ФІЗІКА

УДК 539.12

Е. М. ОВСИЮК[1], О. В. ВЕКО[2], В. М. РЕДЬКОВ[3]

О МОДЕЛИРОВАНИИ СРЕДЫ СО СВОЙСТВАМИ ИДЕАЛЬНОГО ЗЕРКАЛА ПО ОТНОШЕНИЮ К СВЕТУ И ЧАСТИЦАМ СО СПИНОМ 1/2

[1]Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина
[2]Гимназия г. Калинковичи
[3]Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 20.02.2015)

Введение. Геометрия пространства Лобачевского рассматривается как основа для моделирования эффективной среды [1–2]: используются обобщенные квазидекартовые координаты (x, y, z); среда неоднородна вдоль оси z; эффективные материальные уравнения выписаны в явном виде. В выбранной системе координат уравнения Максвелла в 3-мерном комплексном формализме Майораны – Оппенгеймера [3] решены точно, при этом задача сводится к анализу дифференциального уравнения второго порядка. В контексте квантовой механики такое уравнение описывает движение частицы в потенциальном поле, плавно растущем до бесконечности при устремлении координаты z к бесконечности; частица отражается от этого барьера, не проникая за него. Аналогичная ситуация реализуется и в электродинамике. Таким образом, геометрия Лобачевского действует эффективно как распределенное в пространстве, ориентированное перпендикулярно оси z идеальное зеркало. Глубина проникновения z_0 поля внутрь «среды – зеркала»

$$z_0 = \rho \ln \frac{\omega}{c\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$$

определяется параметрами решений и радиусом кривизны моделирующего пространства Лобачевского. Влияние используемой геометрии на частицы со спином 1/2 (нерелятивистский электрон или нейтрон, описываемые обобщенным уравнением Паули с учетом неевклидовости геометрии) оказывается аналогичным: «среда» действует на фермионы так же, как идеальное зеркало, глубина проникновения в него частиц со спином растет с ростом энергии и уменьшается с увеличением кривизны пространства (уменьшением радиуса кривизны ρ пространства Лобачевского).

1. Электромагнитное поле в среде. В пространстве Лобачевского H_3 известна следующая система координат:

$$dS^2 = dt^2 - e^{-2z}\left(dx^2 + dy^2\right) - dz^2, \quad u_1 = xe^{-z}, \quad u_2 = ye^{-z},$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\left[\left(e^z - e^{-z}\right) + \left(x^2 + y^2\right)e^{-z}\right], \quad u_0 = \frac{1}{2}\left[\left(e^z + e^{-z}\right) + \left(x^2 + y^2\right)e^{-z}\right];$$

$$u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = \rho^2, \quad u_0 = +\sqrt{\rho^2 + \mathbf{u}^2}\,. \qquad (1)$$

Известно, что с электродинамической точки зрения метрика (1) геометрии Лобачевского моделирует специальную среду с тензорами диэлектрической и магнитной проницаемости вида [1]

$$\varepsilon^{ik}(x) = -\sqrt{-g}\; g^{00}(x) g^{ik}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2z} \end{vmatrix}, \qquad \left(\mu^{-1}\right)^{ik}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2z} \end{vmatrix}; \tag{2}$$

материальные уравнения выглядят так: $D^i = \varepsilon_0 \varepsilon^{ik} E_k$, $B_i = \mu_0 \mu^{ik} H^k$, $\varepsilon^{ik}(x) = \mu^{ik}(x)$. Для описания электромагнитного поля в пространстве Лобачевского будем использовать комплексный формализм Майораны – Оппенгреймера (подробнее об этом см. в [2, 3]):

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial t} + \alpha^{(1)} e^z \frac{\partial}{\partial x} + \alpha^{(2)} e^z \frac{\partial}{\partial y} + \alpha^{(3)} \frac{\partial}{\partial z} - \alpha^{(1)} s_2 + \alpha^{(2)} s_1 \right) \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{E} + i\mathbf{B} \end{vmatrix} = 0; \tag{3}$$

явный вид используемых матриц приведен в [2]. Разделение переменных проводится на основе подстановки

$$\begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{E} + i\mathbf{B} \end{vmatrix} = e^{-i\omega t}\, e^{iax}\, e^{iby} \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{f}(z) \end{vmatrix}.$$

