ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.17
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-32-49

Поступила в редакцию 29.11.2018
Received 29.11.2018

О. И. Дугинов

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

РАЗБИЕНИЕ РАСЩЕПЛЯЕМОГО ГРАФА НА ПОРОЖДЕННЫЕ ПОДГРАФЫ, ИЗОМОРФНЫЕ ЦЕПИ ПОРЯДКА 3

Аннотация. Установление вычислительной сложности задач на графах является актуальной проблемой. В настоящей работе рассматривается задача, в которой требуется определить, существует ли в заданном $3n$-вершинном расщепляемом графе n попарно непересекающихся порожденных подграфов, изоморфных простой цепи порядка 3. Разработан полиномиальный алгоритм, который решает эту задачу. В его основе лежит техника увеличивающих подграфов. Алгоритм может найти применение при решении задач формирования команд.

Ключевые слова: разбиение графа на специальные подграфы, расщепляемый граф, полиномиальный алгоритм

Для цитирования. Дугинов, О. И. Разбиение расщепляемого графа на порожденные подграфы, изоморфные цепи порядка 3 / О. И. Дугинов // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 1. – С. 32–49. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-32-49

O. I. Duginov

Belarusian State University, Minsk, Belarus

PARTITIONING A SPLIT GRAPH INTO INDUCED SUBGRAPHS ISOMORPHIC TO THE PATH OF ORDER 3

Abstract. The study of the computational complexity of problems on graphs is an urgent problem. We show that the problem of deciding whether the vertex set of a given split graph of order $3n$ can be partitioned into induced subgraphs isomorphic to P_3 is a polynomially solvable problem. We develop a polynomial-time algorithm based on the method of augmenting graphs. The developed efficient algorithm can be used for solving team formation problems.

Keywords: partitioning a graph into certain subgraphs, split graph, polynomial-time algorithm

For citation. Duginov O. I. Partitioning a split graph into induced subgraphs isomorphic to the path of order 3. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 32–49 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-32-49

1. Определения и формулировка результата. Все стандартные понятия и обозначения теории графов, не определяемые в работе, можно найти в [1]. В работе рассматриваются конечные неориентированные графы $G = (V, E)$ без кратных ребер и петель с множеством вершин $V = V(G)$ и множеством ребер $E = E(G)$. Множество вершин графа G, смежных с фиксированной вершиной $v \in V$, называется *окружением вершины* v и обозначается через $N_G(v)$ или $N(v)$, если из контекста ясно, о каком графе идет речь. Запись $u \sim v$ выражает тот факт, что вершины u и v графа G смежны. Если вершины u и v не смежны, то пишем $u \nsim v$. Если вершина v смежна со всеми вершинами из множества $S \subseteq V$, то пишем $v \sim S$. Если вершина v не смежна с каждой вершиной из множества $S \subseteq V$, то пишем $v \nsim S$.

Будем говорить, что подграф H графа $G = (V, E)$ покрывает вершину $v \in V$, если подграф H содержит вершину v. Непересекающиеся подграфы графа – подграфы, не имеющие общих вершин.

Граф $G = (V, E)$ называется *двудольным*, если его множество вершин можно разбить на два подмножества A и B так, что ребра графа соединяют вершины из разных подмножеств. Множества A и B называются *долями* графа G. Граф $G = (V, E)$ называется *расщепляемым*, если его множество вершин можно разбить на клику C и независимое множество I.

Порожденным P_3-разбиением графа G называется набор попарно непересекающихся порожденных подграфов графа G, которые изоморфны простой цепи P_3 и покрывают все вершины графа G.

Рассматривается задача Порожденное P_3-Разбиение, которая формулируется следующим образом. Задан граф G с числом вершин, кратным 3, и требуется определить: существует ли порожденное P_3-разбиение графа G. Задача является NP-полной [2]. Интерес представляет изучение вычислительной сложности задачи в предположении, что заданный граф G принадлежит некоторому специальному классу графов [3]. В настоящей работе в качестве такого специального класса графов выбран класс расщепляемых графов. Цель работы заключается в доказательстве следующей теоремы.

Теорема. *Задача* Порожденное P_3-Разбиение *в классе расщепляемых графов решается за полиномиальное время.*

Доказательство состоит из двух этапов – построения полиномиального сведения задачи Порожденное P_3-Разбиение, ограниченной классом расщепляемых графов, к вспомогательной задаче (раздел 2) и доказательства полиномиальной разрешимости вспомогательной задачи (раздел 3).

2. Сведение задачи Порожденное P_3-Разбиение для расщепляемых графов к задаче (Λ,Y)-Разбиение. Расщепляемый граф $G = (C \cup I, E)$ с заданным разбиением его множества вершин на клику C и независимое множество I преобразуем в двудольный граф B с долями C и I, удалив из G все ребра, обе концевые вершины которых принадлежат C. Выделим следующие типы подграфов графа B:

а) Λ-подграф графа B – подграф, состоящий из двух вершин доли I, одной вершины доли C и двух ребер;

б) V-подграф графа B – подграф, состоящий из одной вершины доли I, двух вершин доли C и двух ребер;

в) Y-подграф графа B – подграф, состоящий из одной вершины доли I, двух вершин доли C и одного ребра.

Любой порожденный подграф расщепляемого графа G, изоморфный P_3, содержит три вершины: две вершины доли I и одну вершину доли C или одну вершину доли I и две вершины доли C. Таким образом, все порожденные подграфы графа G, изоморфные P_3, разбиваются на два класса. Подграфам первого класса соответствуют Λ-подграфы графа B. Подграфам второго класса отвечают Y-подграфы графа B. Верно и обратное: Λ-подграфы и Y-подграфы графа B определяют порожденные подграфы графа G, изоморфные P_3. Рассмотрим пример, иллюстрирующий указанные соответствия. На рис. 1 изображены расщепляемый граф G и соответствующий ему двудольный граф B. Сплошные линии обозначают ребра графов, штриховые – отсутствующие ребра с концевыми вершинами, одна из которых принадлежит C, а другая – I. В графе G зафиксированы порожденные подграфы, составляющие порожденное P_3-разбиение графа G. Ребра этих подграфов изображены жирными линиями. В графе B таким же образом выделены соответствующие им Λ-подграфы и Y-подграфы.

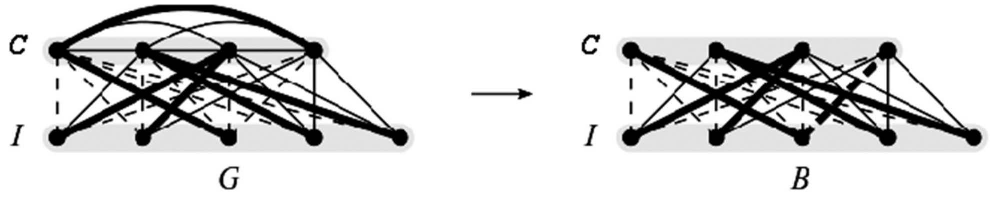

Рис. 1. Расщепляемый граф G и соответствующий ему двудольный граф B

Fig. 1. A split graph and its corresponding bipartite graph B

(Λ,Y)-*разбиением* графа B называется набор попарно непересекающихся Λ-подграфов и Y-подграфов графа B, покрывающих все вершины графа B. Нетрудно видеть, что любое (Λ,Y)-разбиение графа B состоит из

$$\tilde{a} = (2|I| - |C|)/3 \tag{1}$$

Λ-подграфов и

$$\tilde{b} = (2|C| - |I|)/3 \tag{2}$$

Y-подграфов. Ясно, что произвольное порожденное P_3-разбиение расщепляемого графа G можно преобразовать в (Λ,Y)-разбиение графа B и обратно. Если задан расщепляемый граф G, то соответствующий ему двудольный граф B можно построить за полиномиальное время. Следовательно, задача Порожденное P_3-Разбиение полиномиально сводится к задаче (Λ,Y)-Разбиение, которая формулируется так. Задан двудольный граф B и требуется выяснить, существует ли (Λ,Y)-разбиение графа B. В следующем разделе мы покажем, что эта задача решается за полиномиальное время. Отметим также, что если в формулировке задачи (Λ,Y)-Разбиение заменить Y-подграфы на V-подграфы, то получится близкая задача (Λ,V)-Разбиение, которая является NP-полной [4].

Введем обозначения для вершин Λ-подграфа P, V-подграфа Q и Y-подграфа R графа B, изображенных на рис. 2. Произвольным образом упорядочим две вершины графа P, принадлежащие доле I: первую обозначим через $\ell(P)$, а вторую – через $r(P)$. Единственную вершину графа P, принадлежащую доле C, обозначим через $b(P)$. Аналогично произвольно упорядочим две вершины графа Q, принадлежащие доле C: первую обозначим через $\ell(Q)$, а вторую – через $r(Q)$. Оставшуюся третью вершину графа Q обозначим через $b(Q)$. Рассмотрим две вершины графа R, принадлежащие доле C. Одна из них в R изолированная, а другая – не изолированная. Не изолированную вершину обозначим через $\ell(R)$, а изолированную – через $r(R)$. Единственную вершину графа R, принадлежащую доле I, обозначим через $b(R)$.

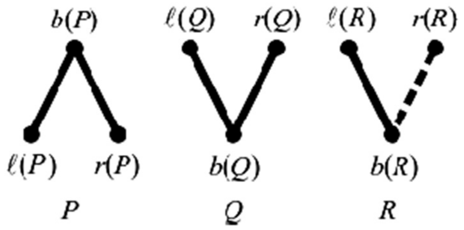

Рис. 2. Обозначения вершин

Fig. 2. Notations of vertices

3. Полиномиальная разрешимость задачи (Λ,Y)-Разбиение. Пусть задан двудольный граф $B=(C\cup I,E)$ с числом вершин, кратным 3. Найдем значения величин $\tilde a$ и $\tilde b$ по формулам (1) и (2). Нетрудно видеть, что делимость числа $|C|+|I|$ на 3 влечет целочисленность величин $\tilde a,\tilde b$. Поэтому всюду далее будем предполагать, что $\tilde a,\tilde b$ – это целые числа. Возможны только следующие случаи: *случай а*) $\tilde a<0\vee\tilde b<0$, *случай б*) $\tilde a=0\wedge\tilde b>0$, *случай в*) $\tilde a>0\wedge\tilde b=0$, *случай г*) $\tilde a>0\wedge\tilde b=1$, *случай д*) $\tilde a>0\wedge\tilde b>1$. Каждый из этих случаев рассмотрим по отдельности.

Случай а). В этом случае, очевидно, не существует (Λ,Y)-разбиения двудольного графа B.

Случай б). Этот случай сводится к задаче о совершенном паросочетании в двудольном графе, которая решается за полиномиальное время [5]. Двудольный граф B преобразуем в двудольный граф B', добавив в граф для каждой вершины x доли I новую вершину x' и ребра, соединяющие вершину x' с каждой вершиной множества $C\setminus N_B(x)$. Утверждается, что существует (Λ,Y)-разбиение графа B тогда и только тогда, когда в графе B' существует совершенное паросочетание. Произвольный Y-подграф F графа B с вершиной $b(F)=x$ соответствует паре несмежных ребер $\{x,\ \ell(F)\}$ и $\{x',\ r(F)\}$ графа B', и каждая пара несмежных ребер $\{x,y\}$ и $\{x',z\}$ графа B' отвечает Y-подграфу F графа B с вершинами $b(F)=x$, $\ell(F)=y$ и $r(F)=z$. Такое соответствие реализует возможность преобразования друг в друга (Λ,Y)-разбиения графа B и совершенного паросочетания графа B'.

