

УДК 539.3

О. Л. ШВЕД

МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 27.12.2013)

Введение. В области обработки металлов давлением существует ряд явлений, процессов, не описываемых существующими моделями материалов. К ним можно отнести явление «запирания» области высокого давления [1], опыты Треска по экструзии свинца [2, 3], процессы осадки и осадки в подкладных кольцах с определенными размерами заготовок.

Возможный подход к созданию модели, описывающей указанные проблемные течения, состоит в обобщении модели нелинейной упругости при сохранении потенциальной природы упругой деформации (существовании потенциалов напряжений и скоростей напряжений). Также используется концепция поверхности текучести; активный упругопластический процесс представляется попеременным чередованием пластического и упругого состояний; в пластическом состоянии (при течении) материал предполагается несжимаемым. В примерах ограничимся рассмотрением ортотропного материала.

1. Определяющие соотношения в конечном виде. Пусть $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ – неподвижный ортонормированный триэдр. Введем удельную потенциальную энергию упругой деформации (потенциал напряжений) в форме Мурнагана [4, 5] $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, где $\varepsilon_2 = \delta_1(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1)^2 + \dots$, $\varepsilon_3 = \delta_{22}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1)^3 + \dots$ – анизотропные структуры второй и третьей степени по компонентам тензора упругой деформации Коши – Грина. Начальные значения 77 параметров анизотропии $\delta_j = 0$, и тогда ε совпадает с изотропным потенциалом ε_0 . Переходя к мере $\mathbf{G} = 2\mathbf{C} + \mathbf{E}$, для которой соотношения получают менее громоздкими, получаем

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + 4^{-1}(\delta_1 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 2) + \dots) + 8^{-1}(\delta_{22}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^3 + 1) + \dots) + c, \quad (1)$$

где c – минимальная постоянная, такая, что $\varepsilon \geq 0$. Соотношение (1) полностью приведено в [6].

Л е м м а 1. Для ортотропного материала с главными осями анизотропии $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ ненулевыми в (1) могут быть только параметры δ_j , где $j \in \{1-3, 7-11, 15, 22-34, 41, 51-53, 57-59\}$, и потенциал напряжений имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon = & 4^{-1} \left(\sum_{\kappa, l; j=1,2,3,8,9,10} \delta_j ((\mathbf{c}_\kappa \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_\kappa - 1)(\mathbf{c}_l \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_l - 1) - 1) + \delta_7 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2)^2 + \delta_{11} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \delta_{15} (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \right) + \\ & + 8^{-1} \left(\sum_{m, n; j=1,2, \dots, 9} \delta_{21+j} ((\mathbf{c}_m \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_m - 1)^2 (\mathbf{c}_n \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_n - 1) + 1) + \delta_{31} \left(\prod_i (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1) + 1 \right) + \right. \\ & + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \sum_i \delta_{31+i} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1) + \delta_{41} ((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) + 1) + \\ & \left. + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2)^2 \sum_i \delta_{50+i} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1) + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \sum_i \delta_{56+i} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1) \right) + \varepsilon_0 + c \end{aligned} \quad (2)$$

($k = 1, 2, 3, 1, 2, 3$; $l = 1, 2, 3, 2, 3, 1$; $m = 1, 2, 3, 1, 1, 2, 2, 3, 3$; $n = 1, 2, 3, 2, 3, 1, 3, 1, 2$; $i = 1, 2, 3$).

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 1 проводится средствами символьных вычислений, исходя из определения ортотропного материала [4].

Л е м м а 2. Для трансверсально изотропного материала с осью \mathbf{c}_2 ненулевыми в (2) могут быть только параметры анизотропии δ_j , где $j \in \{1-3, 7-11, 15, 22-34\}$ и выполняются равенства $\delta_{11} = 2\delta_1 - \delta_{10}$, $\delta_7 = \delta_{15}$, $\delta_1 = \delta_3$, $\delta_9 = \delta_8$, $\delta_{22} = \delta_{24} = \delta_{26} = \delta_{29}$, $\delta_{27} = \delta_{28}$, $\delta_{25} = \delta_{30} = \delta_{31}$, $\delta_{32} = \delta_{34} = 2\delta_{22}$, $\delta_{33} = \delta_{25}$. Если осью является \mathbf{c}_1 или \mathbf{c}_3 , то первое и второе равенства запишутся как $\delta_{15} = 2\delta_2 - \delta_9$ и $\delta_7 = \delta_{11}$, или $\delta_7 = 2\delta_3 - \delta_8$ и $\delta_{11} = \delta_{15}$.

