ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 519.216.73
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-135-151

Поступила в редакцию 09.11.2018
Received 09.11.2018

М. М. Васьковский, И. В. Качан

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА, УПРАВЛЯЕМЫХ ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ

Аннотация. Разработаны новые методы точного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, содержащих стандартное броуновское движение, дробное броуновское движение с показателем Харста $H > 1/2$ и снос. Решения уравнений понимаются в интегральном смысле, где, в свою очередь, интеграл по стандартному броуновскому движению понимается как интеграл Ито, а интеграл по дробному броуновскому движению – как потраекторный интеграл Янга. Полученные в статье методы интегрирования можно отнести к двум типам. Методы первого типа основаны на приведении уравнений к уравнениям более простого вида, в частности к простейшим и линейным неоднородным уравнениям. В работе получены необходимые и достаточные условия приводимости, применимые к одномерным уравнениям, а также приведены примеры, охватывающие, в частности, стохастические уравнения Бернулли. Метод второго типа основан на переходе к уравнению Стратоновича и применим к многомерным уравнениям. В дополнение к указанным методам интегрирования получены аналоги дифференциальных уравнений Колмогорова для математических ожиданий и плотностей распределений решений в предположении, что коэффициенты стохастического дифференциального уравнения смешанного типа порождают коммутирующие дифференциальные потоки.

Ключевые слова: дробное броуновское движение, формула Ито, стохастическое дифференциальное уравнение, методы точного интегрирования, интеграл Ито, интеграл Янга

Для цитирования. Васьковский, М. М. Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа / М. М. Васьковский, И. В. Качан // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 2. – С. 135–151. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-135-151

M. M. Vas'kovskii, I. V. Kachan

Belarusian State University, Minsk, Belarus

INTEGRATION METHODS OF MIXED-TYPE STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FRACTIONAL BROWNIAN MOTIONS

Abstract. In the present, article new methods of exact integration of mixed-type stochastic differential equations with standard Brownian motion, fractional Brownian motion with the Hurst exponent $H > 1/2$ and the drift term have been constructed. Solutions of these equations are understood in integral sense where, in turn, the standard Brownian motion integral is the Ito integral and the fractional Brownian motion integral is the pathwise Young integral. The constucted integration methods can be attributed to two types. The first-type methods are based on reducing the equations to simpler equations, in particular – to the simplest equations and the linear inhomogeneous equations. In the article, necessary and sufficient conditions of reducing the equations applicable to one-dimensional equations have been obtained and the examples particularly covering the stochastic Bernoulli-type equations have been given. The second-type method is based on going to the Stratonovich equation and is applicable to multidimensional equations. In addition to the mentioned integration methods, the analogues of the differential Kolmogorov equation have been obtained for mathematical expectations and the solution probability density, assuming that coefficients of the mixed-type stochastic differential equation generate commuting flows.

Keywords: fractional Brownian motion, Ito formula, stochastic differential equation, exact integration methods, Ito integral, Young integral

For citation. Vas'kovskii M. M., Kachan I. V. Integration methods of mixed-type stochastic differential equations with fractional Brownian motions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 135–151 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-135-151

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) заданы d-мерное стандартное броуновское движение $W(t)$ и d-мерное дробное броуновское движение $B(t)$ с показателем Харста $H \in (1/2, 1)$.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = f\big(t, x(t)\big)dt + g\big(t, x(t)\big)dW(t) + \sigma\big(t, x(t)\big)dB(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $\sigma: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ – детерминированные функции.

Стохастическое дифференциальное уравнение (1) называется уравнением смешанного типа, если в определении решения интеграл по стандартному броуновскому движению $W(t)$ понимается как интеграл Ито, а интеграл по дробному броуновскому движению $B(t)$ определяется как потраекторный интеграл Янга. Интерес к стохастическим дифференциальным уравнениям смешанного типа вызван тем, что, с одной стороны, они охватывают стохастические дифференциальные уравнения Ито, а с другой – наличие слагаемого с дробным броуновским движением позволяет строить более точные математические модели, учитывающие эффект долговременной памяти, что особенно важно при моделировании экономических и финансовых процессов [1, 2]. В работах [3–12] исследованы вопросы существования, единственности решений стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, а также общие и асимптотические свойства решений таких уравнений. Стоит отметить, что задача изучения асимптотических свойств решений стохастических дифференциальных уравнений, содержащих дробные броуновские движения, существенно усложняется по сравнению с задачей исследования аналогичных уравнений Ито, а ряд основополагающих методов, таких как второй метод Ляпунова исследования устойчивости, неприменим вовсе [12]. В связи с этим проблема нахождения решений уравнений (1) в явном виде представляется актуальной и важной.

Цель настоящей статьи заключается в нахождении методов построения решений в явном виде стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа либо их вероятностных характеристик. В частности, мы приводим необходимые и достаточные условия, обеспечивающие существование замен переменных, сводящих уравнение (1) к простейшим и линейным неоднородным уравнениям смешанного типа, и обобщающие результаты из [13–14]. Используя подход к интегрированию непрерывных процессов с конечной квадратической вариацией, разработанный в [15], получаем соотношение между решениями уравнений (1) и соответствующих уравнений Стратоновича. Аналогичная связь хорошо известна для процессов Ито [14] и в ряде случаев помогает строить решения стохастических дифференциальных уравнений в явном виде.

Для нахождения вероятностных характеристик (математических ожиданий, плотностей распределений) решений стохастических дифференциальных уравнений Ито, как правило, используют прямые и обратные уравнения Колмогорова [14]. При выводе этих уравнений ключевую роль играет марковское свойство решений автономных стохастических дифференциальных уравнений Ито [16]. Решения стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, вообще говоря, не являются семимартингалами (даже в простейшем случае $f = g = 0$, $\sigma = 1$) и, как следствие, не обладают марковским свойством. В настоящей работе для вывода аналогов уравнений Колмогорова для автономных уравнений вида (1) применяется принципиально другой подход: используется явное представление решений уравнений (1) через детерминированные дифференциальные потоки, соответствующие коэффициентам уравнения (1), при этом ключевую роль играет условие коммутирования соответствующих дифференциальных потоков. Более того, показано, что без предположения о коммутировании дифференциальных потоков, соответствующих коэффициентам уравнения (1), аналоги уравнений Колмогорова для смешанных уравнений, вообще говоря, не имеют места. Наш подход к выводу аналогов уравнений Колмогорова близок к методам, предложенным в работах [17–18], где аналогичные уравнения получены для уравнений Стратоновича, содержащих дробные броуновские движения с индексами Харста, большими 1/3. Но, в отличие от упомянутых исследований, в настоящей статье условия на гладкость коэффициентов рассматриваемого стохастического дифференциального уравнения существенно ослаблены за счет того, что показатель Харста соответствующих дробных броуновских движений больше 1/2.