В результате приходим к следующей системе уравнений для f_i:

$$ia\, e^z f_1 + ib\, e^z f_2 + \left(\frac{d}{dz} - 2\right) f_3 = 0, \qquad -\omega f_1 - \left(\frac{d}{dz} - 1\right) f_2 + ib\, e^z\, f_3 = 0,$$

$$-\omega f_2 + \left(\frac{d}{dz} - 1\right) f_1 - ia\, e^z\, f_3 = 0, \qquad -\omega f_3 - e^z\, ib f_1 + ia\, e^z\, f_2 = 0.$$

Первое уравнение принимает вид тождества при учете трех остальных, поэтому его можно не учитывать. С использованием подстановки $f_1 = e^z F_1(z)$, $f_2 = e^z F_2(z)$ приводим три уравнения к более простому виду

$$f_3 = \frac{-ib}{\omega} e^{2z} F_1 + \frac{ia}{\omega} e^{2z} F_2,$$

$$\left(\frac{d}{dz} + \frac{ab\, e^{2z}}{\omega}\right) F_2 = \frac{b^2 e^{2z} - \omega^2}{\omega} F_1, \qquad \left(\frac{d}{dz} - \frac{ab\, e^{2z}}{\omega}\right) F_1 = \frac{\omega^2 - a^2 e^{2z}}{\omega} F_2. \tag{4}$$

С использованием переменной $e^z = \sqrt{\omega}\, Z$ два последних уравнения запишутся так:

$$Z\left(\frac{d}{dZ} + ab\, Z\right) F_2 = +\left(b^2 Z^2 - \omega\right) F_1, \qquad Z\left(\frac{d}{dZ} - ab\, Z\right) F_1 = -\left(a^2 Z^2 - \omega\right) F_2. \tag{5}$$

Систему (5) можно решить в вырожденных гипергеометрических функциях. Для этого совершим линейное преобразование

$$F_1 = +\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} G_1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} G_2, \qquad F_2 = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} G_1 + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} G_2;$$

в результате система (5) примет вид

$$Z\frac{d}{dZ} G_1 = \omega\, G_2, \qquad Z\frac{d}{dZ} G_2 = \left[Z^2\left(a^2+b^2\right) - \omega\right] G_1. \tag{6}$$

Из (6) следует уравнение второго порядка для G_1

$$\left(Z^2 \frac{d^2}{dZ^2} + Z\frac{d}{dZ} + \omega^2 - \omega\left(a^2+b^2\right) Z^2\right) G_1 = 0. \tag{7}$$

Преобразуем его к исходной переменной z:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+\omega^2-\left(a^2+b^2\right)e^{2z}\right)G_1=0. \tag{8}$$

Полученное уравнение можно рассматривать как одномерное шредингеровское (пусть $\omega^2 = \varepsilon$):

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+\varepsilon-U\left(z\right)\right)f\left(z\right)=0$$

с потенциальной функцией $U\left(z\right)=\left(a^2+b^2\right)e^{2z}$. Отмечаем, что в частном случае $a=k_1=0,\quad b=k_2=0$ эффективное потенциальное поле исчезает.

Поскольку в квантовой механике частица в таком потенциальном поле должна испытывать отражение от барьера, то можно ожидать аналогичного явления и для электромагнитного поля. Как будет показано ниже, это действительно имеет место. Интересной особенностью данной аналогии является равенство единице коэффициента отражения для всех состояний (за исключением особого случая $a = b = 0$).

Легко оценить глубину проникновения электромагнитного поля в такую эффективную зеркально отражающую среду. Эта глубина определяется путем решения уравнения

$$\omega^2=\left(a^2+b^2\right)e^{2z_0},\quad z_0=\rho\ln\frac{\omega}{c\sqrt{k_1^2+k_2^2}}, \tag{9}$$

где ρ – радиус кривизны пространства Лобачевского.

Отметим специально, что случай $k_1=a=0,\ k_2=b=0$ является особым; при этом уравнения (5) существенно меняются и в (8) исчезает потенциальная функция:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-2\frac{d}{dz}+\varepsilon\right)f(z)=0,\qquad f=e^{(1\pm i\sqrt{\varepsilon-1}\,z)},$$

т. е. здесь возникают решения типа обычных плоских волн.