Из (1) находим соотношение для тензора напряжений Коши

$$\mathbf{T} = 2L_3^{-1} \mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial \partial}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^T = \mathbf{T}_0 + \sum_j \delta_j \mathbf{T}_j, \quad (3)$$

где \mathbf{F}_e – неособенный тензор, заменяющий в упругопластичности деформационный градиент ($\mathbf{F}_e = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}^T$ согласно полярному разложению), $\mathbf{G} = \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e$, L_3 – третий главный инвариант \mathbf{V} , \mathbf{T}_0 – квадратичный трехчлен относительно меры $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_e^T$ с коэффициентами, зависящими от ее главных инвариантов и постоянных Ляме $\lambda, \mu, \nu_1, \nu_2, \nu_3$, \mathbf{T}_j – несложно вычисляемые тензоры с учетом формулы $\frac{\partial \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_j}{\partial \mathbf{G}} = 2^{-1}(\mathbf{c}_i \mathbf{c}_j + \mathbf{c}_j \mathbf{c}_i)$ [4]. Уравнения (1), (3) справедливы для упругого и пластического состояний материала.

2. Девиаторное сечение поверхности текучести. При построении девиаторного сечения удобно применить векторное представление девиаторов симметричных тензоров второго ранга в пяти-мерном векторном пространстве. Для этого задается ортонормированный тензорный базис пространства девиаторов $\mathbf{W}_1 = (\sqrt{6})^{-1}(\mathbf{E} - 3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3)$, $\mathbf{W}_2 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1)$, $\mathbf{W}_3 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)$, $\mathbf{W}_4 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1)$, $\mathbf{W}_5 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2)$. Скалярное произведение таких векторов здесь понимается как двойное скалярное произведение тензоров. Два любых таких девиатора \mathbf{N} и \mathbf{M} представляются в векторном виде $\mathbf{N} = \sum_i w_i \mathbf{W}_i$, $\mathbf{M} = \sum_i v_i \mathbf{W}_i$.

Обозначим: $\overset{\Omega}{\mathbf{T}} = \mathbf{T} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega}$ ($\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O}$ – тензор упругого спина [7], точка над символом означает материальную производную) – \mathbf{O} -производная тензора \mathbf{T} , \mathbf{D} – тензор скорости деформаций, $\nabla \mathbf{v}^T$ – градиент скорости. Введем девиатор-оператор $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{D})$ как \mathbf{O} -производную девиатора $\text{dev } \mathbf{T}$, вычисленную при условии несжимаемости $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ по соотношению $\mathbf{F}_e = \nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{F}_e$. Последнее уравнение задает тензор \mathbf{F}_e в упругом состоянии.

Л е м м а 3. Девиатор \mathbf{Q} линеен по компонентам \mathbf{D} и имеет потенциал.

Первое утверждение очевидно, а второе установлено в [7].

Заменив формально в представлении \mathbf{Q} величины \mathbf{Q}, \mathbf{D} на \mathbf{M}, \mathbf{N} , получаем $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{N})$.

Л е м м а 4. Для того чтобы девиатор $\mathbf{Q}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{N}$ имел потенциал, необходимо и достаточно, чтобы \mathbf{N} являлся собственным вектором оператора \mathbf{M} и выполнялось $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}$.

Доказательство леммы 4 с использованием леммы 3 приведено в [8], и там получено представление \mathbf{M} при удалении с диагонали матрицы скаляра $a_{11}(a_{21} = p_1 + p_2, a_{12} = p_1 - p_2)$:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + 2p_2 & \sqrt{3}p_2 & p_3 & p_6 & p_8 \\ \sqrt{3}p_2 & -p_1 + 2p_2 & p_4 & p_7 & p_9 \\ p_3 & p_4 & p_5 & p_{12} & p_{13} \\ p_6 & p_7 & p_{12} & p_{10} & p_{14} \\ p_8 & p_9 & p_{13} & p_{14} & p_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Скорость напряжений определим через \mathbf{O} -производную, как не зависящую от \mathbf{D} часть проекции оператора \mathbf{Q} на девиаторное сечение поверхности текучести, определяемую искомым вектором внешней нормали $\mathbf{N}(\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1)$.