Случай в). Аналогично сведем решение этого случая к решению задачи о совершенном паросочетании в двудольном графе. Двудольный граф B преобразуем в двудольный граф B', добавив в граф для каждой вершины x доли C новую вершину x' и ребра, соединяющие вершину x' с каждой вершиной множества $N_B(x)$. Нетрудно показать, что (Λ,Y)-разбиение графа B существует тогда и только тогда, когда в графе B' существует совершенное паросочетание.

Случай г). Этот случай задачи сведем к предыдущему. Ясно, что (Λ,Y)-разбиение графа B существует тогда и только тогда, когда в графе B найдется Y-подграф F , удаление вершин которого приводит к графу $B - V(F)$, допускающему (Λ,Y)-разбиение. Если существует (Λ,Y)-разбиение графа $B - V(F)$, то число Y-подграфов в таком разбиении равно 0. Следовательно, задача для графа $B - V(F)$ может быть решена в рамках случая *в*). Таким образом, для того чтобы решить задачу для графа B, достаточно перебрать все возможные Y-подграфы F графа B (число которых имеет полиномиальную зависимость от порядка графа B), и для каждого такого подграфа F решить задачу относительно графа $B - V(F)$.

Случай д). (Λ,V,Y)-*разбиением* графа B называется набор попарно непересекающихся Λ-подграфов, V-подграфов и Y-подграфов графа B, которые покрывают все вершины графа B. Заметим, что в любом (Λ,V,Y)-разбиении графа B число Λ-подграфов равно $\tilde{a}$, а общее число V-подграфов и Y-подграфов равно $\tilde{b}$. Выяснить, существует ли (Λ,V,Y)-разбиение графа B и в случае существования найти его, можно за полиномиальное время (см. раздел 4). Если нет (Λ,V,Y)-разбиения графа B, то нет и (Λ,Y)-разбиения графа B (поскольку второе является частным случаем первого). Поэтому интерес представляет только ситуация, в которой существует (Λ,V,Y)-разбиение R графа B. Идея состоит в том, чтобы итеративно уменьшать число V-подграфов в разбиении R с помощью локальных перестроек его графов, поддерживая следующий инвариант: R – (Λ,V,Y)-разбиение графа B. Ясно, что если удастся исключить все V-подграфы из R, то в результате получится (Λ,Y)-разбиение графа B.

Далее приведем локальные перестройки графов (Λ,V,Y)-разбиения R графа B, в результате которых получаются (Λ,V,Y)-разбиения графа B с меньшим числом V-подграфов.

Примем ряд соглашений. Если F – это граф из (Λ,V,Y)-разбиения R графа B такой, что $b(F) = x$, то после преобразования разбиения R символом F будем обозначать граф получившегося разбиения, содержащий вершину x. Далее в этом разделе для краткости вместо (Λ,V,Y)-разбиения графа B будем писать просто разбиение графа B.

Преобразование (П1). Пусть в разбиении R графа B существуют V-подграфы F и F' такие, что вершина $b(F)$ не смежна хотя бы с одной из вершин $\ell(F')$ и $r(F')$, а вершина $b(F')$ не смежна хотя бы с одной из вершин $\ell(F)$ и $r(F)$. Для определенности предположим, что $b(F) \nsim \ell(F')$ и $b(F') \nsim \ell(F)$. Преобразуем в разбиении R графы F и F' в Y-подграфы так. В графах F и F' поменяем местами вершины $\ell(F)$ и $\ell(F')$, т. е. в графе F заменим вершину $\ell(F)$ на вершину $\ell(F')$ и в графе F' заменим вершину $\ell(F')$ на вершину $\ell(F)$, как показано на рис. 3, *a*. В результате получим разбиение графа B с меньшим числом V-подграфов.

Преобразование (П2). Пусть в разбиении R графа B существуют V-подграфы F и F' такие, что вершина $b(F)$ не смежна по крайней мере с одной из двух вершин $\ell(F')$, $r(F')$ и $b(F') \sim \{\ell(F), r(F)\}$. Для определенности предположим, что $b(F) \nsim \ell(F')$. Преобразуем в разбиении R графы F и F' в V-подграф и Y-подграф, как показано на рис 3, *b*. В результате получим разбиение графа B с меньшим числом V-подграфов. Нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы.

Л е м м а 1. *Если к разбиению R графа B не применимы преобразования* (П1) *и* (П2), *то подграф графа B, порожденный множеством вершин* V-*подграфов разбиения R, изоморфен полному двудольному графу.*

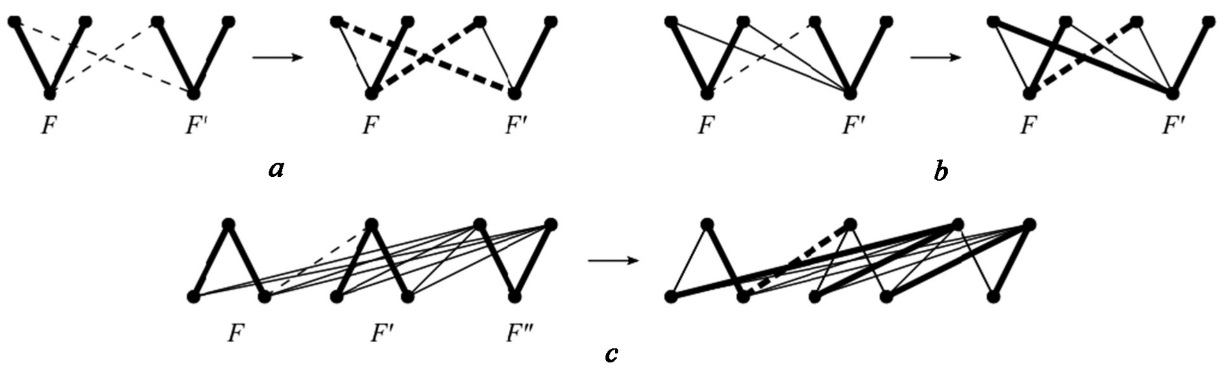

Рис. 3. Преобразование: *a* – (П1); *b* – (П2); *c* – (П3)

Fig. 3. Transformation: *a* – (П1) ; *b* – (П2) ; *c* – (П3)

Пусть подграф графа B, порожденный множеством вершин V-подграфов разбиения R, изоморфен полному двудольному графу. Классифицируем все Λ-подграфы разбиения R на два типа. Скажем, что Λ-подграф $F \in R$ имеет первый тип, если в R найдется V-подграф F' такой, что выполняется по крайней мере одно из следующих условий: *а*) $b(F) \nsim b(F')$ или *б*) хотя бы одна из вершин $\ell(F)$ и $r(F)$ не смежна по крайней мере с одной из вершин $\ell(F')$ и $r(F')$. Все остальные Λ-подграфы разбиения R отнесем ко второму типу. Заметим, что Λ-подграф $F \in R$ является Λ-подграфом второго типа тогда и только тогда, когда подграф графа B, порожденный множеством вершин графа F и множеством вершин V-подграфов разбиения R, изоморфен полному двудольному графу.

Преобразование (П3). Пусть подграф графа B, порожденный множеством вершин V-подграфов разбиения R, изоморфен полному двудольному графу. Пусть также в разбиении R существуют Λ-подграфы F и F' второго типа такие, что хотя бы одна из вершин $\ell(F)$ и $r(F)$ не смежна с вершиной $b(F')$. Для определенности допустим, что $r(F) \nsim b(F')$. Пусть F'' – произвольный V-подграф разбиения R. Преобразуем в разбиении R графы F, F' и F'', как показано на рис. 3, *c*. В результате получим разбиение графа B с меньшим числом V-подграфов.

Л е м м а 2. *Если к разбиению R графа B не применимы преобразования* (П1), (П2) *и* (П3), *то подграф графа B, порожденный множеством вершин Λ-подграфов второго типа и* V-*подграфов разбиения R, изоморфен полному двудольному графу.*

Будем говорить, что разбиение R графа B удовлетворяет условию (У1), если подграф графа B, порожденный множеством вершин Λ-подграфов второго типа и V-подграфов разбиения R, изоморфен полному двудольному графу.

Пусть разбиение R удовлетворяет условию (У1). Сформируем упорядоченный набор X вершин доли C графа B следующим образом. Пусть X' – это упорядоченный (произвольным образом) набор вершин доли C, которые покрываются Λ-подграфами второго типа и V-подграфами разбиения R. Построим упорядоченный набор X'' вершин так. Изначально, набор X'' положим пустым. Будем добавлять вершины в конец набора X'' по следующим двум правилам:

а) если F – Y-подграф разбиения R такой, что в множестве X' существует вершина x, смежная с вершиной $b(F)$, то добавим в конец набора X'' вершину $\ell(F)$;

б) если F – Y-подграф разбиения R такой, что в множестве X' существует вершина x, не смежная с вершиной $b(F)$, то добавим в конец набора X'' вершину $r(F)$.

Применим эти два правила для каждого Y-подграфа F разбиения R. В результате получим упорядоченный набор вершин X''. Далее построим набор X''' вершин так. Изначально положим набор X''' пустым. Добавление вершин в набор X''' будем осуществлять в соответствии со следующими двумя правилами:

а) если F – Y-подграф разбиения R такой, что $\ell(F) \notin X'' \cup X'''$ и найдется вершина $x \in X'' \cup X'''$, смежная с вершиной $b(F)$, то добавим в конец набора X''' вершину $\ell(F)$;

б) если F – Y-подграф разбиения R такой, что $r(F) \notin X'' \cup X'''$ и найдется вершина $x \in X'' \cup X'''$, не смежная с вершиной $b(F)$, то добавим в конец набора X''' вершину $r(F)$.

Будем применять эти два правила, пока хотя бы одно из них применяется.

Пусть набор вершин X получается в результате конкатенации наборов X', X'' и X'''.

Классифицируем все Y-подграфы разбиения R на три типа относительно набора вершин X. К первому типу отнесем все Y-подграфы F, для которых $b(F) \sim X$. Ко второму типу отнесем все Y-подграфы F, для которых $b(F) \nsim X$. Все остальные Y-подграфы разбиения R отнесем к третьему типу. Справедливость следующего утверждения непосредственно следует из способа построения набора вершин X и классификации Y-подграфов разбиения R.

У т в е р ж д е н и е 1. Набор вершин X содержит по одной вершине из каждого Y-подграфа первого и второго типов, а также по две вершины из каждого Y-подграфа третьего типа. При этом в наборе X содержится вершина $\ell(F)$, если F – Y-подграф первого типа, вершина $r(F)$, если F – Y-подграф второго типа, и вершины $\ell(F)$ и $r(F)$, если F – Y-подграф третьего типа.