О п р е д е л е н и е 1. Под решением уравнения (1) понимаем процесс $x(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, заданный на вероятностном пространстве (Ω, F, P), согласованный с потоком σ-алгебр F_t, порожденным процессами $W(t)$ и $B(t)$, такой, что выполняются условия:

1) существует $\alpha > 1 - H$ такое, что процесс $x(t)$ имеет п.н. непрерывные по Гельдеру с показателем α траектории;

2) для любого $t \in \mathbb{R}^+$ почти наверное выполняется равенство

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f\big(s, x(s)\big)ds + \int_0^t g\big(s, x(s)\big)dW(s) + \int_0^t \sigma\big(s, x(s)\big)dB(s),$$

где интеграл по процессу $W(t)$ – стохастический интеграл Ито, а интеграл по процессу $B(t)$ – потраекторный интеграл Янга [3].

З а м е ч а н и е 1. Иногда рассматривают решения, допускающие взрывы за конечное время. В этом случае решение $x(t)$ определяется для $t < \tau$, где τ – так называемый момент взрыва (F_t-момент остановки, такой что $\lim_{t\to\tau-0}\|x(t)\| = \infty$ при $\tau < \infty$), а непрерывность траекторий по Гельдеру предполагается до момента τ.

Пусть функция $F(t, x)$ непрерывна вместе со своими производными $F_t'(t,x)$, $F_x'(t,x)$, $F_{x^2}''(t,x)$. Если функции f, g измеримы по Борелю, функция σ удовлетворяет (δ, ρ)-условию Гельдера по (t, x) при некоторых $\delta > 1 - H$, $\rho > 2 - 2H$, а решение $x(t)$ имеет непрерывные по Гельдеру порядка α траектории п.н. при $\alpha\rho > 1$, то имеет место аналог формулы Ито [4, с. 184]:

$$\begin{gathered} F\big(t, x(t)\big) = F\big(0, x(0)\big) + \\ +\int_0^t\Big(F_t'\big(\tau, x(\tau)\big) + F_x'\big(\tau, x(\tau)\big) f\big(\tau, x(\tau)\big) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\Big(F_{x^2}''\big(\tau, x(\tau)\big) g\big(\tau, x(\tau)\big) g^T\big(\tau, x(\tau)\big)\Big)\Big)d\tau + \\ +\int_0^t F_x'\big(\tau, x(\tau)\big) g\big(\tau, x(\tau)\big) dW(\tau) + \int_0^t F_x'\big(\tau, x(\tau)\big)\sigma\big(\tau, x(\tau)\big)dB(\tau). \end{gathered} \tag{2}$$

1. Методы интегрирования одномерных уравнений смешанного типа. В данном разделе будем рассматривать одномерное уравнение (1), т. е. $d = 1$. Будем предполагать, что коэффициенты рассматриваемых уравнений являются достаточно гладкими функциями, обеспечивающими возможность достаточного числа дифференцирований и применений формулы замены переменных (2).

Приведение к простейшим уравнениям. Рассмотрим простейшее уравнение

$$dy(t) = u(t)dt + v(t)dW(t) + b(t)dB(t), \quad t \geq 0. \tag{3}$$

Решение уравнения (3) выражается следующей формулой:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t u(\tau)d\tau + \int_0^t v(\tau)dW(\tau) + \int_0^t b(\tau)dB(\tau), \quad t \geq 0.$$

Найдем класс уравнений (1), приводимых к (3) с помощью дважды непрерывно дифференцируемого и обратимого относительно x преобразования $y = F(t, x)$ посредством формулы Ито (2) в предположении, что функции f, g, σ обладают производными требуемых порядков для последующих вычислений. В соответствии с формулой Ито, должны быть справедливы соотношения:

$$u(t) = F_t'(t,x) + F_x'(t,x) f(t,x) + \frac{1}{2}F_{x^2}''(t,x) g^2(t,x), \tag{4}$$

$$v(t) = F_x'(t,x) g(t,x), \tag{5}$$

$$b(t) = F_x'(t,x)\sigma(t,x). \tag{6}$$

Из соотношений (5), (6) следует, что

$$\frac{v(t)}{g(t,x)} = \frac{b(t)}{\sigma(t,x)},$$

или

$$\frac{\sigma(t,x)}{g(t,x)} = \frac{b(t)}{v(t)} := q(t).$$

Также из соотношения (5) очевидным образом можно выразить следующие производные функции F:

$$F'_x = \frac{v}{g}, \quad F''_{x^2} = -\frac{vg'_x}{g^2}, \quad F''_{tx} = \frac{v'g - vg'_t}{g^2}. \tag{7}$$

Дифференцируя соотношение (4) по x и используя полученные формулы для $F'_x, F''_{x^2}, F''_{tx}$, получим

$$F''_{tx} + F''_{x^2} f + F'_x f'_x + \frac{1}{2} F'''_{x^3} g^2 + F''_{x^2} g'_x g = 0,$$

$$\frac{v'g - vg'_t}{g^2} - \frac{vg'_x f}{g^2} + \frac{vf'_x}{g} - \frac{vg''_{x^2} g^2 - 2vg(g'_x)^2}{2g^2} - \frac{v(g'_x)^2}{g} = 0,$$

$$\frac{v'}{v} = g\left(\frac{g'_t}{g^2} + \frac{g'_x f}{g^2} - \frac{f'_x}{g} + \frac{1}{2} g''_{x^2}\right) = g\left(\frac{g'_t}{g^2} + \left(\frac{f}{g}\right)_x + \frac{1}{2} g''_{x^2}\right). \tag{8}$$

Левая часть последнего соотношения зависит лишь от t, поэтому на функции f, g, σ накладываются следующие ограничения:

$$g(t,x)\left(\frac{g'_t(t,x)}{g^2(t,x)} + \left(\frac{f(t,x)}{g(t,x)}\right)_x + \frac{1}{2} g''_{x^2}(t,x)\right) = r(t), \tag{9}$$

$$\frac{\sigma(t,x)}{g(t,x)} = q(t) \tag{10}$$

для некоторых функций $r(t)$, $q(t)$.