Т е о р е м а 1. Вектор нормали к девиаторному сечению поверхности текучести является одним из собственных векторов оператора (4) и наоборот, один из собственных векторов оператора (4) является вектором нормали.

Доказательство. По модельному предположению существует потенциал скоростей напряжений. Согласно лемме 4 и способу задания скорости напряжений, девиатор $\mathbf{Q}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{N}$ имеет потенциал. Справедливость теоремы 1 теперь следует из леммы 4.

Определение 1. Девиаторное сечение поверхности текучести, содержащее точку процесса в пространстве напряжений, назовем текущим.

Теорема 2. Для изотропного материала вектор нормали выбирается из двух взаимно ортогональных собственных векторов оператора (4). Соответствующие им собственные значения ω_i являются различными и положительными.

Доказательство. В [9] показано, что для изотропного материала Синьорини существуют только два взаимно ортогональных вектора, полученные в явном виде, из которых выбирается вектор нормали. Для материала Мурнагана это также выполняется, как показывают аналогичные выкладки. Следовательно, собственные значения различные. Имеют место приближенные оценки, которые подтверждают справедливость теоремы 2:

$$a_{11} = \mu + 3^{-1}4(3\mu + 2\nu_3)f_1, \quad a_{21} = -3^{-1}\mu f_1, \quad a_{12} = -3^{-1}2(\mu + \nu_3)f_2,$$

$$\omega_i = a_{11} + a_{21} - a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{12}a_{21} + a_{21}^2} > 0, \quad |\omega_1 - \omega_2| = 2\sqrt{a_{12}^2 - a_{12}a_{21} + a_{21}^2} > 0$$

($f_i = \mathbf{c}_i \cdot \text{dev } \mathbf{F} \cdot \mathbf{c}_i$ – малые величины, $\mu > 0$, $\nu_3 < 0$).

Следствие. Утверждения теоремы 2 остаются справедливыми при малой анизотропии материала в силу непрерывности изменения собственных значений оператора.

Замечание. При развитой анизотропии считаем этот факт модельным предположением, что подтверждается всеми вычислительными экспериментами.

Таким образом, только два собственных вектора имеют физический смысл. Существуют два семейства регулярных вогнутых поверхностей, и искомая поверхность образуется соединением в сингулярных точках частей двух представителей этих семейств. Если точка процесса находится на гладком участке, то для построения текущего сечения достаточно двух точек на этих поверхностях: ее самой и противоположной точки, определяемой по величине эффекта Баушингера. В противном случае достаточно одной точки процесса. Поверхность текучести в пространстве напряжений образуется замкнутыми поверхностями ее девиаторных сечений.

3. Критерии текучести и разрушения. Введем критерий текучести. Будем обозначать величины, которые относятся к образующим девиаторное сечение двум поверхностям, отвечающим, условно говоря, за растяжение и сжатие с индексами 1 и 2 соответственно. При течении возможны три различных случая: точка процесса находится в регулярной точке текущего девиаторного сечения, удельная мощность деформации положительная ($\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} > 0$) либо нет, и точка процесса находится в сингулярной точке, где удельная мощность деформации всегда положительна. Пусть \mathbf{N} – нормированный девиатор внешней нормали и $\mathbf{N} = \mathbf{N}_i, i \in \{1, 2\}$. В первых двух случаях критерий текучести будет $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} > 0$, в третьем случае должно выполняться одновременно $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_1 > 0$, $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_2 > 0$, и если нарушается одно из неравенств, то имеет место либо первый, либо второй случай.

Лемма 5. В формулировке критерия текучести девиатор \mathbf{Q} можно заменить на девиатор \mathbf{D} .

Доказательство. Выполняются следующие соотношения: $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{D} = \omega \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}$. Собственное значение $\omega > 0$, откуда следует равносильность неравенств $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} > 0$ и $\mathbf{N} \cdot \mathbf{D} > 0$, а также равенств $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} = 0$ и $\mathbf{N} \cdot \mathbf{D} = 0$.

Определение 2. Точку на текущем девиаторном сечении назовем критической, если собственное значение оператора (4) в первых двух случаях или один из векторов $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ в третьем случае, по которому должен определяться собственный вектор, являющийся вектором нормали в данной точке поверхности, становится кратным.