У т в е р ж д е н и е 2. В наборе вершин X первой вершиной любого Y-подграфа $F \in R$ является вершина $f \in \{\ell(F), r(F)\}$, для которой найдется такая вершина $x \in X'$, что $x \sim b(F)$, если $f \sim b(F)$, и $x \nsim b(F)$ в противном случае.

Доказательство. Пусть F – произвольный фиксированный Y-подграф разбиения R и f – первая в наборе X из вершин графа F. Поскольку набор X' непустой, то $f \in X''$. Если $f = \ell(F)$, то $f \sim b(F)$ и, по построению набора X'' (правило *а*), существует вершина $x \in X'$, смежная с вершиной $b(F)$. Если $f = r(F)$, то $f \nsim b(F)$ и, по построению набора X'' (правило *б*), существует вершина $x \in X'$, не смежная с вершиной $b(F)$. Утверждение 2 доказано.

Лемма 3. *Пусть разбиение R графа B удовлетворяет условию* (У1). *В разбиении R зафиксируем произвольный* V-*подграф F и произвольный* Y-*подграф F^* третьего типа. Утверждается, что разбиение R графа B за полиномиальное время можно преобразовать в разбиение R' графа B таким образом, чтобы и преобразование, и результирующее разбиение R' обладали одним из следующих двух комплектов свойств:* 1) *число* V-*подграфов в R' меньше, чем в R или* 2) *преобразование и разбиение R' удовлетворяют условиям:*

а) граф $F^* \in R$ без изменений входит в разбиение R';

б) граф $F \in R'$ является V-*подграфом, и его вершины $\ell(F)$, $r(F)$ таковы, что одна из них смежна с $b(F^*)$, а другая, наоборот, не смежна;*

в) Λ-*подграфы первого типа без изменений входят в разбиение R';*

г) на каждом шаге преобразования в графе F осуществляется замена не более одной вершины $\ell(F)$ и $r(F)$, граф F остается V-*подграфом и происходит переход к разбиению графа B с тем же числом* V-*подграфов.*

Доказательство. Пусть $s = |X|$ и

$$F_1, F_2, \ldots, F_s \tag{3}$$

– последовательность Λ-подграфов второго типа, V-подграфов и Y-подграфов разбиения R, в которой граф имеет индекс i (т. е. располагается на i-й позиции), если его вершина в наборе X идет i-й по счету. По утверждению 1 набор X содержит по две вершины каждого Y-подграфа третьего типа. Следовательно, в (3) каждый Y-подграф третьего типа встречается дважды. Для каждого такого Y-подграфа зафиксируем его вторую позицию в последовательности (3). Получим цепочку позиций

$$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_j < \ldots < i_k \le s, \tag{4}$$

где $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Докажем индукцией по j, что для любого Y-подграфа $F^* = F_{i_j}$ третьего типа заявленное в лемме преобразование разбиения R можно осуществить с помощью подходящей перестройки графов $F_1, F_2, \ldots, F_{i_j - 1}$.

Пусть $j = 1$. По построению набора X существуют вершины $x, y \in X$ такие, что вершины x и y содержатся в графах $F_q \in R, F_p \in R$ соответственно, причем $q < i_1$ и $p < i_1$, $x \sim b(F_{i_1})$ и $y \nsim b(F_{i_1})$.

Если одна из вершин $\ell(F), r(F)$ смежна с вершиной $b(F_{i_1})$, а другая, наоборот, нет, то нет необходимости в перестройке исходного разбиения R, так как для графа $F^* = F_{i_1}$ относительно разбиения $R' = R$ условия *а*), *б*), *в*), *г*) леммы выполнены. Поэтому можно предполагать, что $b(F_{i_1}) \sim \{\ell(F), r(F)\}$ или $b(F_{i_1}) \nsim \{\ell(F), r(F)\}$. Для определенности допустим, что $b(F_{i_1}) \sim \{\ell(F), r(F)\}$ (для второй ситуации рассуждения аналогичны и отличаются только тем, что вместо вершины y и графа F_p необходимо рассматривать вершину x и граф F_q).

Если F_p – Λ-подграф второго типа, то в наборе X поменяем местами вершину y и вершину $r(F)$, после чего в графах F_p, F поменяем местами вершины y и $r(F)$ (т. е. в графе F_p вершину y заменим на вершину $r(F)$, а в графе F вершину $r(F)$ заменим на вершину y, как показано на рис. 4, *a*). Получим новое разбиение R', относительно которого для $F^* = F_{i_1}$ выполняются условия *а*), *б*), *в*) и *г*) леммы. Заметим, что последовательность (3) по-прежнему удовлетворяет условию: граф стоит на позиции i, если его вершина в наборе X идет i-й по счету.

Если F_p – V-подграф, то поменяем местами вершины y и $\ell(F)$ в наборе X, а также в графах F_p и F (т. е. в графе F_p вершину y заменим на вершину $\ell(F)$, а в графе F вершину $\ell(F)$ заменим на вершину y, как показано на рис. 4, *b*). Получим новое разбиение R', относительно которого

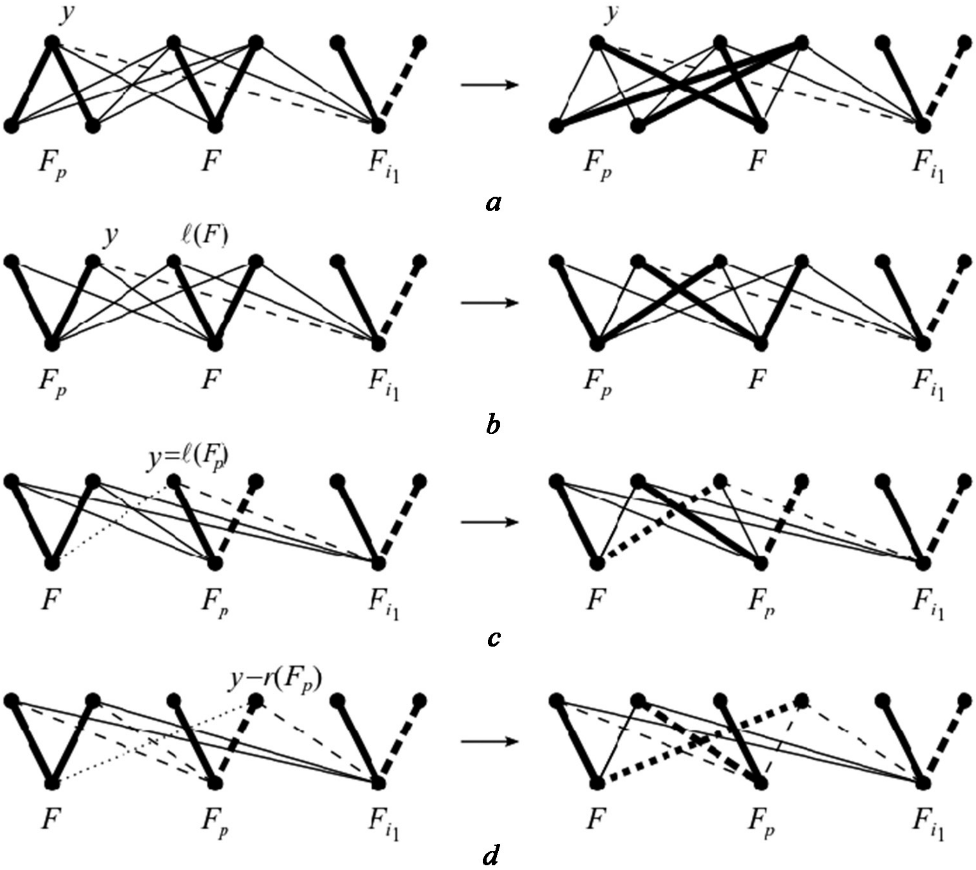

Рис. 4. Преобразование разбиения R в случае, когда граф F_p является:
a – Λ-подграфом; b – V-подграфом; c – Y-подграфом первого типа; d – Y-подграфом второго типа

Fig. 4. Transformation of a partition R for the case, when F_p is an Λ-subgraph (a), V-subgraph (b), Y-subgraph of the first type (c) and Y-subgraph of the second type (d)

для $F^* = F_{i_1}$ выполняются условия *а*), *б*), *в*) и *г*) леммы. Заметим, что последовательность (3) по-прежнему удовлетворяет условию: граф стоит на позиции i, если его вершина в X идет i-й по счету.

Пусть F_p – Y-подграф первого типа. Поскольку набор X содержит ровно одну вершину графа F_p и $b(F_p) \sim X$, то $y = \ell(F_p)$. Поменяем местами вершины $r(F)$ и y в наборе X, а также в графах F и F_p, как показано на рис. 4, *c*. Если $b(F) \not\sim y$, то в результате графы F и F_p преобразуются в два Y-подграфа, и мы получим разбиение графа B с меньшим числом V-подграфов. Если $b(F) \sim y$, то мы получим разбиение R' графа B, относительно которого для графа $F^* = F_{i_1}$ выполняются условия *а*), *б*), *в*) и *г*) леммы.

Пусть F_p – Y-подграф второго типа. Поскольку набор X содержит ровно одну вершину графа F_p и $b(F_p) \not\sim X$, то $y = r(F_p)$. Поменяем местами вершины $r(F)$ и y в наборе X, а также в графах F и F_p, как показано на рис. 4, *d*. Если $b(F) \not\sim y$, то в результате графы F и F_p преобразуются в два Y-подграфа и мы получим разбиение графа B с меньшим числом V-подграфов. Если $b(F) \sim y$, то мы получим разбиение R' графа B, относительно которого для графа $F^* = F_{i_1}$ выполняются условия *а*), *б*), *в*) и *г*) леммы.

Пусть F_p – Y-подграф третьего типа. Вершина y – первая из вершин графа F_p в наборе X. В самом деле, если бы в наборе X была вершина графа F_p, стоящая до вершины y, то цепочка индексов (4) начиналась бы не с индекса i_1, а с индекса p. По утверждению 2 существует вершина $z \in X'$ такая, что $y \sim b(F_p)$ тогда и только тогда, когда $z \sim b(F_p)$. По построению множества X' вершина z принадлежит некоторому Λ-подграфу второго типа или V-подграфу разбиения R. Если вершина z принадлежит Λ-подграфу, то мы всегда можем совершить обмен вершинами так, чтобы

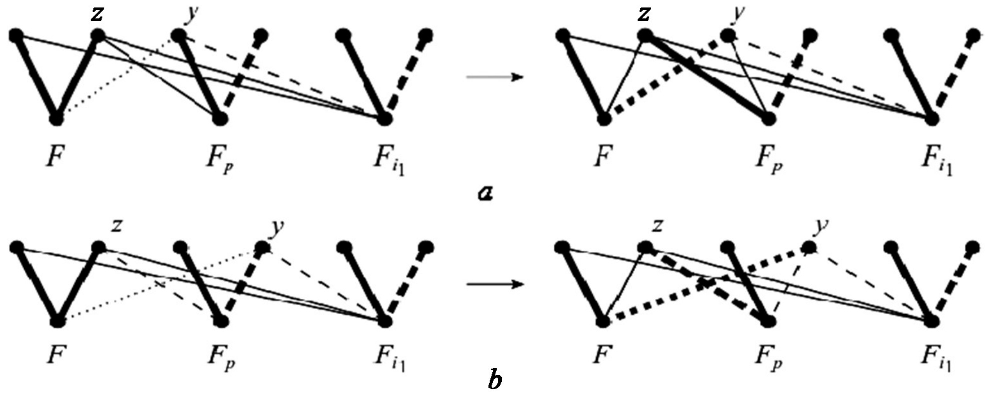

Рис. 5. Преобразование разбиения R в случае, когда $y = \ell(F_p)$ (*a*) и $y = r(F_p)$ (*b*)

Fig. 5. Transformation of a partition R for the case, when $y = \ell(F_p)$ (*a*) and $y = r(F_p)$ (*b*)

вершина z оказалась в некотором V-подграфе (поскольку подграф графа B, порожденный множеством вершин Λ-подграфов второго типа и V-подграфов разбиения R, изоморфен полному двудольному графу). Если V-подграф, содержащий z, отличен от F, то мы всегда можем поменять местами вершину z и вершину $r(F)$ (поскольку подграф графа B, порожденный множеством вершин V-подграфов разбиения R, изоморфен полному двудольному графу). Не теряя общности, допустим, что вершина z – это вершина графа F.