Теперь обращаемся к общему случаю. Выделением множителя $f=\sqrt{Z}\,F$ можно убрать в (7) член с первой производной

$$\left(\frac{d^2}{dZ^2}+\frac{\varepsilon-3/4}{Z^2}-1\right)F(Z)=0. \tag{10}$$

Будем искать решения в виде $f(Z)=Z^Ae^{BZ}\,F(Z)$; уравнение (10) дает

$$Z\frac{d^2F}{dZ^2}+(2A-1+2BZ)\frac{dF}{dZ}+\left((B^2-1)Z-B(1-2A)+\frac{A(A-2)+\varepsilon}{Z}\right)F=0.$$

При A, B, выбранных согласно (дальше для определенности выбираем знак «–» перед корнем в выражении для A; предполагаем $\varepsilon>1$) $A=1-i\sqrt{\varepsilon-1},\quad B^2=1$; уравнение упрощается

$$Z\frac{d^2F}{dZ^2}+(2A-1+2BZ)\frac{dF}{dZ}-B(1-2A)F=0.$$

В полученном уравнении сделаем еще одну замену $Z = y/2$:

$$y\frac{d^2F}{dy^2}+(2A-1+By)\frac{dF}{dy}+B\left(A-\frac{1}{2}\right)F=0. \tag{11}$$

Уравнение (11) при $B=-1$ представляет собой уравнение для вырожденной гипергеометрической функции

$$y\frac{d^2Y}{dZ^2}+(c-y)\frac{dY}{dy}-\gamma Y=0,$$
$$c=2\gamma\,,\quad \gamma=A-1/2=1/2-i\sqrt{\varepsilon-1},\quad f(Z)=y^{\gamma+1/2}e^{-y/2}\,Y(y). \qquad (12)$$

Будем использовать две пары линейно независимых решений

$$Y_1=\Phi(\gamma,2\gamma,y)\,,\qquad Y_2=y^{1-2\gamma}\Phi(1-\gamma,2-2\gamma,y)$$

и

$$Y_5=\Psi(\gamma,2\gamma,y)\,,\qquad Y_7=e^{y}\Psi(\gamma,2\gamma,-y)\,. \qquad (13)$$

Эти пары решений связаны линейными соотношениями Куммера

$$Y_5=\frac{\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)}Y_1+\frac{\Gamma(2\gamma-1)}{\Gamma(\gamma)}Y_2\,,\qquad Y_7=\frac{\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)}Y_1-\frac{\Gamma(2\gamma-1)}{\Gamma(\gamma)}Y_2\,, \qquad (14а)$$

которые после умножения на $y^{\gamma+1/2}e^{-y/2}$ принимают вид

$$f_5=\frac{\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)}f_1+\frac{\Gamma(2\gamma-1)}{\Gamma(\gamma)}f_2\,,\qquad f_7=\frac{\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)}f_1-\frac{\Gamma(2\gamma-1)}{\Gamma(\gamma)}f_2\,. \qquad (14б)$$

Обращаем внимание, что решения Y_1 и Y_2 описывают при отрицательных $z\longrightarrow-\infty$ ($y\longrightarrow 0$) волны с асимптотическим поведением:

$$f_1=y^{\gamma+1/2}=\left(2\sqrt{k_1^2+k_2^2}\right)^{1-i\sqrt{\varepsilon-1}}e^{z}\;e^{-i\sqrt{\varepsilon-1}\,z}\,, \qquad (15а)$$

$$f_2=y^{\gamma+1/2}\;y^{1-2\gamma}=\left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{1+i\sqrt{\varepsilon-1}}e^{z}\;e^{+i\sqrt{\varepsilon-1}\,z}\,. \qquad (15б)$$

Следовательно, функция Y_5 (и связанная с ней φ_5) при отрицательных $z\longrightarrow-\infty$ ведет себя как суперпозиция двух плоских волн согласно

$$\varphi_5=\frac{\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)}\left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{1-i\sqrt{\varepsilon-1}}e^{-i\sqrt{\varepsilon-1}\,z}+\frac{\Gamma(2\gamma-1)}{\Gamma(\gamma)}\left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{1+i\sqrt{\varepsilon-1}}e^{+i\sqrt{\varepsilon-1}\,z}. \qquad (16)$$

Можно определить коэффициент отражения как квадрат модуля отношения амплитуд в суперпозиции плоских волн

$$M_-\,e^{-i\sqrt{\varepsilon-1}\,z}+M_+\,e^{+i\sqrt{\varepsilon-1}\,z}\,,\quad R=\left|\frac{M_-}{M_+}\right|^2,\quad R=\left|\frac{\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(2\gamma-1)}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)}\right|^2. \qquad (17а)$$

Учтем

$$1-2\gamma=+2i\sqrt{\varepsilon-1}\,,\quad 2\gamma-1=-2i\sqrt{\varepsilon+1}\,,$$
$$\gamma=1/2-i\sqrt{\varepsilon-1}\,,\quad 1-\gamma=1/2+i\sqrt{\varepsilon-1},$$