На регулярном участке поверхности девиаторного сечения у близких точек должны быть близки векторы нормалей в этих точках. По этому принципу обходом по поверхности из начальной точки происходит ее построение. Когда на поверхности текущего сечения появляется критическая точка, то однозначный выбор вектора нормали из несчетного числа собственных векторов становится невозможным. Тогда, если начальная точка совпадает с критической, близкую точку найти нельзя. А главное, в критической точке теряет смысл критерий текучести, поскольку

девиатор \mathbf{N} становится неопределенным. Таким образом, критерий разрушения заключается в появлении критической точки.

Для ортотропного материала проверка критерия разрушения упрощается. Матрица оператора (4), которая вычисляется в точках расположенной в плоскости $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2\}$ кривой пластичности, имеет только два недиагональных элемента отличных от нуля ($p_2 \neq 0$). Главные оси анизотропии определяют векторы $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$. Поэтому наличие подлежащих контролю кратных собственных значений оператора означает существование нулей знакопеременной функции $f(\varphi) = \prod_{k=5,10,11} (p_2^2 + p_k^2 - p_1^2 - 4p_2p_k)(p_1^2 + 3p_2^2)^{-1}$. Угол φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) отвечает положению точки на кривой пластичности с учетом ее замкнутости, обход проводим из точки процесса по часовой стрелке. Если найденное собственное значение соответствует собственному вектору оператора, по которому должен определяться вектор нормали к девиаторному сечению поверхности текучести, то данная точка является критической. Соответствие устанавливается сравнением функций на регулярных участках кривых для изотропного материала (где разрушения не происходит) и анизотропного материала. Оно имеет место при перемещении нуля функции на соседний участок.

4. Определяющие соотношения при течении в дифференциальном виде. Постулируем определяющие уравнения для напряжений, потенциала напряжений и параметров анизотропии:

$$\overset{\Omega}{\mathbf{T}} = K\mathbf{S}, (L_3^{-1}\varepsilon) = p\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}, \dot{\delta}_j = k_j \beta \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}_j (\sqrt{\mathbf{T}_j \cdot \mathbf{T}_j})^{-1} (k_j = \pm 1, \mathbf{T}_j \neq 0, \beta \geq 0), \quad (5)$$

где $\mathbf{S} = \mathbf{Q} - \sum \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i$ и в первых двух случаях $i = 1$ либо $i = 2$, а в третьем $i = 1, 2$. В первом случае имеем в (5) i положительный, не зависящий от \mathbf{D} , скаляр $K = K_i$, $p = (1 - \alpha_i)$, α_i – относительная часть величины рассеиваемой работы деформации на малом временном шаге. Во втором случае выполняется $K = K_i + K_0$, $p = 1$. Зависящий от \mathbf{D} скаляр K_0 определяется так. Надо положить в (5) $K = K_0$, $p = 1$, $\beta = 0$ и затем из системы уравнений (1), (3), (5) для неизвестных $\overset{\Omega}{\mathbf{V}}$, K_0 найти K_0 . В данном случае материал становится недиссипативным и теряется свойство потенциальности в скоростях напряжений. В третьем случае полагаем $\mathbf{N} = \mathbf{N}_i$ (здесь выбирается $\mathbf{N} = \mathbf{N}_1$, если $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_1 \geq \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_2$ и $\mathbf{N} = \mathbf{N}_2$, если $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_1 < \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_2$), $K = K_1 K_2$, $p = (1 - \alpha_i)$. Коэффициенты k_j в (5) выбираются следующим способом. Скаляр β характеризует скорость роста упругой анизотропии по (5). В первом и втором случаях по всем наборам k_j из системы уравнений (1), (3), (5) находим набор, обеспечивающий минимальное значение величине β . В третьем случае выполняется минимизация β , при условии удовлетворения эффекту Баушингера. Согласно лемме 5, имеет место непрерывность при смене определяющих уравнений. Непрерывность теряется только в третьем случае при условии $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_1 = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_2$. Если выполняется $\mathbf{T}_j = 0$, то надо привлекать дополнительные соотношения для параметров анизотропии.

