2^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a(x_1 x_2^{-1}, 1) \\ 1 & b(x_1 x_2^{-1}, 1) \end{vmatrix} = x_2^2 b(x_1 x_2^{-1}, 1) - x_2^2 a(x_1 x_2^{-1}, 1) =$$

$$= x_2^2 \left(\left(\frac{x_1}{x_2} \right)^3 + 2\left(\frac{x_1}{x_2} \right)^2 + 2\left(\frac{x_1}{x_2} \right) + 1 \right) - x_2^2 \left(\left(\frac{x_1}{x_2} \right)^3 - \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^2 - \left(\frac{x_1}{x_2} \right) - 2 \right) =$$

$$= 3x_1^2 + 3x_1 x_2 + 3x_2^2.$$

Тогда по теореме 3 для ответа на вопрос об изолированности нулевой особой точки необходимо проверить выполнение неравенства (5).

Для нашего примера

$$3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = -27 < 0.$$

Следовательно, неравенство (5) выполнено и нулевая особая точка изолирована.

Для нашего примера $R_0 = R_1 = 0$, $R_2 = 3 \neq 0$. Тогда, воспользовавшись теоремой 4, получим

$$\operatorname{ind} \Phi = \operatorname{sign} R_2 = 1.$$

2. Рассмотрим теперь случай $n = 4$. Тогда компоненты векторного поля Φ представимы в виде

$$a(x_1, x_2) = a_0 x_1^4 + a_1 x_1^3 x_2 + a_2 x_1^2 x_2^2 + a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4,$$
$$b(x_1, x_2) = b_0 x_1^4 + b_1 x_1^3 x_2 + b_2 x_1^2 x_2^2 + b_3 x_1 x_2^3 + b_4 x_2^4.$$

Матрица $M_0(a,b)$ в таком случае будет иметь вид

$$M_0(a,b) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $n = 4$, то, во-первых, наибольший общий делитель $d(x_1, x_2)$ может быть полиномом первой, второй, третьей или четвертой степени, а во-вторых, конечная последовательность субрезультантов (3) состоит из пяти элементов

$$R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, \tag{6}$$

в которой, напомним, $R_4 = 1$.

Применяя теорему 1 к компонентам $a(x_1, x_2)$ и $b(x_1, x_2)$ векторного поля Φ, можно получить следующие выводы об изолированности нулевой особой точки.

Если $R_0 \neq 0$, то полиномы $a(x_1, x_2)$ и $b(x_1, x_2)$ являются взаимно простыми и нулевая особая точка поля Φ изолирована. Если $R_0 = 0$, $R_1 \neq 0$ или $R_0 = 0$, $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, $R_3 \neq 0$, то наибольший общий делитель полиномов $a(x_1, x_2)$ и $b(x_1, x_2)$ имеет первую или третью степень соответственно, также наибольший общий делитель имеет ненулевые вещественные нули и, в свою очередь, нулевая особая точка поля Φ неизолирована.

Если $R_0 = 0$, $R_1 = 0$, $R_2 \neq 0$, то степень наибольшего общего делителя полиномов $a(x_1, x_2)$ и $b(x_1, x_2)$ равна двум, и нулевая особая точка может быть или не быть изолированной. Рассмотрим этот случай подробнее.

Воспользовавшись теоремой 2 к компонентам $a(x_1, x_2)$ и $b(x_1, x_2)$ векторного поля Φ, выпишем их наибольший общий делитель

$$d(x_1,x_2) = x_2^2 \cdot \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & x_1x_2^{-1}a(x_1x_2^{-1},1) \\ 0 & a_0 & a_1 & a(x_1x_2^{-1},1) \\ 0 & b_0 & b_1 & b(x_1x_2^{-1},1) \\ b_0 & b_1 & b_2 & x_1x_2^{-1}b(x_1x_2^{-1},1) \end{vmatrix} =$$