Обратно, пусть заданные функции f, g, σ удовлетворяют условиям (9), (10). Тогда из соотношения (8) находим функцию $v(t) = \exp\left(\int_0^t r(\tau)d\tau\right)$ (как любое нетривиальное решение линейного однородного уравнения). Из соотношения (7) найдем $F(t,x) = v(t)\int_0^x \frac{ds}{g(t,s)}$, причем ввиду того, что $v \neq 0$, $F'_x = \frac{v}{g} \neq 0$, т. е. функция F будет обратима по x. Зная функцию F, из соотношений (4), (6) однозначно определяем функции $u(t)$ и $b(t)$. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 1. *Уравнение* (1) *с* $g(t, x) \neq 0$ *приводимо к уравнению* (3) *с помощью некоторого дважды непрерывно дифференцируемого и обратимого относительно* x *преобразования* $y = F(t, x)$ *тогда и только тогда, когда найдутся функции* $q(t)$, $r(t)$ *такие, что оказываются выполненными соотношения* (9), (10).

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть заданы скалярные функции* $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, *при этом* $\beta(t) \neq 0$. *Тогда решение линейного однородного уравнения*

$$dx(t) = \alpha(t)x(t)dt + \beta(t)x(t)dW(t) + \gamma(t)x(t)dB(t), \quad t \geq 0, \tag{11}$$

с начальным условием $x(0) = x_0 > 0$ *выражается формулой*

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t \left(\alpha(\tau) - \frac{1}{2}\beta^2(\tau)\right)d\tau + \int_0^t \beta(\tau)dW(\tau) + \int_0^t \gamma(\tau)dB(\tau)\right).$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что функции $f(t, x) = \alpha(t)x$, $g(t, x) = \beta(t)x$, $\sigma(t, x) = \gamma(t)x$ удовлетворяют условиям (9), (10), причем $\dfrac{\nu'(t)}{\nu(t)} = \dfrac{\beta'(t)}{\beta(t)}$, т. е. $\ln\left(\dfrac{\nu(t)}{\beta(t)}\right) = 0$. Можно выбрать функцию $\nu(t) = \beta(t)$. Тогда $F'_x = 1/x$ и, в свою очередь, можно выбрать преобразование $F = \ln x$. Из соотношений (4), (5) находим, что $u(t) = \alpha(t) - \beta(t) / 2$, $b(t) = \gamma(t)$. Так как $y(t) = \ln x(t)$, то $x(t) = e^{y(t)}$ и, следовательно, имеет место формула

$$x(t) = C\exp\left(\int_0^t\left(\alpha(\tau) - \frac{1}{2}\beta^2(\tau)\right)d\tau + \int_0^t\beta(\tau)dW(\tau) + \int_0^t\gamma(\tau)dB(\tau)\right),$$

где $C = e^{y(0)}$. Подставляя в формулу $t = 0$, находим величину $C = x(0)$, что и требовалось доказать.

Замечание 2. Непосредственной подстановкой найденной формулы для решения в уравнение (11) можно убедиться, что она сохраняет силу, в том числе, если опустить условия $\beta(t) \neq 0$ и $x_0 > 0$. Нетрудно видеть, что почти все траектории решения уравнения (11) непрерывны по Гельдеру с любым показателем $\kappa < 1/2$.

Предложение 2. *Решение линейного неоднородного уравнения*

$$dx(t) = \left(\alpha_1(t)x(t) + \alpha_2(t)\right)dt + \left(\beta_1(t)x(t) + \beta_2(t)\right)dW(t) + \left(\gamma_1(t)x(t) + \gamma_2(t)\right)dB(t), \quad t \geq 0,$$

выражается формулой

$$x(t) = x_0(t)\left(x(0) + \int_0^t\frac{\alpha_2(\tau) - \beta_1(\tau)\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)}d\tau + \int_0^t\frac{\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)}dW(\tau) + \int_0^t\frac{\gamma_2(\tau)}{x_0(\tau)}dB(\tau)\right),$$

в которой

$$x_0(t) = \exp\left(\int_0^t\left(\alpha_1(\tau) - \frac{1}{2}\beta_1^2(\tau)\right)d\tau + \int_0^t\beta_1(\tau)dW(\tau) + \int_0^t\gamma_1(\tau)dB(\tau)\right)$$

– решение соответствующего линейного однородного уравнения с начальным условием $x_0(0) = 1$.

Доказательство. Положим $x(t) = x_0(t)\,y(t)$. Определим уравнение

$$dy(t) = u\left(t, y(t)\right)dt + \nu\left(t, y(t)\right)dW(t) + b\left(t, y(t)\right)dB(t), \quad t \geq 0,$$

которому удовлетворяет процесс $y(t)$. Применим формулу Ито к процессу $y = x / x_0 = F(x, x_0)$, рассматривая пару $\overline{x} = (x, x_0)$ как решение двумерного уравнения

$$d\overline{x}(t) = \left(\overline{\alpha}_1(t)\overline{x}(t) + \overline{\alpha}_2(t)\right)dt + p\left(t, \overline{x}(t)\right)d\overline{W}(t) + \left(\overline{\gamma}_1(t)\overline{x}(t) + \overline{\gamma}_2(t)\right)dB(t),$$

с начальным условием $\overline{x}(0) = \left(x(0), 1\right)^T$, где $\overline{\alpha}_1 = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_1)$, $\overline{\gamma}_1 = \mathrm{diag}(\gamma_1, \gamma_1)$, $\overline{\alpha}_2 = (\alpha_2, 0)^T$, $\overline{\gamma}_1 = (\gamma_2, 0)^T$, $p = \mathrm{diag}(\beta_1 x + \beta_2, \beta_1 x_0)$, $\overline{W} = (W, W)^T$. Ввиду того, что справедливы соотношения

$$F'_t = 0, \quad F'_{\overline{x}} = \left(\frac{1}{x_0}, -\frac{x}{x_0^2}\right), \quad F''_{\overline{x}^2} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{x_0^2} \\ -\dfrac{1}{x_0^2} & \dfrac{2x}{x_0^3} \end{pmatrix},$$

будем иметь

$$dy = \left(\frac{\alpha_2}{x_0} - \frac{\beta_1\beta_2}{x_0}\right)dt + \frac{\gamma_2}{x_0}dB + \frac{\beta_2}{x_0}dW.$$

Итак, получили простейшее уравнение для $y(t)$, причем $y(0) = x(0) / x_0(0) = x(0)$. Таким образом, решение исходного уравнения выражается формулой

$$x(t)=x_0(t)y(t)=x_0(t)\left(x(0)+\int_0^t\frac{\alpha_2(\tau)-\beta_1(\tau)\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)}d\tau+\int_0^t\frac{\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)}dW(\tau)+\int_0^t\frac{\gamma_2(\tau)}{x_0(\tau)}dB(\tau)\right),$$

что и требовалось доказать.