Для ортотропного материала параметры δ_j , где $j \in \{1-3, 8-10, 22-31\}$, определяются по соотношению (5). При одноосных нагружениях по осям 1,2,3 неопределяемые параметры $\delta_7 = \delta_{11}$, $\delta_7 = \delta_{15}$, $\delta_{11} = \delta_{15}$ полагаем равными $\gamma \delta_{15}$, $\gamma \delta_{11}$, $\gamma \delta_7$ соответственно. Постоянные коэффициенты $\gamma = \gamma_i$ находим, используя данные о моменте разрушения при растяжении и сжатии. Введем дополнительные дифференциальные определяющие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_7 &= (\sqrt{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}})^{-1} (|\mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{T}| (2\dot{\delta}_3 - \dot{\delta}_8) + \gamma (|\mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{T}| (2\dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_{10}) + |\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{T}| (2\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_9))), \\ \dot{\delta}_{11} &= (\sqrt{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}})^{-1} (|\mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{T}| (2\dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_{10}) + \gamma (|\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{T}| (2\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_9) + |\mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{T}| (2\dot{\delta}_3 - \dot{\delta}_8))), \\ \dot{\delta}_{15} &= (\sqrt{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}})^{-1} (|\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{T}| (2\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_9) + \gamma (|\mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{T}| (2\dot{\delta}_3 - \dot{\delta}_8) + |\mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{T}| (2\dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_{10}))). \end{aligned} \quad (6)$$

В случае одноосных нагружений из (6) по лемме 2 следуют отмеченные выше соотношения. Параметры $\delta_7, \delta_{11}, \delta_{15}$ заданы, а остальные, не определяемые по (5), полагаем равными нулю. Согласно (5), (6) и лемме 1 все δ_j определены.

5. Примеры численного моделирования. В качестве материала для упрощения использовался малопластичный вольфрам, который предполагался идеально пластическим. Напряжение текучести при растяжении и сжатии выбрано $\sigma = 450$ МПа. Данные о постоянных Ляме взяты из [4]: $\lambda = 1,63$; $\mu = 1,37$; $\nu_1 = -4,29$; $\nu_2 = -2,58$; $\nu_3 = -3,67$ (10^5 МПа). При численном моделировании использовался вариационный принцип [10]. На рис. 1–3 представлены результаты расчетов. Изображены начальные и конечные кривые пластичности; кривые для изотропного материала ближе к границе правильного шестиугольника, выражающей условие пластичности А. Ю. Ишлинского. Стрелками обозначены проекции базисных диад $\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i$ (проекция $\mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2$ направлена вверх, а $\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1$ – вниз). Отрезками указаны положения точки процесса. Приведены графики функций $f(\varphi)$ для этих кривых. На оси абсцисс малые и большие вертикальные штрихи соответствуют приращениям угла $\pi/6$ и сингулярным точкам кривых.

Выполнено моделирование одноосных растяжения и сжатия по второй оси, проведенных до момента разрушения, определены величины частей рассеиваемой работы деформации $\alpha_1 = 0,999987$, $\alpha_2 = 0,99999595$ (т. е. практически всей работы). Наблюдается симметрия в силу условия трансверсальной изотропии. Величина эффекта Баушингера взята равной единице. В двухосных растяжении и сжатии ортогонально второй и третьей оси были приложены плоские гладкие штампы