$$= x_2^2 \cdot \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_0x_1^5x_2^{-5} + a_1x_1^4x_2^{-4} + a_2x_1^3x_2^{-3} + a_3x_1^2x_2^{-2} + a_4x_1x_2^{-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & a_0x_1^4x_2^{-4} + a_1x_1^3x_2^{-3} + a_2x_1^2x_2^{-2} + a_3x_1x_2^{-1} + a_4 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_0x_1^4x_2^{-4} + b_1x_1^3x_2^{-3} + b_2x_1^2x_2^{-2} + b_3x_1x_2^{-1} + b_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_0x_1^5x_2^{-5} + b_1x_1^4x_2^{-4} + b_2x_1^3x_2^{-3} + b_3x_1^2x_2^{-2} + b_4x_1x_2^{-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_0 \end{vmatrix} x_1^5x_2^{-3} + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_1 \end{vmatrix} x_1^4x_2^{-2} + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_1 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_1 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_2 \end{vmatrix} x_1^3x_2^{-1} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} x_1^2 + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_4 \end{vmatrix} x_1x_2 + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_4 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} x_2^2.$$

Первых три определителя в последнем выражении равны нулю, так как каждая матрица, для которой вычисляются данные определители, имеет два одинаковых (линейно зависимых) столбца. Отсюда следует, что общий наибольший делитель $d(x_1, x_2)$ компонент поля Φ определяется равенством

$$d(x_1,x_2) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} x_1^2 + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_4 \end{vmatrix} x_1x_2 + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_4 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} x_2^2.$$

Если выполнено неравенство

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_4 \end{vmatrix}^2 - 4\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_4 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} < 0, \qquad (7)$$

тогда уравнение $d(x_1, x_2) = 0$ не имеет ненулевых вещественных решений и, в свою очередь, нулевая особая точка изолирована, в противном случае – неизолирована (наибольший общий делитель обращается в нуль на одной или двух прямых).

Пусть, наконец, $R_0 = R_1 = R_2 = R_3 = 0$. Тогда степень наибольшего общего делителя полиномов $a(x_1, x_2)$ и $b(x_1, x_2)$ равна четырем и нулевая особая точка может быть или не быть изолированной. Рассмотрим этот случай подробнее. Для этого введем в рассмотрение векторное поле

$$\Phi'(x_1, x_2) = \left(d'_{x_1}(x_1, x_2), d'_{x_2}(x_1, x_2)\right).$$

Поле Φ' является потенциальным, а наибольший общий делитель $d(x_1, x_2)$ потенциалом векторного поля Φ' (см., напр., [6]).

Л е м м а 1. *Пусть* $R_0 = R_1 = R_2 = R_3 = 0$. *Нулевая особая точка поля* Φ *изолирована в том и только в том случае, когда изолирована нулевая особая точка поля* Φ'.

Л е м м а 2. *Пусть нулевая особая точка поля* Φ' *изолирована, тогда* $\operatorname{ind}\Phi = 1$.

Компоненты векторного поля Φ' являются однородными полиномами третьего порядка. Следовательно, для ответа на вопрос, является ли нулевая особая точка поля Φ' изолированной, достаточно к компонентам поля Φ' применить теорему 3.

Пусть

$$d(x_1, x_2) = d_0 x_1^4 + d_1 x_1^3 x_2 + d_2 x_1^2 x_2^2 + d_3 x_1 x_2^3 + d_4 x_2^4.$$

Тогда

$$d'_{x_1}(x_1, x_2) = 4d_0 x_1^3 + 3d_1 x_1^2 x_2 + 2d_2 x_1 x_2^2 + d_3 x_2^3,$$
$$d'_{x_2}(x_1, x_2) = d_1 x_1^3 + 2d_2 x_1^2 x_2 + 3d_3 x_1 x_2^2 + 4d_4 x_2^3.$$

Матрица $M_0(d'_{x_1}, d'_{x_2})$ в таком случае будет иметь следующий вид:

$$M_0(d'_{x_1}, d'_{x_2}) = \begin{pmatrix} 4d_0 & 3d_1 & 2d_2 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 4d_0 & 3d_1 & 2d_2 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 4d_0 & 3d_1 & 2d_2 & d_3 \\ 0 & 0 & d_1 & 2d_2 & 3d_3 & 4d_4 \\ 0 & d_1 & 2d_2 & 3d_3 & 4d_4 & 0 \\ d_1 & 2d_2 & 3d_3 & 4d_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через

$$R'_0, R'_1, R'_2, R'_3 \tag{8}$$

субрезультанты (3) для полиномов $d'_{x_1}(x_1, x_2)$ и $d'_{x_2}(x_1, x_2)$, где, напомним, $R'_3 = 1$.