Возможны только следующие два случая: $y = \ell(F_p)$ и $y = r(F_p)$. В обоих случаях поменяем местами вершины z, y и в наборе X, и в графах F, F_p (рис. 5).

Если $b(F) \nsim y$, то в результате графы F и F_p преобразуются в два Y-подграфа, и мы получим разбиение графа B с меньшим числом V-подграфов. Если $b(F) \sim y$, то мы получим разбиение R' графа B, относительно которого для графа $F^* = F_{i_1}$ выполняются условия *а*), *б*), *в*) и *г*) леммы.

Пусть $j > 1$. По построению набора X существуют вершины $x, y \in X$ такие, что вершины x, y содержатся соответственно в графах F_q, F_p, причем $p < i_j$ и $q < i_j$, $x \sim b(F_{i_j})$ и $y \nsim b(F_{i_j})$. Если одна из вершин $\ell(F)$, $r(F)$ смежна с вершиной $b(F_{i_j})$, а другая, наоборот, нет, то нет необходимости в перестройке исходного разбиения R, так как относительно $R' = R$ для графа $F^* = F_{i_j}$ условия *а*), *б*), *в*) и *г*) леммы выполнены. Поэтому можно предполагать, что $b(F_{i_j}) \sim \{\ell(F), r(F)\}$ или $b(F_{i_j}) \nsim \{\ell(F), r(F)\}$. Для определенности допустим, что $b(F_{i_j}) \sim \{\ell(F), r(F)\}$ (для второй ситуации рассуждения аналогичны). Если граф F_p – это Λ-подграф второго типа, V-подграф и Y-подграф первого или второго типов, то преобразования разбиения R аналогичны рассмотренным выше для графа $F^* = F_{i_1}$ (достаточно граф F_{i_1} заменить на F_{i_j}). Пусть теперь граф F_p является Y-подграфом третьего типа.

Так как $p < i_j$, то по индуктивному предположению для графа $F^* = F_p$ существует перестройка графов $F_1, F_2, \ldots, F_{p-1}$, приводящая к новому разбиению R' графа B. Осуществим такую перестройку. Если в R' число V-подграфов меньше, чем в R, то утверждение для графа $F^* = F_{i_j}$ доказано. Пусть теперь относительно R' для графа $F^* = F_p$ выполняются условия *а*), *б*), *в*) и *г*) леммы. Согласно свойству *б*) вершина $b(F_p)$ смежна ровно с одной из вершин $\ell(F)$, $r(F)$. Не теряя общности, пусть $b(F_p) \sim \ell(F)$ и $b(F_p) \nsim r(F)$. Заметим, что в результате перестройки граф F, вообще говоря, может измениться и, как следствие, условие $b(F_{i_j}) \sim \{\ell(F), r(F)\}$ может нарушиться. Поэтому необходимо рассмотреть все возможные ситуации: вершина $b(F_{i_j})$ смежна ровно с одной из вершин $\ell(F)$ и $r(F)$; $b(F_{i_j}) \sim \{\ell(F), r(F)\}$ и $b(F_{i_j}) \nsim \{\ell(F), r(F)\}$. В первой из этих трех ситуаций разбиение R' не нуждается в дополнительном преобразовании. Относительно текущего разбиения R' для графа $F^* = F_{i_j}$ выполнены условия *а*), *б*), *в*) и *г*) леммы.

Пусть $b(F_{i_j}) \sim \{\ell(F), r(F)\}$. Если $y = \ell(F_p)$, то дополнительно поменяем местами вершины y и $\ell(F)$ в наборе X и в графах F и F_p. Если $y = r(F_p)$, то поменяем местами вершины y и $r(F)$ в наборе X и в графах F и F_p. Нетрудно видеть, что если $b(F) \nsim y$, то в результате такого преобразования получается новое разбиение с меньшим числом V-подграфов. В противном случае получается новое разбиение графа B, относительно которого для графа $F^* = F_{i_j}$ выполняются условия *а*), *б*), *в*) и *г*) леммы.

Пусть $b(F_{i_j}) \nsim \{\ell(F), r(F)\}$, т. е. вершина $b(F_{i_j})$ не смежна ни с одной из вершин $\ell(F)$, $r(F)$. Изначально до перестройки графов $F_1, F_2, \dots, F_{p-1}$ относительно исходного разбиения R, вершина $b(F_{i_j})$, наоборот, смежна с обеими вершинами $\ell(F)$, $r(F)$. По индуктивному предположению за один шаг процедуры перестройки в графе F изменяется не более, чем одна из вершин $\ell(F)$, $r(F)$ так, что F остается V-подграфом и происходит переход к разбиению графа B с тем же числом V-подграфов. Следовательно, в ходе работы процедуры перестройки разбиения R наступит момент, когда вершина $b(F_{i_j})$ будет смежна ровно с одной из вершин $\ell(F)$, $r(F)$. В этот момент «заморозим» дальнейшую перестройку графов $F_1, F_2, \dots, F_{p-1}$. Относительно получившегося в результате разбиения для графа $F^* = F_{i_j}$ выполнены условия *а*), *б*), *в*) и *г*) леммы. Лемма доказана.

Обозначим преобразование разбиения R графа B из леммы 3 через (ПЛ).

Преобразование (П4). Построим набор вершин X и классифицируем Λ-подграфы разбиения R на два типа и Y-подграфы разбиения R на три типа. Пусть разбиение R удовлетворяет условию (У1). Пусть также существует вершина $x \in X$, для которой в разбиении R найдется такой V-подграф F, что $b(F) \nsim x$, или такой Λ-подграф F' второго типа, что хотя бы одна из двух его вершин $\ell(F')$, $r(F')$ не смежна с вершиной x. В этом случае уменьшим число V-подграфов в R следующим образом.

Сперва заметим, что случай Λ-подграфа F' может быть сведен к случаю V-подграфа F. В самом деле, пусть существуют вершина $x \in X$ и Λ-подграф $F' \in R$ второго типа такие, что хотя бы одна из вершин $\ell(F')$, $r(F')$ не смежна с x. Не теряя общности, допустим, что $\ell(F') \nsim x$. Выберем в R произвольный V-подграф L. В графах L и F' поменяем местами вершины $b(L)$ и $\ell(F')$. В результате графы L и F' разбиения R преобразуются в Λ-подграф второго типа и V-подграф F, при этом $b(F) \nsim x$.

Пусть существуют вершина $x \in X$ и V-подграф F разбиения R такие, что $b(F) \nsim x$. Заметим, что вершина x не содержится в V-подграфах и Λ-подграфах второго типа (поскольку разбиение R удовлетворяет условию (У1)). Если x – это вершина Y-подграфа F' первого типа (второго типа), то преобразуем графы F и F' разбиения R, как показано на рис. 6, *a* (соответственно на рис. 6*, b*). В результате получим разбиение графа B с меньшим числом V-подграфов. Пусть x – это вершина Y-подграфа F' третьего типа. Применим к R преобразование (ПЛ) относительно графов F и $F^* = F'$. Если результирующее разбиение R' – разбиение с меньшим числом V-подграфов

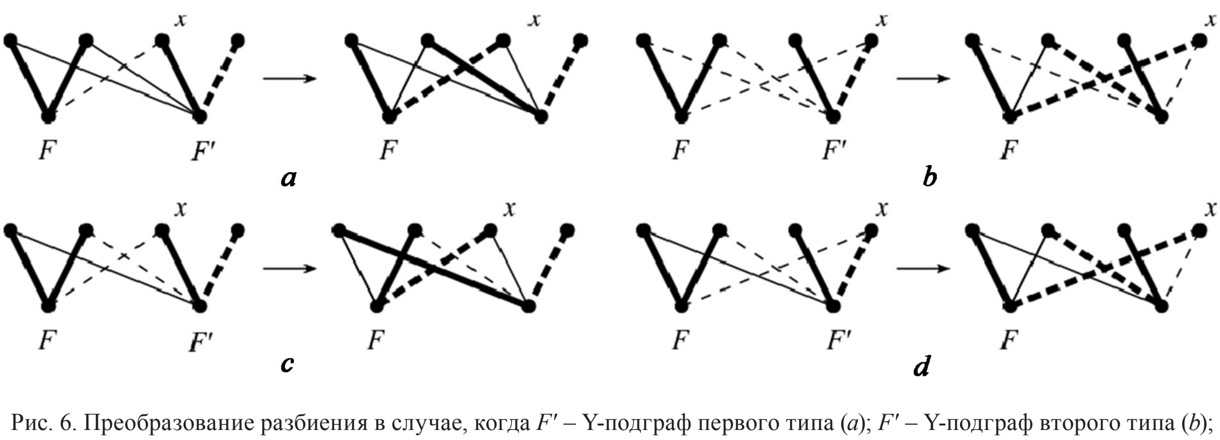

Рис. 6. Преобразование разбиения в случае, когда F' – Y-подграф первого типа (*a*); F' – Y-подграф второго типа (*b*); F' – Y-подграф третьего типа и $x = \ell(F')$ (*c*); F'– Y-подграф третьего типа и $x = r(F')$ (*d*)

Fig. 6. Transformation of a partition for the case, when F' is an Y-subgraph of the first type (*a*); F' is an Y-subgraph of the second type (*b*); F' is an Y-subgraph of the third type and $x = \ell(F')$ (*c*); F' is an Y-subgraph of the third type and $x = r(F')$ (*d*)

по сравнению с исходным разбиением R, то положим R' результатом преобразования (П4). В противном случае граф F' без изменений входит в R' и вершина $b(F')$ смежна ровно с одной из вершин $\ell(F)$ и $r(F)$. Не теряя общности, допустим, что $b(F') \sim \ell(F)$ и $b(F') \nsim r(F)$. Если $x = \ell(F')$ ($x = r(F')$), то преобразуем графы F и F' разбиения R' в два Y-подграфа, как показано на рис. 6, *c* (соответственно рис. 6, *d*). В результате получится новое разбиение графа B с меньшим числом V-подграфов.