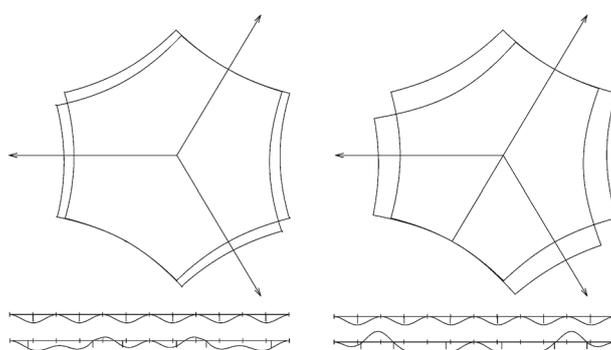


Рис. 1. Одноосные растяжение и сжатие

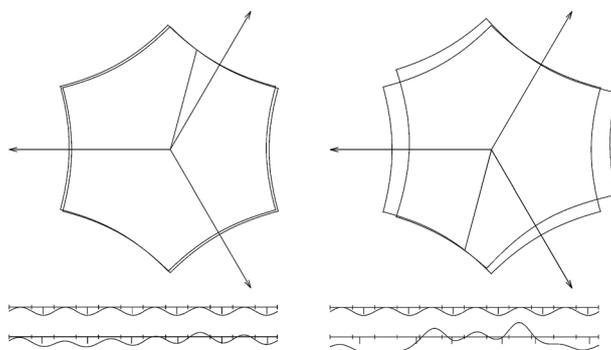


Рис. 2. Двухосные растяжение и сжатие

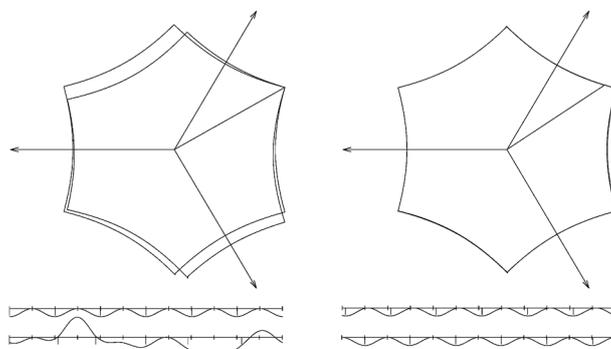


Рис. 3. Чистый сдвиг и растяжение, сжатие

соответственно подвижные и неподвижные. Ортогональная первой оси граничная поверхность была свободной от нагрузок, тем не менее на ней возникали малые расчетные напряжения. Среднее напряжение составляло 224,8 и –226,8 МПа. Определены величины частей проекции оператора $K_1 = 0,00001$, $K_2 = 0,00003$. В конце сжатия наблюдается близость момента разрушения.

Моделирование чистого сдвига до момента разрушения осуществлялось растяжением и сжатием по второй и третьей осям, среднее напряжение было равно нулю. Показано проявление эффекта Баушингера, поскольку согласно опытным данным в сингулярной точке оно максимальное. Рассчитывалось также нагружение типа растяжение и сжатие по трем осям, когда удельная мощность деформации становится неположительной. На начальной кривой пластичности, соответствующей одноосному растяжению, выбрана точка, в которой находится точка процесса. В эксперименте это соответствует растяжению по первой, второй оси и сжатию по третьей оси с искажениями 1,0001; 1,00136 и 0,99913. При течении происходило перемещение точки процесса по кривой пластичности влево в точку, соответствующую положению в одноосном растяжении, при малом приросте анизотропии, поэтому практически совпадают кривые пластичности и графики функций. Имеет место $0 \leq K_0(\mathbf{D}) < 1$, когда направление «вектора» \mathbf{D} меняется от переходного $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} = 0$ ($K_0 = 0$) до разгрузочного $\mathbf{N} \cdot \mathbf{D} = 0$. На рис. 3 выбрано среднее направление.

Заключение. Предлагаемая модель материала по результатам расчетов представляется допустимой. Рассмотрены в рамках ортотропного материала все возможные случаи. Описываются важные экспериментальные факты увеличения и уменьшения напряжений текучести при повторном растяжении и сжатии в направлении, ортогональном первоначальному (см. рис. 1). Для пластичных материалов (медь, алюминий) эти величины будут большими. Соответственно относительные искривления линий девиаторного сечения увеличиваются. Точность расчетов существенно зависит от достоверности данных по материалам из-за чувствительности модели, связанной с конкретной зависимостью (1). В силу кусочно вогнутости поверхности девиаторного сечения и увеличения подвижности материала за счет чередования в активном процессе пластического и упругого состояний должны описываться указанные проблемные течения [11, 12].

Литература

1. Левитас В. И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев, 1987.
2. Белл Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. М., 1984. Ч. 2: Конечные деформации.
3. Жилин П. А. Основные уравнения неупругих сред // Актуальные проблемы механики: тр. XXVIII летней школы. СПб., 2001. С. 14–58.
4. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М., 1980.
5. Murnaghan F. D. Finite deformation of an elastic solid. New York, 1951.
6. Швед О. Л. // Информатика. 2011. № 3 (31). С. 57–67.
7. Швед О. Л. // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 1. С. 52–58.
8. Швед О. Л. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2007. № 1. С. 83–87.
9. Швед О. Л. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 2001. № 1. С. 120–125.
10. Швед О. Л. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2008. № 2. С. 66–72.
11. Швед О. Л., Абрамов А. А. // Информатика. 2007. № 4 (16). С. 133–136.
12. Швед О. Л., Абрамов А. А. // Информатика. 2009. № 1 (21). С. 17–24.

O. L. SHVED

MODEL OF NONLINEAR ELASTIC-PLASTIC MATERIAL

Summary

Within the concept of yield surfaces based on the principle of preserving the potential nature of elastic deformation the model of material is proposed. The active elastoplasticity process is presented by the alternation of plastic and elastic states. Deviatoric cross sections of the yield surface are defined. Defining relationships are formulated. The model examples for orthotropic material are considered.