тогда

$$R=\left|\frac{\Gamma(+2i\sqrt{\varepsilon-1})}{\Gamma(-2i\sqrt{\varepsilon-1})}\right|^2\left|\frac{\Gamma(1/2-i\sqrt{\varepsilon-1})}{\Gamma(1/2+i\sqrt{\varepsilon-1})}\right|^2\equiv 1. \qquad (17б)$$

Найдем поведение Y_5 в области больших *y*. Применяя известное асимптотическое соотношение $Y_5=\Psi(\gamma,c,y)\sim y^{-\gamma}$, получим:

$$z \to +\infty\,, \qquad f_5 = y^{\gamma+1/2} e^{-y/2}\, Y_5 \sim y^{1/2} e^{-y/2} \sim$$
$$\sim \left(2\sqrt{a^2+b^2}\; e^z\right)^{1/2} \exp\left(-\sqrt{a^2+b^2}\; e^z\right) \longrightarrow \exp^{-e^{+\infty}} = 0\,. \qquad (18)$$

Решение f_5 является описанием ожидаемой ситуации: волна падает слева, отражается от эффективного барьера; справа за барьером решение резко спадает до нуля. Таким образом, эффективно геометрия Лобачевского моделирует распределенное в пространстве идеальное зеркало. Более детальный анализ вопроса приведен в работе [4].

2. Частицы со спином 1/2 в пространстве Лобачевского. В системе координат (1) пространства Лобачевского уравнение Дирака имеет вид

$$\left[\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^1 e^z \frac{\partial}{\partial x} + \gamma^2 e^z \frac{\partial}{\partial y} + \gamma^3\left(\frac{\partial}{\partial z} - 1\right) + im\right]\Psi = 0\,. \qquad (19)$$

С волновым оператором из (19) коммутируют следующие три: $i\partial_t, i\partial_x, i\partial_y$; соответственно решения ищем в виде

$$\Psi^{\varepsilon,k_1,k_2} = e^{-i\varepsilon t}\; e^{ik_1 x}\; e^{ik_2 y} \begin{vmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ f_3(z) \\ f_4(z) \end{vmatrix}. \qquad (20)$$

Используя матрицы Дирака в спинорном базисе, из (19) можно получить систему из четырех уравнений для функций $f_i(z)$. Существует обобщенный оператор спиральности, коммутирующий с оператором волнового уравнения:

$$\Sigma = \frac{1}{2}\left(e^z \gamma^2\gamma^3 \frac{\partial}{\partial x} + e^z \gamma^3\gamma^1 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma^1\gamma^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} - 1\right)\right). \qquad (21)$$

Его диагонализация $\Sigma\,\Psi = p\,\Psi$ позволяет наложить дополнительные условия на эти четыре функции:

$$p = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}\,, \quad f_3 = \frac{\varepsilon - p}{m} f_1\,, \quad f_4 = \frac{\varepsilon - p}{m} f_2\,. \qquad (22)$$

В результате получаем систему из двух уравнений для f_1, f_2:

$$\left(\frac{d}{dz} - 1 - ip\right) f_1 + e^z (ik_1 + k_2) f_2 = 0\,, \quad \left(\frac{d}{dz} - 1 + ip\right)_2 - e^z (ik_1 - k_2) f_1 = 0\,. \qquad (23)$$

Существует специальный простой случай, когда $k_1 = 0,\ k_2 = 0$.. При этом уравнения и их решения существенно упрощаются:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - 1 - ip\right) f_1 = 0\,, \quad f_1 = C_1\, e^z e^{+ipz}\,; \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} - 1 + ip\right) f_2 = 0, \quad f_2 = C_2\, e^z e^{-ipz}\,. \qquad (24)$$

Наиболее просто интерпретируются следующие решения:

$$\Psi_1^{\varepsilon 00 p}(t,z) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\varepsilon - p}{m} \\ 0 \end{vmatrix} e^z e^{+ipz}, \quad \Psi_2^{\varepsilon 00 p}(t,z) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dfrac{\varepsilon - p}{m} \end{vmatrix} e^z e^{-ipz}. \qquad (25)$$

Очевидно, что присутствующий в решениях множитель e^z будет компенсироваться при рассмотрении билинейных конструкций из волновых функций (с учетом их последующего умножения на $\sqrt{-g}\ dxdydz$).