Будем говорить, что разбиение R удовлетворяет условию (У2), если:

а) разбиение R удовлетворяет условию (У1);

б) для любого V-подграфа $F \in R$ выполняется $b(F) \sim X$;

в) для любого Λ-подграфа $F' \in R$ второго типа выполняется $\ell(F') \sim X$ и $r(F') \sim X$.

Справедлива следующая

Л е м м а 4. *Если к разбиению R графа B не применимы преобразования* (П1), (П2), (П3) *и* (П4), *то разбиение R удовлетворяет условию* (У2).

Преобразование (П5). Построим набор вершин X и классифицируем Λ-подграфы разбиения R на два типа и Y-подграфы разбиения R на три типа. Пусть разбиение R удовлетворяет условию (У2). Пусть также существуют Λ-подграф $F \in R$ первого типа и вершины $x, y \in X'$ такие, что хотя бы одна из вершин $\ell(F)$ и $r(F)$ смежна ровно с одной из вершин x и y. Не теряя общности, допустим, что $r(F) \sim x$ и $r(F) \nsim y$. Так как множество вершин Λ-подграфов второго типа и V-подграфов разбиения R порождает полный двудольный граф, то мы всегда можем перестроить Λ-подграфы и V-подграфы разбиения R таким образом, чтобы вершины x и y принадлежали одному V-подграфу разбиения, который обозначим через F'. Уменьшим число V-подграфов в разбиении R следующим образом.

Если $b(F) \sim b(F')$, то преобразуем графы F и F' разбиения R, как показано на рис. 7, *a*. В результате получим разбиение графа B с меньшим числом V-подграфов. Далее предполагаем, что $b(F) \nsim b(F')$. Если $\ell(F) \sim x$, то преобразуем графы F и F' разбиения R, изображенным на рис. 7, *b* образом. В результате получим разбиение графа B с меньшим числом V-подграфов. Далее предполагаем $\ell(F) \nsim x$. Если $\ell(F) \nsim y$, то преобразуем графы F и F' разбиения R, как показано на рис. 7, *c*. В результате получим разбиение графа B с меньшим числом V-подграфов. Далее предполагаем, что $\ell(F) \sim y$.

Учитывая сделанные предположения, получаем, что подграф графа B, порожденный множеством вершин графов F и F', изоморфен простому циклу C_6. Так как $\tilde{b} > 1$, то в разбиении R существует отличный от F' граф F'', который является V-подграфом или Y-подграфом одного из трех типов. Если F'' – V-подграф, то преобразуем графы F, F' и F'' разбиения R, как показано на рис. 8, *a*. В результате получим разбиение графа B с меньшим числом V-подграфов.

Пусть F'' – Y-подграф первого типа. Если $\ell(F) \sim r(F'')$, то преобразуем графы F, F' и F'' разбиения, как показано на рис. 8, *b*. В противном случае преобразуем графы F, F' и F'' разбиения,

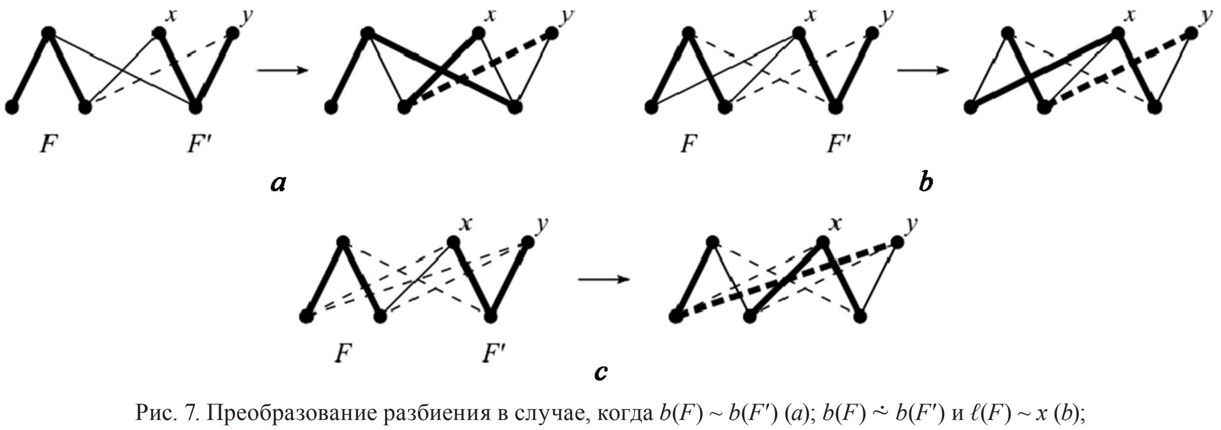

Рис. 7. Преобразование разбиения в случае, когда $b(F) \sim b(F')$ (*a*); $b(F) \nsim b(F')$ и $\ell(F) \sim x$ (*b*); $b(F) \nsim b(F')$, $\ell(F) \nsim x$ и $\ell(F) \nsim y$ (*c*)

Fig. 7. Transformation of a partition for the case when $b(F) \sim b(F')$(*a*); $b(F) \nsim b(F')$ and $\ell(F) \sim x$ (*b*); $b(F) \nsim b(F')$, $\ell(F) \nsim x$ and $\ell(F) \nsim y$ (*c*)

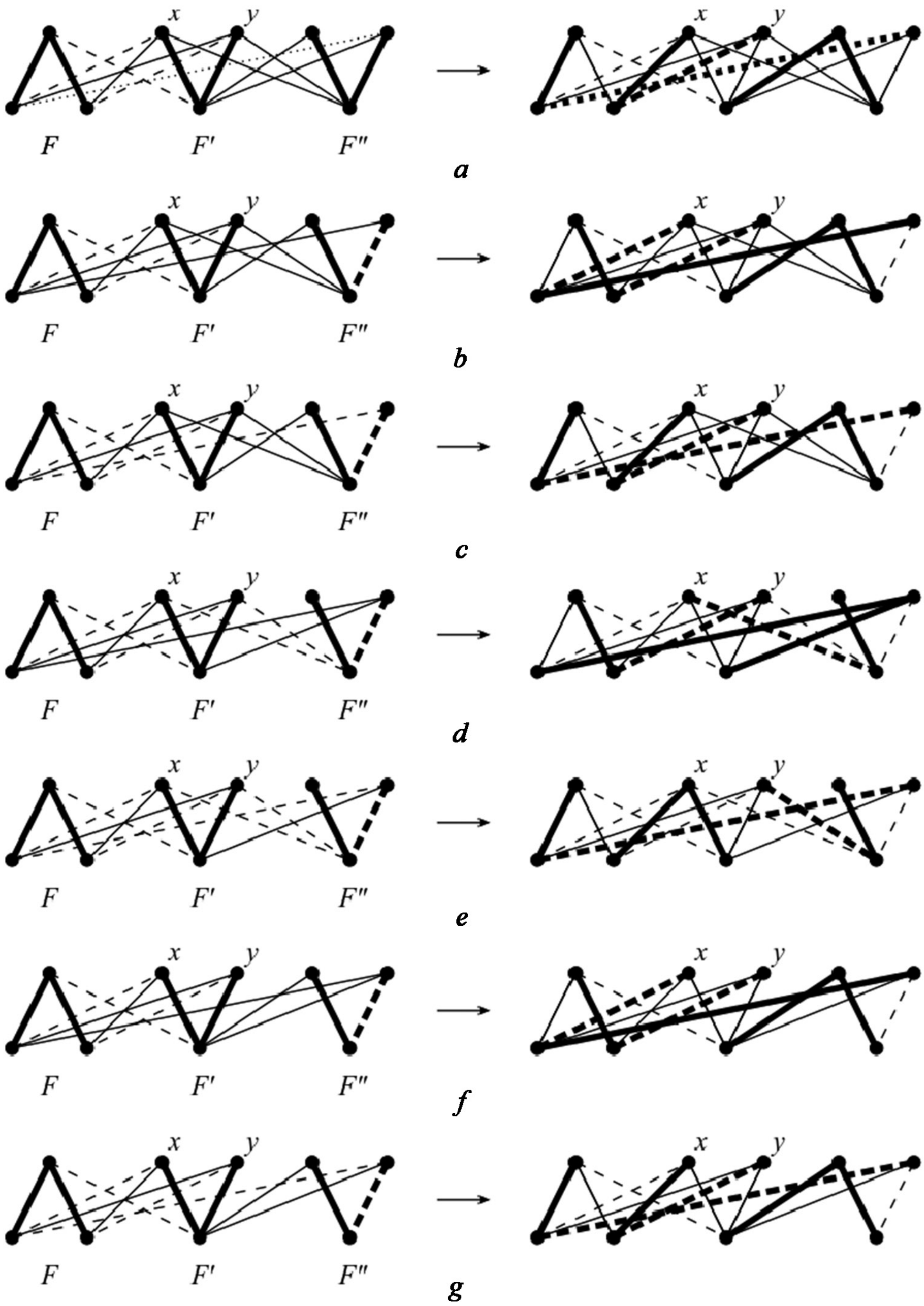

Рис. 8. Преобразование разбиения в случае, когда F'' – V-подграф (*a*); F'' – Y-подграф первого типа и $\ell(F) \sim r(F'')$ (*b*); F'' – Y-подграф первого типа и $\ell(F) \not\sim r(F'')$ (*c*); F'' – Y-подграф второго типа и $\ell(F) \sim r(F'')$ (*d*); F'' – Y-подграф второго типа и $\ell(F) \not\sim r(F'')$ (*e*); F'' – Y-подграф третьего типа и $\ell(F) \sim r(F'')$ (*f*); F'' – Y-подграф третьего типа и $\ell(F) \not\sim r(F'')$ (*g*)

Fig. 8. Transformation of a partition for the case when F'' is an V-subgraph (*a*); F'' is an Y-subgraph of the first type and $\ell(F) \sim r(F'')$ (*b*); F'' is an Y-subgraph of the first type and $\ell(F) \not\sim r(F'')$ (*c*); F'' is an Y-subgraph of the second type and $\ell(F) \sim r(F'')$ (*d*); F'' is an Y-subgraph of the second type and $\ell(F) \not\sim r(F'')$ (*e*); F'' is an Y-subgraph of the third type and $\ell(F) \sim r(F'')$ (*f*); F'' is an Y-subgraph of the third type and $\ell(F) \not\sim r(F'')$ (*g*)

как показано на рис. 8, *c*. В обоих случаях получим разбиение графа B с меньшим числом V-подграфов. Пусть F'' – Y-подграф второго типа. Если $\ell(F) \sim r(F'')$, то преобразуем графы F, F' и F'' разбиения R, как показано на рис. 8, *d*. В противном случае преобразуем графы F, F' и F'' разбиения R, как показано на рис. 8, *e*. В обоих случаях получим разбиение графа B с меньшим числом V-подграфов. Пусть F'' – Y-подграф третьего типа. Если $\ell(F) \sim r(F'')$, то преобразуем

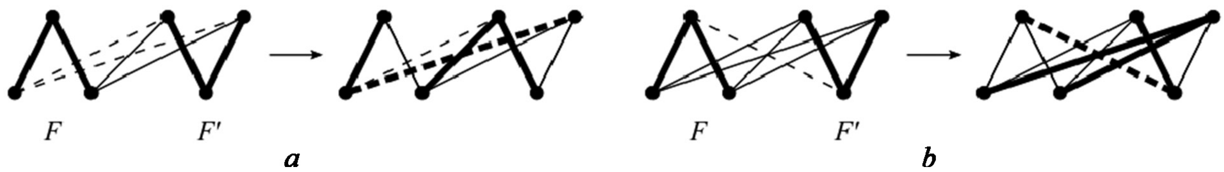

Рис. 9. Преобразования: *a* – (П6); *b* – (П7)

Fig. 9. Transformations: *a* – (П6); *b* – (П7)

графы F, F' и F'' разбиения R, как показано на рис. 8, *f*. В противном случае преобразуем графы F, F' и F'' разбиения R, как показано на рис. 8, *g*.