Приведение к линейным неоднородным уравнениям. Ограничимся рассмотрением автономных уравнений

$$dx(t)=f\big(x(t)\big)dt+g\big(x(t)\big)dW(t)+\sigma\big(x(t)\big)dB(t),\quad t\ge 0,\tag{12}$$

а также поиском автономной замены $y=F(x)$, приводящей указанное уравнение к линейному неоднородному уравнению

$$dy(t)=\big(\alpha_1 y(t)+\alpha_2\big)dt+\big(\beta_1 y(t)+\beta_2\big)dW(t)+\big(\gamma_1 y(t)+\gamma_2\big)dB(t),\quad t\ge 0,\tag{13}$$

с постоянными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$. Согласно формуле Ито должны выполняться соотношения

$$\alpha_1 F(x)+\alpha_2=F'(x)f(x)+\frac{1}{2}F''(x)g^2(x),\tag{14}$$

$$\beta_1 F(x)+\beta_2=F'(x)g(x),\tag{15}$$

$$\gamma_1 F(x)+\gamma_2=F'(x)\sigma(x).\tag{16}$$

Решая линейные неоднородные по F уравнения (15), (16), находим функцию F:

$$F(x)=C_\beta\exp\left(\beta_1\int_0^x\frac{ds}{g(s)}\right)-\frac{\beta_2}{\beta_1}=C_\gamma\exp\left(\gamma_1\int_0^x\frac{ds}{\sigma(s)}\right)-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

Подставляя в последнюю формулу значение $x=0$, легко найти константы $C_\beta=F(0)+\beta_2/\beta_1$ и $C_\gamma=F(0)+\gamma_2/\gamma_1$. Далее ограничимся случаем $\beta_2/\beta_1=\gamma_2/\gamma_1$. Тогда на выбор функций g, σ накладывается ограничение

$$\beta_1\int_0^x\frac{ds}{g(s)}=\gamma_1\int_0^x\frac{ds}{\sigma(s)},$$

дифференцируя которое, выводим соотношение

$$\frac{\sigma(x)}{g(x)}=\frac{\gamma_1}{\beta_1}=\text{const}.$$

Обозначим $G(x)=\int_0^x\frac{ds}{g(s)}$. Подставим выражение для функции $F(x)=C_\beta e^{\beta_1 G(x)}-\frac{\beta_2}{\beta_1}$ в формулу (14):

$$\begin{gathered}\alpha_1 C_\beta e^{\beta_1 G(x)}+\frac{\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2}{\beta_1}=C_\beta e^{\beta_1 G(x)}\frac{\beta_1}{g}f+\left(C_\beta e^{\beta_1 G(x)}\frac{\beta_1^2}{2g^2}-C_\beta e^{\beta_1 G(x)}\frac{\beta_1 g'}{2g^2}\right)g^2,\\ e^{\beta_1 G(x)}\left(\beta_1\left(\frac{f}{g}-\frac{g'}{2}\right)+\frac{\beta_1^2}{2}-\alpha_1\right)=\frac{\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2}{\beta_1 C_\beta}.\end{gathered}\tag{17}$$

Обозначим $A(x)=\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{g'(x)}{2}$ и продифференцируем последнее соотношение. Получим:

$$\beta_1 e^{\beta_1 G(x)}\left(A'(x)+\beta_1\frac{A(x)}{g(x)}+\left(\frac{\beta_1^2}{2}-\alpha_1\right)\frac{1}{g(x)}\right)=0.\tag{18}$$

Умножим последнее равенство на $\dfrac{g(x)}{\beta_1}e^{\beta_1 G(x)}$ и полученное равенство вновь продифференцируем. Будем иметь

$$\left(g(x)A'(x)\right)' + \beta_1 A'(x) = 0.$$

Если к тому же $A'(x) \neq 0,$ то

$$\frac{\left(g(x)A'(x)\right)'}{A'(x)} = -\beta_1 = \text{const}.$$

Таким образом, необходимо выполнение следующих условий:

$$A(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)}{2}, \tag{19}$$

$$\frac{\left(g(x)A'(x)\right)'}{A'(x)} = c_1, \tag{20}$$

$$\frac{\sigma(x)}{g(x)} = c_2, \tag{21}$$

для некоторых постоянных $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Обратно, пусть заданные функции $f(t)$, $g(t)$, $\sigma(t)$ удовлетворяют соотношениям (19), (20), (21). Тогда положим $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$, $\beta_1 = -c_1$, $\gamma_1 = c_2\beta_1$ и выберем преобразование $F(x) = e^{\beta_1 G(x)}$. Тогда легко проверить, что соотношения (15) и (16) выполнены. Осталось подобрать α_1, α_2 так, чтобы выполнялось соотношение (14). Поскольку $\left(g(x)A'(x)\right)' + \beta_1 A'(x) = 0,$ то величина $\left(g(x)A'(x)\right)' + \beta_1 A'(x) = c_3,$ $c_3 \in \mathbb{R}$, – константа. Значит, $A'(x) + \beta_1 \dfrac{A(x)}{g(x)} = \dfrac{c_3}{g(x)}$ и соотношение (18) диктует выбор константы $\alpha_1 = c_3 + \beta_1^2/2.$ Теперь, интергрируя соотношение (18), получим соотношение (17). Согласно (18), выражение в левой части (полностью определяемое заданными функциями f, g) будет константой. При указанном выборе эта константа совпадает с α_2. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 2. *Уравнение* (12) *с* $g(x) \neq 0,$ $A'(x) \neq 0$ *приводимо к уравнению* (13) *тогда и только тогда, когда найдутся постоянные* c_1, c_2 *такие, что оказываются выполненными соотношения* (19), (20), (21).

П р е д л о ж е н и е 3. *Уравнение бернуллиевского типа*

$$dx(t) = \left(\alpha x^n(t) + \beta x(t)\right)dt + \gamma x(t)dW(t) + \delta x(t)dB(t)$$

приводится к линейному неоднородному уравнению.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В данном случае

$$G(x) = \int_1^x \frac{ds}{\gamma s} = \frac{1}{\gamma}\ln x,\ A(x) = \frac{\alpha}{\gamma}x^{n-1} + \frac{\beta}{\gamma} - \frac{\gamma}{2},\ A'(x) = \frac{\alpha(n-1)}{\gamma}x^{n-2}(t),$$

$$\left(g(x)A'(x)\right)' = \alpha(n-1)^2 x^{n-2}(t),\ \frac{\left(g(x)A'(x)\right)'}{A'(x)} = \gamma(n-1) = c_1.$$

Выберем преобразование $F(x) = C_\beta e^{-c_1 G(x)} = C_\beta x^{1-n}$. Подставляя функцию $F(x)$ в (15), найдем значение константы $C_\beta = \dfrac{1}{1-n}$. Итак, $y = F(x) = \dfrac{1}{1-n}x^{1-n}$, $x = \left((1-n)y\right)^{1/(1-n)}$.