Обратимся к системе (23) и перейдем в ней к переменной Z:

$$\sqrt{k_1^2+k_2^2}\ e^z = Z\,, \quad Z\in(0,+\infty)\,, \quad e^{ia}=\sqrt{\frac{k_2+ik_1}{k_2-ik_1}}\,,$$

тогда

$$\left(Z\frac{d}{dZ}-1-ip\right)f_1+Ze^{+ia}f_2=0\,, \quad \left(Z\frac{d}{dZ}-1+ip\right)f_2+Ze^{-ia}f_1=0\,. \tag{26}$$

Из (26) получаем дифференциальные уравнения второго порядка для функций f_1 и f_2:

$$Z\frac{d^2 f_1}{dZ^2}-2\frac{d\,f_1}{dZ}+\left(\frac{p^2+ip+2}{Z}-Z\right)f_1=0, \tag{27а}$$

$$Z\frac{d^2 f_2}{dZ^2}-2\frac{d\,f_2}{dZ}+\left(\frac{p^2-ip+2}{Z}-Z\right)f_2=0. \tag{27б}$$

Отмечаем симметрию между уравнениями: они переходят друг в друга при замене $p\longrightarrow -p$.

Уравнения (27) по математической структуре совпадают с исследованным при анализе случая электромагнитного поля уравнением (7). Это означает, что основные особенности явления отражения частицы со спином $1/2$, взаимодействующей с геометрией пространства Лобачевского (или генерируемой этой геометрий специальной средой), будут аналогичными. Однако следует обратить внимание на то, что в отличие от случая плоского пространства здесь уравнения второго порядка для функций f_1 и f_2 зависят явно от первой степени параметра p, т. е. от состояния поляризации спинорной волны; кроме того, уравнение второго порядка не может быть приведено к виду вещественного потенциала.

Рассмотрим уравнение (27а). Введем подстановку $f_1(Z)=Z^A e^{BZ}F_1(Z)$:

$$Z\frac{d^2F_1}{dZ^2}+(2A-2+2BZ)\frac{d\,F_1}{dZ}+\left[(B^2-1)Z+2B(A-1)+\frac{(A-ip-1)(A+ip-2)}{Z}\right]F_1=0.$$

При A и B, выбранных согласно $A=+ip+1,-ip+2,\ B=\pm1$, полученное уравнение упрощается:

$$Z\frac{d^2F_1}{dZ^2}+(2A-2+2BZ)\frac{d\,F_1}{dZ}+2B(A-1)F_1=0;$$

после выполнения еще одной замены переменной $Z=y/2$ приходим к

$$y\frac{d^2F_1}{dy^2}+(2A-2+By)\frac{d\,F_1}{dy}+B(A-1)F_1=0, \tag{28а}$$

что при $B=-1$ представляет собой уравнение для вырожденной гипергеометрической функции с параметрами (не теряя общности, выберем $A=+ip+1$)

$$y\frac{d^2\Phi}{dy^2}+(c-y)\frac{d\,\Phi}{dy}-a\Phi=0, \quad a=+ip, \quad c=2a=+2ip. \tag{28б}$$

Двумя линейно независимыми решениями являются

$$F_1^{(1)}(y)=\Phi(a,c,y)\,, \quad F_1^{(2)}(y)=y^{1-c}\Phi(a-c+1,2-c,y)\,. \tag{28в}$$

По аналогии со случаем плоского пространства, эти два решения можно рассматривать как описывающие волны, распространяющиеся в противоположных направлениях.

Рассмотрим уравнение (27б). Воспользовавшись отмеченной выше симметрией, получаем

$$f_2 = y^{a'+1} e^{-y/2} F_2(y) , \qquad a' = -ip , \qquad c' = 2a' = -2ip ,$$
$$F_2^{(1)} = \Phi(a', c', y) , \qquad F_2^{(2)} = y^{1-c'} \Phi(a' - c' + 1, 2 - c', y) . \tag{29}$$

В найденных решениях перейдем к одному независимому параметру a:

$$f_1 = y^{a+1} e^{-y/2} F_1(y) ,$$
$$F_1^{(1)}(y) = \Phi(a, 2a, y) , \qquad F_1^{(2)}(y) = y^{1-2a} \Phi(1-a, 2-2a, y) ; \tag{30а}$$
$$f_2 = y^{-a+1} e^{-y/2} F_2(y) ,$$
$$F_2^{(1)}(y) = \Phi(-a, -2a, y) , \qquad F_2^{(2)}(y) = y^{1+2a} \Phi(1+a, 2+2a, y) . \tag{30б}$$

Функции f_1, f_2 связаны уравнениями первого порядка

$$\left(y \frac{d}{dy} - 1 - a \right) f_1 - \frac{y}{2} e^{+ia} f_2 = 0 , \quad \left(y \frac{d}{dy} - 1 + a \right) f_2 - \frac{y}{2} e^{-ia} f_1 = 0 ;$$