Преобразование (П6). Построим набор вершин X и классифицируем Λ-подграфы разбиения R на два типа и Y-подграфы разбиения R на три типа. Пусть разбиение R удовлетворяет условию (У2). Пусть также для некоторого Λ-подграфа F первого типа разбиения R одна из вершин $\ell(F)$ и $r(F)$ смежна со всеми вершинами из множества X', а другая не смежна ни с одной из вершин множества X'. Не теряя общности, пусть $\ell(F) \nsim X'$ и $r(F) \sim X'$. Пусть F' – произвольный V-подграф разбиения R. В разбиении R преобразуем графы F и F' изображенным на рис. 9, *a* образом. В результате получим разбиение графа B с меньшим числом V-подграфов.

Преобразование (П7). Построим набор вершин X и классифицируем Λ-подграфы разбиения R на два типа и Y-подграфы разбиения R на три типа. Пусть разбиение R удовлетворяет условию (У2). Пусть также в разбиении R существуют Λ-подграф F первого типа и V-подграф F' такие, что $\ell(F) \sim X'$, $r(F) \sim X'$ и $b(F) \nsim b(F')$. Уменьшим число V-подграфов в разбиении R с помощью преобразования графов F и F' в Λ-подграф и Y-подграф в соответствии с рис. 9, *b*.

Будем говорить, что разбиение R графа B удовлетворяет условию (У3), если:

а) разбиение R удовлетворяет условию (У2);

б) для любого Λ-подграфа $F \in R$ первого типа выполняется $\ell(F) \nsim X'$, $r(F) \nsim X'$.

Справедлива следующая

Л е м м а 5. *Если к разбиению R графа B не применимы преобразования* (П1), (П2), (П3), (П4), (П5), (П6) *и* (П7), *то разбиение R удовлетворяет условию* (У3).

Преобразование (П8). Построим набор вершин X и классифицируем Λ-подграфы разбиения R на два типа и Y-подграфы разбиения R на три типа. Пусть разбиение R удовлетворяет условию (У3). Пусть существуют Λ-подграф F'' первого типа разбиения R и вершина $x \in X \setminus X'$ такие, что хотя бы одна из вершин $\ell(F'')$, $r(F'')$ смежна с вершиной x. Не теряя общности, допустим, что $r(F'') \sim x$. Пусть F – произвольный V-подграф разбиения R. Вершина x содержится в одном из Y-подграфов разбиения R.

Если x – вершина Y-подграфа F' первого типа (второго типа), то в разбиении R преобразуем графы F, F' и F'', как показано на рис. 10, *a* (на рис. 10, *b* соответственно). В результате получим разбиение графа B с меньшим числом V-подграфов.

Пусть x – вершина Y-подграфа F' третьего типа. Положим $F^* = F'$ и применим к разбиению R преобразование (ПЛ) относительно графов F и F^*. Если новое разбиение R' содержит меньше V-подграфов, то положим R' результатом преобразования (П8). В противном случае относительно разбиения R' вершина $b(F')$ смежна ровно с одной из вершин $\ell(F)$, $r(F)$. Не теряя общности, пусть $b(F') \sim \ell(F)$ и $b(F') \nsim r(F)$.

Перейдем от разбиения R к разбиению R'.

Пусть хотя бы одна из вершин $\ell(F'')$, $r(F'')$ смежна по крайней мере с одной из вершин $\ell(F)$, $r(F)$ и хотя бы одна из вершин $\ell(F'')$, $r(F'')$ не смежна по крайней мере с одной из вершин $\ell(F)$, $r(F)$. В этом случае разбиение R' не удовлетворяет условию (У3) (пункт *б*) и по лемме 5 применимо хотя бы одно из преобразований (П1), (П2), (П3), (П4), (П5), (П6) и (П7). Посредством этих преобразований уменьшим число V-подграфов в R'. Полученное разбиение графа B положим результатом текущего преобразования (П8).

Пусть относительно R' выполняется $\ell(F'') \nsim \{\ell(F), r(F)\}$ и $r(F'') \nsim \{\ell(F), r(F)\}$. Если $x = \ell(F')$, то в графах F и F' разбиения R' поменяем местами вершины $\ell(F)$ и x, как показано на рис. 10, *c*. Если $x = r(F')$, то в графах F и F' разбиения R' поменяем местами вершины $r(F)$ и x, как показано

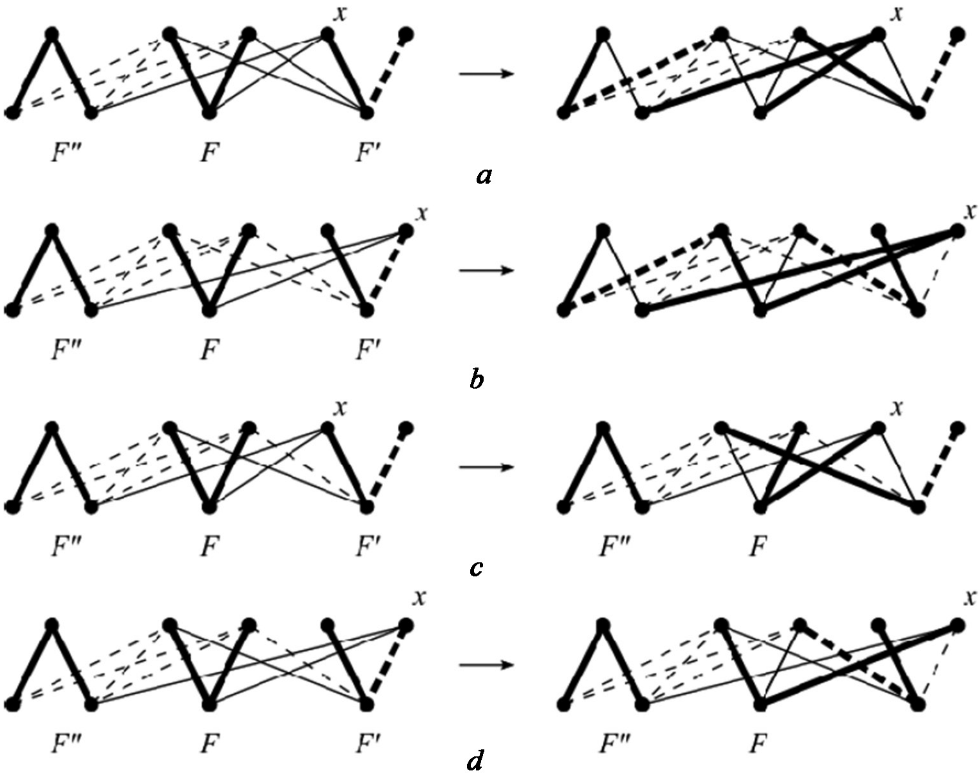

Рис. 10. Преобразование разбиения в случае, когда $F' \in R$ – Y-подграф первого типа (*a*); $F' \in R$ – Y-подграф второго типа (*b*); $F' \in R'$ – Y-подграф третьего типа, $\ell(F'') \dot\sim \{\ell(F), r(F)\}$, $r(F'') \dot\sim \{\ell(F), r(F)\}$ и $x = \ell(F')$ (*c*); $F' \in R'$ – Y-подграф третьего типа, $\ell(F'') \sim \{\ell(F), r(F)\}$, $r(F'') \sim \{\ell(F), r(F)\}$ и $x = r(F')$ (*d*)

Fig. 10. Transformation of a partition for the case, when $F' \in R$ is an Y-subgraph of the first type (*a*); $F' \in R$ is an Y-subgraph of the second type (*b*); $F' \in R'$ is an Y-subgraph of the third type, $\ell(F'') \sim \{\ell(F), r(F)\}$, $r(F'') \sim \{\ell(F), r(F)\}$ and $x = \ell(F')$ (*c*); $F' \in R'$ is an Y-subgraph of the third type, $\ell(F'') \sim \{\ell(F), r(F)\}$, $r(F'') \sim \{\ell(F), r(F)\}$ and $x = r(F')$ (*d*)

на рис. 10, *d*. Получившееся в результате разбиение графа B обозначим через R''. Графы F и F'' разбиения R'' такие, что $r(F'') \dot\sim \ell(F)$ и $r(F'') \sim r(F)$. Поэтому разбиение R'' не удовлетворяет условию (У3) (пункт *б*). По лемме 5 к разбиению R'' применимо хотя бы одно из преобразований (П1), (П2), (П3), (П4), (П5), (П6) и (П7). Посредством этих преобразований уменьшим число V-подграфов в R''. Полученное разбиение графа B положим результатом текущего преобразования (П8).

Пусть относительно разбиения R' выполняется $\ell(F'') \sim \{\ell(F), r(F)\}$ и $r(F'') \sim \{\ell(F), r(F)\}$. Преобразование (ПЛ), переводящее разбиение R в разбиение R', не изменяет Λ-подграфы первого типа разбиения R, и на каждом шаге этого преобразования в графе F изменяется не более чем одна из вершин $\ell(F)$, $r(F)$ так, что F остается V-подграфом. Учитывая этот факт и то, что относительно исходного разбиения R выполняется $\ell(F'') \dot\sim \{\ell(F), r(F)\}$ и $r(F'') \dot\sim \{\ell(F), r(F)\}$, получаем, что на некоторой итерации i преобразования (ПЛ) возникнет ситуация, в которой хотя бы одна из вершин $\ell(F'')$, $r(F'')$ смежна ровно с одной из вершин $\ell(F)$, $r(F)$. В этой ситуации разбиение, полученное на i-й итерации, не удовлетворяет условию (У3) (пункт *б*), и к нему применимо одно из преобразований (П1), (П2), (П3), (П4), (П5), (П6), (П7). Применим это преобразование и получим разбиение графа B с меньшим числом V-подграфов, которое положим результатом преобразования (П8).

Будем говорить, что разбиение R удовлетворяет условию (У4), если:

а) разбиение R удовлетворяет условию (У3);

б) для любого Λ-подграфа $F \in R$ первого типа выполняется $\ell(F) \dot\sim X$, $r(F) \dot\sim X$.

Справедлива следующая

Л е м м а 6. *Если к разбиению R графа B не применимы преобразования* (П1), (П2), (П3), (П4), (П5), (П6), (П7) *и* (П8), *то разбиение R удовлетворяет условию* (У4).