Уже найдены значения $\beta_1 = -c_1 = \gamma(1-n)$, $\gamma_1 = \delta(1-n)$. Далее имеем

$$c_3 = \gamma x A'(x) + \beta_1 A(x) = -\beta(n-1) + \frac{\gamma^2(n-1)}{2},$$

$$\alpha_1 = (n-1)\left(-\beta + \frac{\gamma^2 n}{2}\right),$$

$$\alpha_2 = C_\beta e^{\beta_1 G(x)}\left(\beta_1 A(x) + \frac{\beta_1^2}{2} - \alpha_1\right) = \frac{1}{1-n} = -F(x)\gamma x A'(x) = \alpha.$$

Таким образом, исходное уравнение сводится к следующему линейному неоднородному уравнению:

$$dy(t) = \left(\alpha + (n-1)\left(-\beta + \frac{\gamma^2 n}{2}\right)y(t)\right)dt + \gamma(1-n)y(t)dW(t) + \delta(1-n)y(t)dB(t),$$

что и требовалось доказать.

Переход к уравнению Стратоновича. Наряду с уравнением (1) рассмотрим соответствующее уравнение Стратоновича

$$dx(t) = \big(f(t,x(t)) - c(t,x(t))\big)dt + g(t,x(t)) \circ dW(t) + \sigma(t,x(t))dB(t), \quad t \ge 0, \tag{22}$$

где $c(t,x) = \frac{1}{2}g_x'(t,x)g(t,x)$.

Поскольку решения смешанных уравнений, вообще говоря, не являются семимартингалами, то понятие интеграла Стратоновича требует дополнительных разъяснений.

Во-первых, отметим, что решения смешанных уравнений (1) имеют конечную квадратическую вариацию $[x](t)$ в силу того, что процесс

$$\int_0^t f(s,x(s))ds, \quad t \ge 0,$$

абсолютно непрерывен, а процесс

$$\int_0^t \sigma(s,x(s))dB(s), \quad t \ge 0,$$

имеет непрерывные по Гельдеру траектории порядка $\kappa > 1/2$. Более того,

$$[x](t) = \int_0^t g^2(s,x(s))ds.$$

Следуя [15], для непрерывных процессов $X(t)$, $Y(t)$ с конечной квадратической вариацией определим прямой, обратный и симметрический стохастические интегралы:

$$\int_0^t Y(s)d^-X(s) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^t Y(s)\frac{X(s+\varepsilon)-X(s)}{\varepsilon}ds,$$

$$\int_0^t Y(s)d^+X(s) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^t Y(s)\frac{X(s)-X((s-\varepsilon)\vee 0)}{\varepsilon}ds,$$

$$\int_0^t Y(s)d^\circ X(s) = \frac{1}{2}\int_0^t Y(s)d^-X(s) + \frac{1}{2}\int_0^t Y(s)d^+X(s).$$

Квадратической ковариацией процессов X, Y называется процесс

$$[X,Y](t) = \int_0^t Y(s)d^+X(s) - \int_0^t Y(s)d^-X(s).$$

Прямой и симметрический стохастические интегралы

$$\int_0^t Y(s)d^- X(s),\ \int_0^t Y(s)d^\circ X(s)$$

являются расширением интегралов Ито и Стратоновича соответственно на класс непрерывных процессов с конечной квадратической вариацией.

Пусть функция $F(t, x)$ имеет непрерывные частные производные F_t', F_x', F_{x^2}''. Тогда процесс $y(t) = F\left(t, x(t)\right)$ является непрерывным, имеет конечную квадратическую вариацию. Так как стохастические дифференциалы процессов $y(t)$, $W(t)$ имеют вид

$$dy(t) = \left(F_t'\left(t, x(t)\right) + F_x'\left(t, x(t)\right) f\left(t, x(t)\right) + \frac{1}{2} F_{x^2}''\left(t, x(t)\right) g^2\left(t, x(t)\right)\right) dt +$$
$$+ F_x'\left(t, x(t)\right) g\left(t, x(t)\right) dW(t) + F_x'\left(t, x(t)\right) \sigma\left(t, x(t)\right) dB(t),$$
$$dW(t) = 0 \cdot dt + 1 \cdot dW(t) + 0 \cdot dB(t),$$

то квадратическая ковариация процессов $y(t)$ и $W(t)$ равна

$$[y, W](t) = \int_0^t F_x'\left(s, x(s)\right) g\left(s, x(s)\right) ds.$$

С другой стороны, в силу определения прямого и симметрического стохастических интегралов имеем

$$\int_0^t F\left(s, x(s)\right) \circ dW(s) = \int_0^t F\left(s, x(s)\right) dW(s) + \frac{1}{2}\left[F\left(\cdot, x(\cdot)\right), W(\cdot)\right](t) =$$
$$= \int_0^t F\left(s, x(s)\right) dW(s) + \frac{1}{2}\int_0^t F_x'\left(s, x(s)\right) g\left(s, x(s)\right) ds.$$

Полагая $F(t, x) = g(t, x)$, заключаем, что процесс $x(t)$ является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда процесс $x(t)$ является решением уравнения Стратоновича (22).

Замечание 3. Легко видеть, что проведенные рассуждения также сохраняют силу в случае многомерного уравнения (1) и соответствующего уравнения Стратоновича.

Пример 1. Для уравнения

$$dx(t) = x^3(t)dt + x^2(t)dW(t) + x^2(t)dB(t),\ x(0) = x_0,$$

соответствующее уравнение Стратоновича имеет вид

$$dx(t) = x^2(t) \circ dW(t) + x^2(t)dB(t).$$

Последнее уравнение имеет решение

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0\left(W(t) + B(t)\right)},$$

которое является решением и исходного уравнения.

2. Дифференциальные уравнения для математических ожиданий и плотностей распределений решений. В этом разделе рассмотрим автономное уравнение (1), т. е.

$$dx(t) = f\left(x(t)\right)dt + g\left(x(t)\right)dW(t) + \sigma\left(x(t)\right)dB(t),\quad t \ge 0.$$

Будем предполагать, что выполнены условия, обеспечивающие существование и единственность решений автономного уравнения (1).

Через $C^1_{\text{Lin}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ обозначим множество всех непрерывно дифференцируемых функций $h:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$, имеющих линейный порядок роста. В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты $\tilde f = f-\frac{1}{2}g'_x g, g_j, \sigma_j\,(j=1,...,d)$ принадлежат множеству $C^1_{\text{Lin}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$.