перейдем в этих уравнениях к функциям F_1, F_2, в результате получим

$$\frac{dF_1}{dy} - \frac{1}{2}\left(F_1 + y^{-2a} e^{+ia} F_2 \right) = 0, \quad \frac{dF_2}{dy} - \frac{1}{2}\left(F_2 + y^{+2a} e^{-ia} F_1 \right) = 0 .$$

Анализ показывает, что этими уравнениями связываются функции из следующих пар:

$$F_1^{(1)}(y) --- F_2^{(2)}(y) , \qquad F_1^{(2)}(y) --- F_2^{(1)}(y) .$$

Следует в каждом случае найти относительные коэффициенты двух функций. После выполнения необходимых вычислений получаем два типа решений:

$$I \;\; f_1 = M_+ \, e^{-y/2} y^{1+a} \, \Phi(a, 2a, y) ,$$
$$f_2 = e^{-y/2} y^{2+a} \Phi(a+1, 2+2a, y) , \qquad M_+ = \left[2 e^{+ia} \, (1+2a) \right] ; \tag{31а}$$
$$II \;\; f_1 = M_- \, e^{-y/2} y^{2-a} \Phi(1-a, 2-2a, y) ,$$
$$f_2 = e^{-y/2} y^{1-a} \Phi(-a, -2a, y) , \qquad M_- = \left[2 e^{-ia} \, (1-2a) \right] . \tag{31б}$$

Напоминаем, что $a = ip = \pm i\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$; знак величины p связан с состоянием поляризации спинорной волны; а типы I и II (предположительно) должны быть связаны с направлениями распространения волны: влево или вправо.

Остановимся на решениях в пространстве Лобачевского уравнений в нерелятивистском приближении. Можно показать (технические детали опускаем), что после осуществления такого приближения в системе уравнений для частицы Дирака мы получим следующие два паулиевских уравнения:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - 2\frac{d}{dz} + 1 - e^{2z} \, (k_1^2 + k_2^2) + 2\, m\, E \right] F - e^z \, (i\, k_1 - k_2) \, f = 0,$$
$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - 2\frac{d}{dz} + 1 - e^{2z} \, (k_1^2 + k_2^2) + 2\, m\, E \right] f + e^z \, (i\, k_1 + k_2) \, F = 0; \tag{32}$$

это зацепляющиеся уравнения второго порядка для двух функций. Решения этой системы могут быть найдены из решений релятивистских уравнений, если учесть следующие определения:

$$f=\frac{f_1(z)+f_3(z)}{2}=\frac{1+A}{2}f_1(z)\,,\quad F=\frac{f_2(z)+f_4(z)}{2}=\frac{1+A}{2}f_2(z)\,,$$
$$A=\frac{\varepsilon\pm p}{m},\qquad p=\pm\sqrt{\varepsilon^2-m^2}=\pm\sqrt{(E+m)^2-m^2}\approx\pm\sqrt{2mE}\,; \tag{33}$$

знак «$\pm$» соответствует двум разным поляризациям нерелятивистского электрона.

Наконец следует специально остановиться на построении решений, описывающих ситуацию отражения частиц со спином $1/2$ от эффективного потенциального барьера, генерируемого геометрий пространства Лобачевского. Для этого вернемся к основной системе уравнений (26) и представим ее в виде

$$\left(Z\frac{d}{dZ}-1-ip\right)\sqrt{k_2-ik_1}\,f_1+Z\sqrt{k_2+ik_1}\,f_2=0\,,$$
$$\left(Z\frac{d}{dZ}-1+ip\right)\sqrt{k_2+ik_1}\,f_2+Z\sqrt{k_2-ik_1}\,f_1=0\,.$$

Перейдем к новым функциям

$$\sqrt{k_2-ik_1}\,f_1=e^z\varphi_1\,,\qquad \sqrt{k_2+ik_1}\,f_2=e^z\varphi_2\,, \tag{34}$$

в результате получим

$$\left(Z\frac{d}{dZ}-ip\right)\varphi_1+Z\varphi_2=0\,,\qquad \left(Z\frac{d}{dZ}+ip\right)\varphi_2+Z\varphi_1=0\,. \tag{35}$$

Затем переходим к новой переменной $x=iZ=i\sqrt{k_1^2+k_2^2}\,e^z$:

$$\left(x\frac{d}{dx}-ip\right)\varphi_1-ix\varphi_2=0\,,\qquad \left(x\frac{d}{dx}+ip\right)\varphi_2-ix\varphi_1=0\,. \tag{36}$$