Если определитель R'_0 матрицы $M_0(d'_{x_1}, d'_{x_2})$ отличен он нуля, то нулевая особая точка поля Φ' изолирована и, следовательно, изолирована нулевая особая точка поля Φ.

Если $R'_0 = 0,\ R'_1 \neq 0$ или $R'_0 = R'_1 = R'_2 = 0$, то нулевая особая точка поля Φ' неизолирована и, следовательно, неизолирована нулевая особая точка поля Φ.

Наконец, если $R'_0 = R'_1 = 0,\ R'_2 \neq 0$, то нулевая особая точка поля Φ' и, в свою очередь, нулевая особая точка поля Φ изолированы в том и только том случае, когда выполнено неравенство

$$\begin{vmatrix} 4d_0 & 2d_2 \\ d_1 & 3d_3 \end{vmatrix}^2 - 4\begin{vmatrix} 4d_0 & 3d_1 \\ d_1 & 2d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4d_0 & d_3 \\ d_1 & 4d_4 \end{vmatrix} < 0,$$

в противном случае – неизолирована.

Из проведенных рассуждений вытекает

Т е о р е м а 5. *Пусть* $n = 4$. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $R_0 \neq 0$, *то нулевая особая точка поля* Φ *изолирована;*

2) *если* $R_0 = 0$ *и* $R_1 \neq 0$, *то нулевая особая точка поля* Φ *неизолирована;*

3) *если* $R_0 = 0$, $R_1 = 0$, $R_2 \neq 0$, *то нулевая особая точка поля* Φ *изолирована в том и только том случае, когда выполнено неравенство*

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_4 \end{vmatrix}^2 - 4\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_4 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} < 0;$$

в противном случае – неизолирована;

4) *если* $R_0 = 0$, $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, $R_3 \neq 0$, *то нулевая особая точка поля* Φ *неизолирована;*

5) *если* $R_0 = 0$, $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, $R_3 = 0$, *то нулевая особая точка поля* Φ *изолирована в том и только в том случае, когда* $R_0' \neq 0$ *или* $R_0' = R_1' = 0,\ R_2' \neq 0,$

$$\begin{vmatrix} 4d_0 & 2d_2 \\ d_1 & 3d_3 \end{vmatrix}^2 - 4\begin{vmatrix} 4d_0 & 3d_1 \\ d_1 & 2d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4d_0 & d_3 \\ d_1 & 4d_4 \end{vmatrix} < 0.$$

Т е о р е м а 6. *Пусть* $n = 4$ *и нулевая особая точка поля* Φ *изолирована. Справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $R_0, R_1, R_2, R_3 \neq 0,$ *тогда* $\operatorname{ind}\Phi = \operatorname{sign}(R_0R_1) + \operatorname{sign}(R_1R_2) + \operatorname{sign}(R_2R_3) + \operatorname{sign} R_3;$

2) *если* $R_0, R_2, R_3 \neq 0,\ R_1 = 0,$ *или* $R_2, R_3 \neq 0,\ R_0 = R_1 = 0,$ *тогда* $\operatorname{ind}\Phi = \operatorname{sign}(R_2R_3) + \operatorname{sign} R_3;$

3) *если* $R_0, R_1, R_3 \neq 0,\ R_2 = 0,$ *тогда* $\operatorname{ind}\Phi = \operatorname{sign}(R_0R_1) + \operatorname{sign} R_3;$

4) *если* $R_0, R_1, R_2 \neq 0,\ R_3 = 0,$ *тогда* $\operatorname{ind}\Phi = \operatorname{sign}(R_0R_1) + \operatorname{sign}(R_1R_2);$

5) *если* $R_0, R_3 \neq 0,\ R_1 = R_2 = 0,$ *тогда* $\operatorname{ind}\Phi = \operatorname{sign} R_3 - \operatorname{sign}(R_0R_3);$