Рассмотрим автономное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$dz(t)=h\big(z(t)\big)dt,\ t\in\mathbb{R},$$

где $h=\operatorname{col}(h^1,\dots,h^d)\in C^1_{\text{Lin}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$, и обозначим через

$$z^y(t)=\alpha_h(y,t)=\operatorname{col}\Big(\alpha^1_h(y,t),\dots,\alpha^d_h(y,t)\Big)$$

решение (единственное) данного уравнения с начальным условием $\alpha_h(y,0)=y$.

П р е д л о ж е н и е 4. *Функция* $\alpha_h(y,t)$ *удовлетворяет системе уравнений*

$$\frac{\partial\alpha^j_h(y,t)}{\partial t}=\sum_{i=1}^d h^i(y)\frac{\partial\alpha^j_h(y,t)}{\partial y_i},\ j=1,\dots,d,\quad t\in\mathbb{R},\quad y\in\mathbb{R}^d,$$

и начальному условию $\alpha_h(y,0)=y$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольные $x\in\mathbb{R}^d$, $t\in\mathbb{R}$, $j\in\{1,\dots,d\}$. Тогда

$$\frac{\partial\alpha^j_h(y,t)}{\partial t}=\lim_{r\to0}\frac{\alpha^j_h(y,t+r)-\alpha^j_h(y,t)}{r}=\lim_{r\to0}\frac{\alpha^j_h\big(\alpha_h(y,r),t\big)-\alpha^j_h(y,t)}{r}=$$

$$=\sum_{i=1}^d\frac{\partial\alpha^j_h(y,t)}{\partial y_i}\lim_{r\to0}\frac{\alpha^i_h(y,r)-x_i}{r}=\sum_{i=1}^d\frac{\partial\alpha^j_h(y,t)}{\partial y_i}\lim_{r\to0}\frac{1}{r}\int_0^r h^i\big(\alpha_h(y,s)\big)ds=$$

$$=\sum_{i=1}^d h^i(y)\frac{\partial\alpha^j_h(y,t)}{\partial y_i},$$

что и требовалось доказать.

Из предложения 4 вытекает, что $z^y(t)=T_h(t)y$, где $T_h(t):=e^{tM_h}$ – C_0-полугруппа на $C(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$, порожденная дифференциальным оператором $M_h: C^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)\to C(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$, действующим по правилу

$$(M_h w)(y)=\operatorname{col}\left(\sum_{i=1}^d h^i(y)\frac{\partial w^1}{\partial y_i},\dots,\sum_{i=1}^d h^i(y)\frac{\partial w^d}{\partial y_i}\right),$$

где $w=\operatorname{col}(w^1,\dots,w^d)\in C^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$, $y\in\mathbb{R}^d$.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что семейство отображений $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A}\subseteq C^1_{\text{Lin}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ порождает коммутирующие потоки, если для любых $\alpha,\beta\in A$ операторы $T_{h_\alpha}(t_1)$, $T_{h_\beta}(t_2)$ перестановочные для любых $t_1,t_2\in\mathbb{R}$.

З а м е ч а н и е 4. Если $d=1$, то легко видеть, что семейство $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A}\subseteq C^1_{\text{Lin}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ порождает коммутирующие потоки тогда и только тогда, когда для любого $\alpha\in A$ найдется постоянная γ_α такая, что $h_\alpha=\gamma_\alpha\varphi(x)$, где $\varphi\in C^1_{\text{Lin}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Обозначим $\Gamma=\{\tilde f\}\cup\{g_j\mid j=1,\dots,d\}\cup\{b_j\mid j=1,\dots,d\}$. Через $x^y(t)$ будем обозначать решение автономного уравнения (1) с начальным условием $x(0)=y\in\mathbb{R}^d$.

Определим функцию $F:\mathbb{R}^{3d+1}\to\mathbb{R}^d$ следующим образом:

$$F(y,t,s_1,\dots,s_d,\tau_1,\dots,\tau_d)=\Big(T_{\tilde f}(t)T_{g_1}(s_1)\dots T_{g_d}(s_d)T_{\sigma_1}(\tau_1)\dots T_{\sigma_d}(\tau_d)\Big)(y),$$

где $y\in\mathbb{R}^d$, $t\in\mathbb{R}$, s_j, $\tau_j\in\mathbb{R}$ $(j=1,\dots,d)$.

П р е д л о ж е н и е 5. *Если семейство* Γ *порождает коммутирующие потоки, то*

$$x^y(t) = F\left(y, t, W^1(t), \ldots, W^d(t), B^1(t), \ldots, B^d(t)\right)$$

п.н. для любого $t \in \mathbb{R}^+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольные $y \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}^+$ и зафиксируем их. Применяя формулу Ито к процессу $x^y(t)$, используя при этом условие коммутирования операторов $T_\alpha(t_1)$, $T_\beta(t_2)$, $\alpha, \beta \in \Gamma$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, получим соотношения

$$F\left(y, t, W^1(t), \ldots, W^d(t), B^1(t), \ldots, B^d(t)\right) =$$

$$= F(y, 0, \quad, 0) + \int \left(\frac{\partial F\left(y, u, W(u), B(u)\right)}{\partial} + - \sum_{=1} \frac{\partial \;\, F\left(y, u, W(u), B(u)\right)}{\partial} \right) du +$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial F\left(y, u, W(u), B(u)\right)}{\partial s_j} dW^j(u) + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial F\left(y, u, W(u), B(u)\right)}{\partial \tau_j} dB^j(u) =$$

$$= y + \int_0^t f\left(F\left(y, u, W(u), B(u)\right)\right) du + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t g_j\left(F\left(y, u, W(u), B(u)\right)\right) dW^j(u) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma_j\left(F\left(y, u, W(u), B(u)\right)\right) dB^j(u).$$

Непрерывность по Гельдеру траекторий процесса $x^y(t)$ вытекает из непрерывной дифференцируемости функции F и непрерывности по Гельдеру с любым показателем $\alpha < H$ траекторий процесса $B(t)$, а также непрерывности по Гельдеру с любым показателем $\alpha < 1/2$ траекторий процесса $W(t)$. Предложение доказано.