Из (36) следуют уравнения второго порядка

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+1+\frac{p^2+ip}{x^2}\right)\varphi_1=0\,,\qquad \left(\frac{d^2}{dx^2}+1+\frac{p^2-ip}{x^2}\right)\varphi_2=0\,. \tag{37}$$

Если выделить множитель $\sqrt{x}$: $\varphi_1=\sqrt{x}F_1$, $\varphi_2=\sqrt{x}F_2$, то придем к уравнениям Бесселя:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}+1+\frac{p^2+ip-1/4}{x^2}\right)F_1=0\,,\qquad \left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}+1+\frac{p^2-ip-1/4}{x^2}\right)F_2=0\,. \tag{38}$$

Поскольку нас интересует также случай вейлевского нейтрино (со спиральностью -1), то дальше будем детализировать случай отрицательного $p=-\sqrt{\varepsilon^2-m^2}$. Чтобы не вводить новых обозначений, внесем знак «–» перед p в уравнениях (38), получаем

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}+1+\frac{p^2-ip-1/4}{x^2}\right)F_1=0\,,\quad \left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}+1+\frac{p^2+ip-1/4}{x^2}\right)F_2=0\,, \tag{39}$$

здесь $p=+\sqrt{\varepsilon^2-m^2}>0$. То есть функции $F_1(x),F_2(x)$ удовлетворяют уравнению Бесселя:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}+1-\frac{(ip+1/2)^2}{x^2}\right)F_1=0\,,$$
$$\nu=-ip-1/2\,,\qquad F_1=J_{+\nu}(x),J_{-\nu}(x)\,; \tag{40а}$$
$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}+1-\frac{(-ip+1/2)^2}{x^2}\right)F_2=0\,,$$
$$\mu=-ip+1/2=\nu+1\,,\qquad F_2=J_{+\mu}(x),J_{-\mu}(x)\,. \tag{40б}$$

Поскольку далее предстоит следить за явным видом обеих функций F_1, F_2, обратимся к исходной системе уравнений – в переменной $x = iZ$ с учетом $\nu = -ip - 1/2$ она будет выглядеть так:

$$\left(x\frac{d}{dx} - \nu \right) F_1 = -ix F_2 , \quad \left(x\frac{d}{dx} + \nu + 1 \right) F_2 = -ixF_1 . \tag{41}$$

Напомним известные рекуррентные формулы для решений уравнения Бесселя – записываем их в удобном для использования виде:

$$\left(x\frac{d}{dx} - \nu \right) F_\nu(x) = -xF_{\nu+1}(x) , \quad \left(x\frac{d}{dx} - \nu \right) F_{-\nu}(x) = +xF_{-\nu-1}(x) ; \tag{42}$$

здесь под $F_{\pm\nu}$ можно понимать либо функции Бесселя $J_{\pm\nu}$, либо функции Ганкеля $H^1_{\pm\nu}, H^2_{\pm\nu}$, либо функции Неймана $N_{\pm\nu}(x)$. Сопоставляя (41) с (42), находим в терминах каждых функций по два линейно независимых решения.

В функциях Бесселя

$$\begin{array}{lll} I & F_1^I(x) = J_{+\nu}(x) , & F_2^I(x) = -i\, J_{+(\nu+1)}(x) ; \\ II & F_1^{II}(x) = J_{-\nu}(x) , & F_2^{II}(x) = +i\, J_{-(\nu+1)}(x) . \end{array} \tag{43}$$

В функциях Ганкеля

$$\begin{array}{lll} I & F_1^I(x) = H^1_{+\nu}(x) , & F_2^I(x) = -i\, H^1_{+(\nu+1)}(x) ; \\ II & F_1^{II}(x) = H^2_{+\nu}(x) , & F_2^{II}(x) = -i\, H^2_{+(\nu+1)}(x) ; \end{array} \tag{44а}$$

$$\begin{array}{lll} I' & F_1(x) = H^1_{-\nu}(x) , & F_2(x) = +i\, H^1_{-(\nu+1)}(x) ; \\ II' & F_1(x) = H^2_{-\nu}(x) , & F_2(x) = +i\, H^2_{-(\nu+1)}(x) ; \end{array} \tag{44б}$$

напоминаем, что $H^1_{-\nu}(x) = e^{i\nu\pi} H^2_\nu(x)$, поэтому штрихованные варианты I', II' совпадают соответственно с II, I (с точностью до множителей) и дальше не рассматриваются.