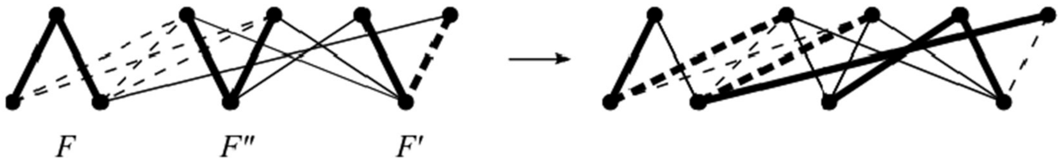

Рис. 11. Преобразование (П9)
Fig. 11. Transformation (П9)

Преобразование (П9). Построим набор вершин X и классифицируем Λ-подграфы разбиения R на два типа и Y-подграфы разбиения R на три типа. Пусть разбиение R удовлетворяет условию (У4). Пусть также существуют Λ-подграф $F \in R$ первого типа и Y-подграф $F' \in R$ первого типа такие, что хотя бы одна из вершин $\ell(F)$, $r(F)$ смежна с вершиной $r(F')$. Для определенности предположим, что $r(F) \sim r(F')$. Уменьшим число V-подграфов в разбиении R следующим образом. Пусть F'' – произвольный V-подграф разбиения R. Преобразуем в разбиении R графы F, F' и F'', как показано на рис. 11. В результате получим разбиение графа B с меньшим числом V-подграфов.

Пусть разбиение R графа B удовлетворяет условию (У4).

Будем говорить, что Y-подграф F' второго типа разбиения R несвободный, если в разбиении R найдется Λ-подграф F первого типа такой, что хотя бы одна из его вершин $\ell(F)$ и $r(F)$ смежна с вершиной $\ell(F')$.

Среди Y-подграфов второго типа разбиения R выделим допустимые, используя следующие три правила:

а) если $F \in R$ – Y-подграф второго типа такой, что найдется Y-подграф $F' \in R$ первого типа, для которого $b(F) \sim r(F')$, то F – допустимый Y-подграф второго типа;

б) если $F \in R$ – Y-подграф второго типа такой, что найдется допустимый Y-подграф $F' \in R$ второго типа, для которого $b(F) \sim \ell(F')$, то F – допустимый Y-подграф второго типа;

в) в разбиении R нет других допустимых Y-подграфов второго типа, кроме указанных в пунктах *а*) и *б*).

Преобразование (П10). Построим набор вершин X и классифицируем Λ-подграфы разбиения R на два типа и Y-подграфы разбиения R на три типа. Пусть разбиение R удовлетворяет условию (У4). Пусть также в разбиении R существует допустимый несвободный Y-подграф F_k второго типа. Уменьшим в разбиении R число V-подграфов следующим образом. Так как F_k допустим, то существует последовательность $F_1, F_2, \ldots, F_k$ $(k > 1)$, в которой F_1 – Y-подграф первого типа разбиения R, $F_2, F_3, \ldots, F_k$ – допустимые Y-подграфы второго типа разбиения R, и при этом $r(F_1) \sim b(F_2)$, $\ell(F_{i-1}) \sim b(F_i)$ для каждого $i \in \{3, \ldots, k\}$.

Так как F_k несвободный, то в разбиении R существует Λ-подграф F первого типа такой, что хотя бы одна из его вершин $\ell(F)$, $r(F)$ смежна с вершиной $\ell(F_k)$. Для определенности допустим, что $r(F) \sim \ell(F_k)$. Пусть F' – произвольный V-подграф разбиения R. В разбиении R перестроим графы $F, F', F_1, F_2, \ldots, F_k$, как показано на рис. 12. В результате получим разбиение графа B с меньшим числом V-подграфов.

Алгоритм состоит в том, чтобы к (Λ,V,Y)-разбиению R графа B применять преобразования (П1)–(П10) до тех пор, пока не будет выполнено одно из следующих двух условий: *а*) в R нет V-подграфов; *б*) в R есть V-подграфы, и ни одно из указанных преобразований не применимо. Поскольку каждое из преобразований уменьшает число V-подграфов в разбиении R, то количество их применений не превосходит числа всех возможных V-подграфов в графе B, которое не больше, чем $|B|^3$. Каждое из преобразований (П1)–(П10) допускает полиномиальную реализацию. Следовательно, алгоритм является полиномиальным. Ясно, что если алгоритм завершил работу и выполнено условие *а*), то получившееся в результате разбиение является (Λ,Y)-разбиением графа B.

Л е м м а 7. *Если алгоритм завершил работу и выполнено условие б*), *то не существует* (Λ,Y)-*разбиение графа B*.

Для того чтобы доказать эту лемму, нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

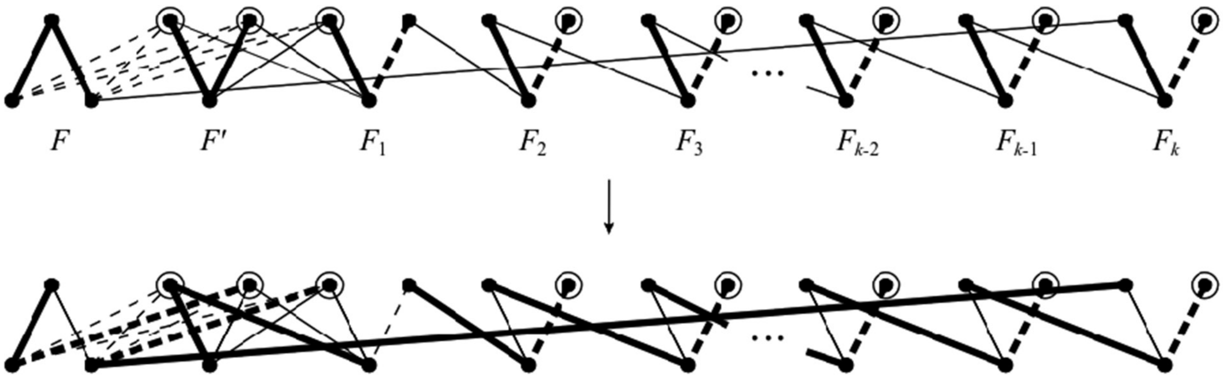

Рис. 12. Преобразование (П10)
Fig. 12. Transformation (П10)

Утверждение 3. Если для графа B существует (Λ,Y)-разбиение, в котором $\tilde{b}$ Y-подграфов, то для любого подмножества A доли C выполняется $|A|-|N(A)|\leq\tilde{b}$.

Доказательство. Пусть S – (Λ,Y)-разбиение графа B и A – произвольное непустое подмножество множества C. Рассмотрим разбиение множества A на три подмножества A_1, A_2 и A_3, где

$$A_1=\{a\in A: b(F)=a \text{ для некоторого } \Lambda\text{-подграфа } F \text{ разбиения } S\},$$

$$A_2=\{a\in A: \ell(F)=a \text{ для некоторого } \mathrm{Y}\text{-подграфа } F \text{ разбиения } S\},$$

$$A_3=\{a\in A: r(F)=a \text{ для некоторого } \mathrm{Y}\text{-подграфа } F \text{ разбиения } S\}.$$

Так как число Y-подграфов в S равно $\tilde{b}$, то

$$|A_3|\leq\tilde{b}. \tag{5}$$

Для каждой вершины $a\in A_1$ положим $N_a=\{\ell(F),\ r(F)\}$, где $F\in S$ – это Λ-подграф разбиения S такой, что $b(F)=a$. Для каждой вершины $a\in A_2$ положим $N_a=\{b(F)\}$, где $F\in S$ – это Y-подграф разбиения S такой, что $\ell(F)=a$. Нетрудно видеть, что для любых двух различных вершин $a_1,a_2\in A_1\cup A_2$ имеет место $N_{a_1}\cap N_{a_2}=\varnothing$ и

$$\bigcup_{a\in A_1\cup A_2} N_a\subseteq N(A).$$

Каждая вершина a из множества A_1 вносит в объединение множеств две вершины, а каждая вершина a из множества A_2 – одну вершину. Следовательно,

$$|N(A)|\geq 2|A_1|+|A_2|. \tag{6}$$

Принимая во внимание равенство $|A|=|A_1|+|A_2|+|A_3|$ и неравенство (5), получаем

$$2|A_1|+|A_2|=|A|+|A_1|-|A_3|\geq|A|-|A_3|\geq|A|-\tilde{b}.$$

Учитывая (6), получаем, что $|N(A)|\geq|A|-\tilde{b}.$ Утверждение 3 доказано.

Доказательство леммы 7. Поскольку к разбиению R не применимо ни одно из преобразований (П1), (П2),…, (П10), то

(С1) для любого V-подграфа $F\in R$ выполняется $b(F)\sim X$ (условие (У2), пункт *б*);

(С2) для любого Λ-подграфа $F\in R$ второго типа $\ell(F)\sim X$ и $r(F)\sim X$ (условие (У2), пункт *в*);

(С3) для любого Λ-подграфа $F\in R$ первого типа;

(С3*а*) $\ell(F)\underset{\cdot}{\sim} X$ и $r(F)\underset{\cdot}{\sim} X$ (условие (У4), пункт *б*);

(C3*б*) $\ell(F) \nsim \{r(F') : F' \in R - \mathrm{Y}\text{-подграф первого типа}\}$ и

$r(F) \nsim \{r(F') : F' \in R - \mathrm{Y}\text{-подграф первого типа}\}$ (иначе применимо преобразование (П9));

(C4) любой допустимый Y-подграф $F \in R$ второго типа свободный (иначе применимо преобразование (П10)).

Пусть A – это множество всех вершин доли C за исключением вершин Λ-подграфов первого типа разбиения R и вершин множества $\{\ell(F) : F \in R - \text{недопустимый Y-подграф второго типа}\}$. В наборе вершин X исключим порядок и получим множество X. Из утверждения 1 следует, что $X \subseteq A$. Пусть U – множество всех вершин доли I за исключением вершин, принадлежащих Λ-подграфам первого типа и недопустимым Y-подграфам второго типа разбиения R.

Утверждение 4. $N(A) \subseteq U$.

Доказательство. Пусть a – произвольная вершина множества A и b – произвольная вершина окружения $N(a)$ вершины a в графе B. Покажем, что $b \in U$.

Если $a \in X$, то по свойству (C3*а*) вершина b не является вершиной никакого из Λ-подграфов первого типа разбиения R и, по определению, никакой Y-подграф второго типа разбиения R не содержит вершину b. Следовательно, $b \in U$.

Пусть теперь $a \in A \setminus X$. Тогда $a = r(F)$ для некоторого Y-подграфа $F \in R$ первого типа или $a = \ell(F)$ для некоторого допустимого Y-подграфа $F \in R$ второго типа. Пусть $a = r(F)$ для некоторого Y-подграфа $F \in R$ первого типа. По свойству (C3*б*) вершина b не является вершиной никакого из Λ-подграфов первого типа разбиения R. По определению допустимого Y-подграфа второго типа вершина b не является вершиной никакого недопустимого Y-подграфа F второго типа разбиения R. Следовательно, $b \in U$. Пусть $a = \ell(F)$ для некоторого допустимого Y-подграфа $F \in R$ второго типа. Поскольку граф F допустимый, то он свободный (по свойству (C4)), и поэтому вершина b не является вершиной никакого из Λ-подграфов первого типа разбиения R. По определению допустимого Y-подграфа второго типа, вершина b не является вершиной никакого недопустимого Y-подграфа F второго типа разбиения R. Следовательно, $b \in U$. Утверждение 4 доказано.