Т е о р е м а 3. *Пусть семейство* Γ *порождает коммутирующие потоки, функция* $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *вместе со своими частными производными до второго порядка включительно непрерывна и имеет полиномиальный порядок роста. Тогда функция* $u_h(y,t) = E\left(h\left(x^y(t)\right)\right)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial u_h(y,t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{d} f_j(y) \frac{\partial u_h(y,t)}{\partial y_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^{d} g_{ik}(y) g_{jk}(y) \frac{\partial^2 u_h(y,t)}{\partial y_i \partial y_j} +$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^{d} H t^{2H-1} \sigma_{ik}(y) \left(\sigma_{jk}(y) \frac{\partial^2 u_h(y,t)}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial \sigma_{jk}(y)}{\partial y_i} \frac{\partial u_h(y,t)}{\partial y_j} \right), \; t > 0, \; y \in \mathbb{R}^d,$$

и начальному условию $u_h(y, 0) = h(y)$, $y \in \mathbb{R}^d$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим функцию $G_d : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$G_d(y, \tau_d) = h\left(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y)\right), \; y \in \mathbb{R}^d, \; \tau_d \in \mathbb{R}.$$

Применяя формулу Ито к процессу $G_d\left(y, B^d(t)\right)$, $t \in \mathbb{R}^+$, получим соотношение

$$G_d\left(y, B^d(t)\right) = G_d(y, 0) + \int_0^t \frac{\partial G_d\left(y, B^d(s)\right)}{\partial \tau_d} \lozenge dB^d(s) + \int_0^t H s^{2H-1} \frac{\partial^2 G_d\left(y, B^d(s)\right)}{\partial \tau_d^2} ds, \tag{23}$$

где стохастический интеграл в правой части соотношения (23) – интеграл Вика – Ито – Скорохода [1].

Используя предложение 4, выразим частную производную $\frac{\partial^2 G_d(y,\tau_d)}{\partial \tau_d^2}$ через частные производные $\frac{\partial^2 G_d(y,\tau_d)}{\partial y_i y_j}$, $\frac{\partial G_d(y,\tau_d)}{\partial y_i}$. Получаем

$$\frac{\partial G_d(y,\tau_d)}{\partial \tau_d}=\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial h\left(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y)\right)}{\partial y_j}\frac{\partial \alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial \tau_d}=\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial h\left(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y)\right)}{\partial y_j}\sigma_d^i(y)\frac{\partial \alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_i},$$

$$\frac{\partial^2 G_d(y,\tau_d)}{\partial \tau_d^2}=\sum_{i,j,k,l=1}^{d}\frac{\partial^2 h\left(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y)\right)}{\partial y_j \partial y_k}\sigma_d^i(y)\sigma_d^l(y)\frac{\partial \alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)(y,\tau_d)}{\partial y_i}\frac{\partial \alpha^k_{\sigma_d}(y,\tau_d)(y,\tau_d)}{\partial y_l}+$$

$$+\sum_{i,j,k=1}^{d}\frac{\partial h\left(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y)\right)}{\partial y_j}\sigma_d^i(y)\left(\frac{\partial \sigma_d^k(y)}{\partial y_i}\frac{\partial \alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_k}+\sigma_d^k(y)\frac{\partial^2 \alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_k y_i}\right),$$

$$\frac{\partial G_d(y,\tau_d)}{\partial y_i}=\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial h\left(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y)\right)}{\partial y_j}\frac{\partial \alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_i},$$

$$\frac{\partial^2 G_d(y,\tau_d)}{\partial y_i y_l}=\sum_{j,k=1}^{d}\frac{\partial^2 h\left(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y)\right)}{\partial y_j \partial y_k}\frac{\partial \alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_i}\frac{\partial \alpha^k_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_l}+\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial h\left(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y)\right)}{\partial y_j}\frac{\partial^2 \alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_i \partial y_l}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 G_d(y,\tau_d)}{\partial \tau_d^2}=\sum_{i,l=1}^{d}\frac{\partial^2 G_d(y,\tau_d)}{\partial y_i y_l}\sigma_d^i(x)\sigma_d^l(y)+\sum_{i,k=1}^{d}\frac{\partial G_d(y,\tau_d)}{\partial y_k}\sigma_d^i(y)\frac{\partial \sigma_d^k(y)}{\partial y_i}=\left(M^2_{\sigma_d}G_d(\cdot,\tau_d)\right)(y). \quad (24)$$

Обозначим $\psi_d(y,t)=EG_d\left(y,B^d(t)\right)$. Тогда из соотношений (23), (24), теоремы Фубини и правила Лейбница вытекает равенство

$$\psi_d(y,t)=\psi_d(y,0)+\int_0^t Hs^{2H-1}\left(M^2_{\sigma_d}\psi_d(\cdot,s)\right)(y)ds. \quad (25)$$

Из соотношения (25) вытекает справедливость соотношения

$$\frac{\partial \psi_d(\cdot,t)}{\partial t}=Ht^{2H-1}M^2_{\sigma_d}\psi_d(\cdot,t). \quad (26)$$

Определим функцию $G_{d-1}:\mathbb{R}^{d+1}\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ равенством

$$G_{d-1}(y,\tau_{d-1},t)=\psi_d\left(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})(y),t\right),\ y\in\mathbb{R}^d,\ \tau_{d-1}\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}^+.$$

Применяя формулу Ито к процессу $G_{d-1}\left(y,B^{d-1}(t),t\right)$, получим соотношение

$$G_{d-1}\left(y,B^{d-1}(t),t\right)=G_{d-1}(y,0,0)+\int_0^t\frac{\partial G_{d-1}\left(y,B^{d-1}(s),s\right)}{\partial \tau_{d-1}}\lozenge dB^{d-1}(s)+$$

$$+\int_0^t\left(\frac{\partial G_{d-1}\left(y,B^{d-1}(s),s\right)}{\partial \tau_d}+Hs^{2H-1}\frac{\partial^2 G_{d-1}\left(y,B^{d-1}(s),s\right)}{\partial \tau_{d-1}^2}\right)ds. \quad (27)$$

Отметим, что для каждых $y\in\mathbb{R}^d$, $\tau_{d-1}\in\mathbb{R}$, $s\in\mathbb{R}^+$ справедливо равенство

$$\frac{\partial^2 G_{d-1}(y,\tau_{d-1},s)}{\partial \tau_{d-1}^2}=\left(M^2_{\sigma_d}G_{d-1}(\cdot,\tau_{d-1},s)\right)(y). \quad (28)$$

Действительно, в силу правила Лейбница достаточно проверить, что для любых $y \in \mathbb{R}^d$, $\tau_{d-1} \in \mathbb{R}$, $\tau_d \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau_{d-1}^2} h\Big(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})T_{\sigma_d}(\tau_d)(x)\Big) = \Big(M_{\sigma_{d-1}}^2 h\Big(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})T_{\sigma_d}(\tau_d)(\cdot)\Big)\Big)(y). \tag{29}$$

Для каждого фиксированного $\tau_d \in \mathbb{R}$ определим функцию $\omega_{\tau_d} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ такую, что

$$\omega_{\tau_d}\Big(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})(y)\Big) = h\Big(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})T_{\sigma_d}(\tau_d)(y)\Big).$$

Теперь, применяя рассуждения, с помощью которых была доказана формула (24), и заменяя при этом функцию $G_d(y, \tau_d)$ функцией $\omega_{\tau_d}\Big(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})(y)\Big)$, устанавливаем справедливость соотношения (29), а вместе с ним и равенства (28).