В функциях Неймана

$$\begin{array}{lll} I & F_1^I(x) = N_{+\nu}(x) , & F_2^I(x) = -i\, N_{+(\nu+1)}(x) ; \\ II & F_1^{II}(x) = N_{-\nu}(x) , & F_2^{II}(x) = +i\, N_{-(\nu+1)}(x) . \end{array} \tag{45}$$

Анализ асимптотического поведения решений, построенных на основе этих трех типов функций, позволяет заполнить следующую таблицу (технические детали вычислений опускаем, используем обозначение $x = iX$, $\sigma = -p$):

	функции	Бесселя		функции	Ганкеля		функции	Неймана
	$z \to -\infty$	$z \to +\infty$		$z \to -\infty$	$z \to +\infty$		$z \to -\infty$	$z \to +\infty$
Z_1^I	e^{-ipz}	e^{+X}	Z_1^I	e^{-ipz}	e^{-X}	Z_1^I	e^{-ipz}	e^{+X}
Z_2^I	0	e^{+X}	Z_2^I	e^{+ipz}	e^{-X}	Z_2^I	e^{+ipz}	e^{+X}
Z_1^{II}	0	e^{+X}	Z_1^{II}	e^{-ipz}	e^{+X}	Z_1^{II}	e^{-ipz}	e^{+X}
Z_2^{II}	e^{+ipz}	e^{+X}	Z_2^{II}	e^{+ipz}	e^{+X}	Z_2^{II}	e^{+ipz}	e^{+X}

(46)

Решения с нужным поведением в асимптотических областях (экспоненциальное затухание при $z \to +\infty$ и осциллирующее поведение при $z \to -\infty$) встречаются только среди решений типа I, построенных в терминах функций Ганкеля.

Заключение. Интерпретацию уравнений Максвелла в пространстве Лобачевского как уравнений Максвелла в плоском пространстве, но в специальной материальной среде можно попробовать распространить и на случай уравнений для частиц с полуцелым спином, записанных в пространстве Лобачевского. Действие «среды» на электромагнитное поле и на поле частиц со спином 1/2 оказывается похожим: «среда» действует на фермионы так же, как идеальное зеркало, глубина проникновения в него частиц со спином растет с ростом энергии и уменьшается с увеличением кривизны пространства (уменьшением радиуса кривизны ρ пространства Лобачевского). Нужно заметить, что уравнение Паули в пространстве Лобачевского для нейтральной частицы ничем не отличается от уравнения Паули для электрически заряженной частицы. Это означает, что анализ паулиевского случая вполне может использоваться для моделирования поведения в среде и нейтронов.

Такая интерпретация действия геометрии на частицы может быть использована не только в случае пространства Лобачевского, но и для других примеров неевклидовой геометрии. Понятно, что каждый новый тип геометрии моделирует действие эффективной среды с новыми свойствами.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках сотрудничества Беларусь – Украина (грант № Ф13К-079 «Эффекты неевклидовой геометрии и топологии в микро- и макросистемах во внешних полях»).

Литература

1. *Red'kov V. M., Tokarevskaya N. G., Ovsiyuk E. M., Spix G. J.* // NPCS. 2009. Vol. 12, no 3. P. 232–250.
2. *Редьков В. М.* Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца. Минск, 2009.
3. *Bogush A. A., Krylov G. G., Ovsiyuk E. M., Red'kov V. M.* // Ricerche di matematica. 2010. Vol. 59, no 1. P. 59–96.
4. *Ovsiyuk E. M., Red'kov V. M.* // Mode of access: http://arxiv.org/abs/1109.0126.

E. M. OVSIYUK, O. V. VEKO, V. M. RED'KOV

MODELING OF A MEDIUM WITH THE PROPERTY OF A PERFECT MIRROR FOR THE LIGHT AND SPIN 1/2 PARTICLES

Summary

The geometry of Lobachevsky space is considered as a basis for modeling an effective medium. In Lobachevsky space, Maxwell's equations in the 3D complex Majorana − Oppenheimer formalism are solved exactly. The problem effectively reduces to one second-order differential equation. In the context of quantum mechanics, such an equation describes the motion of a particle in a potential field gradually increasing to infinity; a particle is reflected from the barrier. The geometry of Lobachevsky space simulates a perfect mirror distributed in the space. The penetration depth of the field into the “medium–mirror” is determined by the frequency of an electromagnetic wave and by the curvature radius of an effective modeling space. The influence of the geometry on spin 1/2 particles is the same: the “medium” acts on fermions as a perfect mirror, the penetration depth of particles increases with energy and decreases with increasing the space curvature.