Введем следующие обозначения:

$\tilde{a}_2$ – число Λ-подграфов второго типа разбиения R;

$\tilde{b}_1$ – число Y-подграфов первого типа разбиения R;

$\tilde{b}_2$ – число Y-подграфов второго типа разбиения R;

$\tilde{b}_2'$ – число недопустимых Y-подграфов второго типа разбиения R;

$\tilde{b}_3$ – число Y-подграфов третьего типа разбиения R.

Так как в разбиении R есть V-подграфы, то

$$\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 + \tilde{b}_3 \le \tilde{b} - 1. \tag{7}$$

По построению множеств X, A и U

$$|X| = \tilde{a}_2 + 2\tilde{b} - \tilde{b}_1 - \tilde{b}_2, \tag{8}$$

$$|A| = \tilde{a}_2 + 2\tilde{b} - \tilde{b}_2', \tag{9}$$

$$|U| = 2\tilde{a}_2 + \tilde{b} - \tilde{b}_2'. \tag{10}$$

Лемму 7 докажем от противного. Допустим, что существует (Λ,Y)-разбиение S графа B. Пусть $J \subseteq X$ – множество вершин, содержащихся в Λ-подграфах разбиения S.

Утверждение 5. $|J| \ge \tilde{a}_2 + 1$.

Доказательство. Пусть

$$S_0 = \{F \in S : F - \text{Y-подграф такой, что } |\{\ell(F), r(F)\} \cap X| = 0\};$$

$$S_1 = \{F \in S : F - \text{Y-подграф такой, что } |\{\ell(F), r(F)\} \cap X| = 1\};$$

$$S_2 = \{F \in S : F - \text{Y-подграф такой, что } |\{\ell(F), r(F)\} \cap X| = 2\}.$$

Тогда

$$|S_0|+|S_1|+|S_2|=\tilde{b}. \tag{11}$$

Покажем, что

$$|S_2|\le \tilde{b}_3. \tag{12}$$

Пусть F – произвольный Y-подграф множества S_2. Тогда в множестве X существуют две вершины, одна из которых смежна с вершиной $b(F)$, а другая, наоборот, не смежна. По свойству (С3*а*) вершина $b(F)$ не является вершиной никакого Λ-подграфа первого типа разбиения R. По свойству (С2) вершина $b(F)$ не является вершиной никакого Λ-подграфа второго типа разбиения R. По свойству (С1) вершина $b(F)$ не является вершиной V-подграфов разбиения R. Из свойств Y-подграфов первого и второго типа разбиения R вытекает, что Y-подграфы первого и второго типа не содержат вершину $b(F)$. Таким образом, остается единственная возможность, а именно, вершина $b(F)$ является вершиной Y-подграфа третьего типа разбиения R. Поэтому, если F – Y-подграф множества S_2, то $b(F) \in \{b(F')$: F' – Y-подграф третьего типа разбиения $R\}$. Следовательно, имеет место неравенство (12).

Каждая вершина множества X покрывается в точности одним графом разбиения S. Каждый граф разбиения S является Λ-подграфом или Y-подграфом. Нетрудно видеть, что

$$|J|=|X|-2|S_2|-|S_1|.$$

Учитывая (7), (8), (11) и (12), получаем

$$|J|=|X|-2|S_2|-|S_1|=|X|-\tilde{b}-|S_2|+|S_0|\ge|X|-\tilde{b}-|S_2|\ge(\tilde{a}_2+2\tilde{b}-\tilde{b}_1-\tilde{b}_2)-\tilde{b}-\tilde{b}_3\ge\tilde{a}_2+1.$$

Утверждение 5 доказано.

Пусть $S'\subseteq S$ – это семейство Λ-подграфов разбиения S, которые покрывают вершины множества J. Принимая во внимание утверждение 5, получаем

$$|S'|=|J|\ge\tilde{a}_2+1.$$

Удалим из графа B вершины, принадлежащие графам семейства S'. При этом из доли C удалится $|J|$ вершин, а из доли I удалится $2|J|$ вершин, принадлежащих множеству $N_B(A)\subseteq U$. В результате получим двудольный граф B', для которого существует (Λ,Y)-разбиение, содержащее $\tilde{b}$ Y-подграфов. Рассмотрим в этом графе подмножество вершин $A\setminus J$. Нетрудно видеть, что

$$|N_{B'}(A\setminus J)|=|N_B(A)|-2|J|\le|U|-2|J|.$$

Учитывая (9), (10) и утверждение 5, имеем

$$|A\setminus J|-|N_{B'}(A\setminus J)|\ge\left(|A|-|J|\right)-\left(|U|-2|J|\right)=|A|-|U|+|J|\ge$$
$$\ge\left(\tilde{a}_2+2\tilde{b}-\tilde{b}_2'\right)-\left(2\tilde{a}_2+\tilde{b}-\tilde{b}_2'\right)+\left(\tilde{a}_2+1\right)=\tilde{b}+1.$$

Получаем противоречие с утверждением 3. Лемма 7 доказана.

4. Полиномиальная разрешимость задачи (Λ,V,Y)-Разбиение. Пусть B – двудольный граф с долями C и I. Найдем значения величин $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ по формулам (1) и (2). Пусть выполнены условия из случая *г*) пункта 3, т. е. $\tilde{a}>0$, $\tilde{b}>1$. *Допустимым фактором* двудольного графа B называется остовный подграф графа B, в котором:

а) степени вершин множества C не превосходят 2, при этом степень 2 имеют ровно $\tilde{a}$ вершин;

б) степени вершин множества I равны 1.

Утверждение 6. Существует (Λ,V,Y)-разбиение двудольного графа B тогда и только тогда, когда существует допустимый фактор графа B.

Доказательство. Пусть существует (Λ,V,Y)-разбиение R графа B. Построим допустимый фактор S графа B так. Положим $V(S)=C\cup I$. В множество ребер графа S включим все ребра Λ-подграфов и Y-подграфов разбиения R, а также по одному ребру из каждого V-подграфа разбиения R. Нетрудно видеть, что получившийся в результате граф S является допустимым фактором графа B.

Пусть существует допустимый фактор S графа B. Построим $(\Lambda, \mathrm{V}, \mathrm{Y})$-разбиение R графа B так. Изначально положим $R = \varnothing$. Выделим в графе B все ребра, принадлежащие фактору S. Все вершины доли C разбиваются на два класса: вершины, инцидентные двум выделенным ребрам, и вершины, инцидентные не более одному выделенному ребру. По определению в допустимом факторе S вершин степени 2 ровно $\tilde{a}$. Поэтому первый класс вершин доли C состоит из $\tilde{a}$ вершин и, соответственно, среди выделенных ребер существует в точности $\tilde{a}$ пар смежных ребер. Такие пары выделенных ребер порождают непересекающиеся Λ-подграфы графа B, которые включим в множество R. Число остальных выделенных ребер равно $|I| - 2\tilde{a} = \tilde{b}$ (так как каждая вершина доли I инцидентна одному выделенному ребру). Обозначим эти ребра через $e_1, e_2, \ldots, e_{\tilde{b}}$. Такие ребра попарно не смежны и покрывают соответственно $\tilde{b}$ вершин доли C. Число вершин доли C, которые не инцидентны ни одному выделенному ребру, равно $|C| - \tilde{a} - \tilde{b} = \tilde{b}$. Обозначим такие вершины через $v_1, v_2, \ldots, v_{\tilde{b}}$. Составим пары $(e_1, v_1), (e_2, v_2), \ldots, (e_{\tilde{b}}, v_{\tilde{b}})$. Каждая пара (e_i, v_i) порождает V-подграф или Y-подграф графа B в зависимости от того, смежны или не смежны вершина v_i и концевая вершина ребра e_i, принадлежащая доле I. Эти подграфы добавим в множество S. Нетрудно видеть, что получившееся в результате множество S является $(\Lambda, \mathrm{V}, \mathrm{Y})$-разбиением графа B. Утверждение 6 доказано.

Таким образом, решение задачи $(\Lambda, \mathrm{V}, \mathrm{Y})$-Разбиение сводится к решению задачи Допустимый Фактор, в которой требуется определить, существует ли в заданном двудольном графе B допустимый фактор. Известно [6], что задача Допустимый Фактор решается за полиномиальное время.

Список использованных источников

1. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев [и др.]. – М.: Ленанд, 2017. – 390 с.

2. Dyer, M. E. On the complexity of partitioning graphs into connected subgraphs / M. E. Dyer, A. M. Frieze // Discrete Applied Mathematics. – 1985. – Vol. 10, № 2. – P. 139–153. https://doi.org/10.1016/0166-218x(85)90008-3

3. Brandstädt, A. Graph Classes: A Survey / A. Brandstädt, V. B. Le, J. P. Spinrad. – Philadelphia: SIAM, 1999. – 306 p. https://doi.org/10.1137/1.9780898719796

4. Monnot, J. The path partition problem and related problems in bipartite graphs / M. Monnot, S. Toulouse // Operations Research Letters. – 2007. – Vol. 35, № 5. – P. 677–684. https://doi.org/10.1016/j.orl.2006.12.004

5. Ловас, Л. Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии / Л. Ловас, М. Пламмер. – М.: Мир, 1998. – 656 с.

6. Partitioning Perfect Graphs into Stars / R. van Bevern [et al.] // J. Graph Theory. – 2016. – Vol. 85, № 2. – P. 297–335. https://doi.org/10.1002/jgt.22062

References

1. Emelichev V. A., Mel’nikov O. I., Sarvanov V. I., Tyshkevich R. I. *Lectures on Graph Theory*. Moscow, Lenand Publ., 2017. 390 p. (in Russian).

2. Dyer M. E., Frieze A. M. On the complexity of partitioning graphs into connected subgraphs. *Discrete Applied Mathematics*, 1985, vol. 10, no. 2, pp. 139–153. https://doi.org/10.1016/0166-218x(85)90008-3

3. Brandstädt A., Le V. B., Spinrad J. P. *Graph Classes: A Survey*. Philadelphia, SIAM, 1999. 306 p. https://doi.org/10.1137/1.9780898719796

4. Monnot J., Toulouse S. The path partition problem and related problems in bipartite graphs. *Operations Research Letters*, 2007, vol. 35, no. 5, pp. 677–684. https://doi.org/10.1016/j.orl.2006.12.004

5. Lovàsz L., Plummer M. *Matching Theory*. AMS Chelsea Publishing, 2009. 543 p. https://doi.org/10.1090/chel/367

6. Bevern van R., Bredereck R., Bulteau L., Chen J., Froese V., Niedermeier R., Woeginger G. J. Partitioning Perfect Graphs into Stars. *Journal of Graph Theory*, 2016, vol. 85, no. 2, pp. 297–335. https://doi.org/10.1002/jgt.22062

Информация об авторе

Дугинов Олег Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дискретной математики и алгоритмики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: duginov@bsu.by

Information about the author

Oleg I. Duginov – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of Department of Discrete Mathematics and Algorithmics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: duginov@bsu.by