6) *если* $R_0, R_1 \neq 0,\ R_2 = R_3 = 0,$ *тогда* $\operatorname{ind}\Phi = \operatorname{sign}(R_0R_1) - \operatorname{sign} R_1;$

7) *если* $R_0 \neq 0,\ R_1 = R_2 = R_3 = 0,$ *или* $R_2 \neq 0,\ R_0 = R_1 = R_3 = 0,$ *тогда* $\operatorname{ind}\Phi = 0;$

8) *если* $R_2, R_3 \neq 0,\ R_0 = R_1 = 0,$ *тогда* $\operatorname{ind}\Phi = \operatorname{sign}(R_2R_3) + \operatorname{sign} R_3;$

9) *если* $R_0 = R_1 = R_2 = R_3 = 0,$ *тогда* $\operatorname{ind}\Phi = 1.$

3. В заключение отметим, что изложенный подход к исследованию изолированности нулевой особой точки полиномиальных векторных полей и построению коэффициентных формул для индекса этой особой точки легко распространяется на случай $n = 5$ и даже для больших n, но соответствующие вычисления делаются чрезвычайно громоздкими. Наконец отметим, что теоремы М. Бохера справедливы и для полиномов разных степеней, что позволяет применить изложенные методы для исследования векторных полей, компоненты которых являются однородными полиномами разных степеней.

Список использованных источников

1. Векторные поля на плоскости / М. А. Красносельский [и др.]. – М.: Физматгиз, 1963. – 245 с.

2. Сенчакова, Н. В. О вычислении индекса Пуанкаре нулевой особой точки векторных полей с однородными компонентами / Н. В. Сенчакова // Вестн. Ярослав. ун-та. – 1975. – Вып. 12. – С. 103–124.

3. Бохер, М. Введение в высшую алгебру / М. Бохер. – М.: Л.: ОНТИ, 1933. – 291 с.

4. Черевичный, П. Т. Формулы для вычисления индекса особой точки уравнения $y' = P_3(x,y)/Q_3(x,y)$ по коэффициентам / П. Т. Черевичный // Дифференц. уравнения. – 1970. – Т. 6, № 7. – С. 1318–1319.

5. Черевичный, П. Т. Три теоремы об индексе Пуанкаре для уравнения $y' = P_4(x,y)/Q_4(x,y)$ / П. Т. Черевичный // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9, № 4. – С. 778–779.

6. Красносельский, М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. – 512 с.

References

1. Krasnoselskii M. A., Perov A. I., Povolockii A. I., Zabreiko P. P. *Plane Vector Fields*. Moscow, State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 1963. 245 p. (in Russian).

2. Senchakova N. V. On Poincaré index calculation of zero singular point fo vector fields with homogeneous components. *Vestnik Yaroslavskogo Universiteta* [Bulletin of Yaroslavl University], 1975, no. 12, pp. 38–45 (in Russian).

3. Bocher M. *Introduction to Higher Algebra*. New York, Macmillan Co., 1907.

4. Cherevichnyi P. T. Formulas for calculating index of singular point for the equation $y' = P_3(x,y)/Q_3(x,y)$ with its coefficients. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 1970, vol. 6, no 7, pp. 1318–1319 (in Russian).

5. Cherevichnyi P. T. Three theorems about the Poincaré index for the equation $y' = P_4(x,y)/Q_4(x,y)$. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 1973, vol. 9, no 4, pp. 778–779 (in Russian).

6. Krasnoselskii M. A., Zabreiko P. P. *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1984.

Информация об авторах

Забрейко Петр Петрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: zabreiko@mail.ru

Кривко-Красько Алексей Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры инновационного управления, Институт бизнеса Белорусского государственного университета (ул. Московская, 5, 220007, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: sbmt@mail.ru

Information about the authors

Petr P. Zabreiko – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor of the Department of Functional Analysis and Analytical Economics, Faculty of Physics and the Faculty of Mathematics of the Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: zabreiko@mail.ru

Aleksey V. Krivko-Krasko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Assistant Professor of the Department of Innovation Management, School of Business of the Belarusian State University (5, Moskovskaya Str., 220007, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: sbmt@mail.ru