Обозначим $\psi_{d-1}(y,t) = EG_{d-1}\Big(y, B^{d-1}(t), t\Big)$, тогда с помощью соотношений (26), (27), (28), теоремы Фубини и правила Лейбница получаем равенство

$$\psi_{d-1}(y,t) = \psi_{d-1}(y,0) + \int_0^t \Big(\Big(Hs^{2H-1}M_{\sigma_d}^2 + Hs^{2H-1}M_{\sigma_{d-1}}^2\Big)\psi_{d-1}\Big)(\cdot,s)(y)ds. \tag{30}$$

Из соотношения (30) получаем, что

$$\frac{\partial \psi_{d-1}(\cdot,t)}{\partial t} = \Big(Ht^{2H-1}M_{\sigma_d}^2 + Ht^{2H-1}M_{\sigma_{d-1}}^2\Big)\psi_{d-1}(\cdot,t). \tag{31}$$

Далее рассмотрим функцию $G_{d-2}(y,\tau_{d-2},t) = \psi_{d-1}\Big(T_{b_{d-2}}(\tau_{d-2})(y),t\Big)$. Применяя формулу Ито к процессу $EG_{d-2}\Big(y, B^{d-2}(t), t\Big)$, получим уравнение, аналогичное уравнению (31) для функции $\psi_{d-2}(y, t) = EG_{d-2}\Big(y, B^{d-2}(t), t\Big)$, и т. д. Тем самым придем к следующему уравнению для функции $u_h(y,t) = \cdots = Eh\Big(F\Big(y,t,W^1(t),\ldots,W^d(t),B^1(t),\ldots,B^d(t)\Big)\Big)$:

$$\frac{\partial u_h(\cdot,t)}{\partial t} = \left(M_{\tilde{f}} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} M_{g_d}^2 + \sum_{j=1}^{d} Ht^{2H-1}M_{\sigma_j}^2\right)u_h(\cdot,t).$$

Теорема доказана.

П р и м е р 2. Покажем существенность условия коммутирования потоков, порожденных функциями из семейства Γ, в теореме 3. Рассмотрим линейное стохастическое уравнение

$$dx(t) = x(t)dt + dB(t) \tag{32}$$

с начальным условием

$$x(0) = y \in \mathbb{R}, \tag{33}$$

где $B(t)$ – одномерное дробное броуновское движение с показателем Харста $H \in (1/2, 1)$. Решение $x^y(t)$ задачи Коши (32), (33) задается следующей формулой [19]:

$$x^y(t) = ye^t + \int_0^t e^{t-s}dB(s).$$

Положим $h(y) = y^2$, тогда

$$u_h(y,t) = y^2e^{2t} + e^{2t}2H(2H-1)\int_0^t e^{-s}\int_0^s e^{-v}(s-v)^{2H-2}dvds =$$

$$= y^2e^{2t} + e^{2t}H(2H-1)\int_0^t e^{-u}u^{2H-2}du - H(2H-1)\int_0^t e^{u}u^{2H-2}du =$$

$$= y^2e^{2t} + H\int_0^t (e^{2t-s} + e^s)s^{2H-1}ds.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u_h(y,t)}{\partial t} = 2y^2 e^{2t} + 2He^t t^{2H-1} + 2He^{2t}\int_0^t e^{-s} s^{2H-1} ds,$$

$$y\frac{\partial u_h(y,t)}{\partial y} + Ht^{2H-1}\frac{\partial^2 u_h(y,t)}{\partial y^2} = 2y^2 e^{2t} + 2e^{2t} Ht^{2H-1}.$$

Так как

$$\int_0^t e^{-s} s^{2H-1} ds = -e^{-t} t^{2H-1} + (2H-1)\int_0^t e^{-s} s^{2H-2} ds < -e^{-t} t^{2H-1} + t^{2H-1}$$

для любых $t > 0$, то функция $u_h(y, t)$ не удовлетворяет уравнению из теоремы 3 ни при каких $t > 0$, $y \in \mathbb{R}$. Отметим, что операторы $T_f(t_1)(y) = e^{t_1} y$, $T_\sigma(t_2)(y) = t_2 + y$ не являются перестановочными.

П р и м е р 3. Рассмотрим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$dx(t) = ax(t)dt + bx(t)dB(t) + cx(t)dW(t), \tag{34}$$

с начальным условием

$$x(0) = y \in \mathbb{R}. \tag{35}$$

Пусть $h(y) = y^r$, $r \geq 2$, $u_h(y,t) = Eh\left(x^y(t)\right)$, где $x^y(t)$ – решение задачи Коши (34), (35). Легко видеть, что условия теоремы 3 выполняются и функция $u_h(y, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u_h(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_h(y,t)}{\partial y} y(a + b^2 Ht^{2H-1}) + \frac{\partial^2 u_h(y,t)}{\partial y^2} y^2 (c^2/2 + b^2 Ht^{2H-1}),\ t > 0,\ y \in \mathbb{R},$$

с начальным условием

$$u_h(y,0) = y^r.$$

Т е о р е м а 4. *Пусть семейство* Γ *порождает коммутирующие потоки, решение* $x^y(t)$ *автономного уравнения* (1) *с начальным условием* $x(0) = y$ *имеет плотность распределения* $p(t, y, z)$, *функции* $f(z)$, $g(z)$, $\sigma(z)$, $p(t, y, z)$ *являются достаточно гладкими и ограниченными. Тогда функция* $p(t, y, z)$ *удовлетворяет равенству*

$$\frac{\partial p(t,y,z)}{\partial t} = -\sum_{j=1}^d \frac{\partial\left(f_j(z)p(t,y,z)\right)}{\partial z_j} + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^d \frac{\partial^2\left(g_{ik}(z)g_{jk}(z)p(t,y,z)\right)}{\partial z_i \partial z_j} +$$

$$+\sum_{i,j,k=1}^d Ht^{2H-1}\left(\frac{\partial^2\left(\sigma_{ik}(z)\sigma_{jk}(z)p(t,y,z)\right)}{\partial z_i \partial z_j} - \frac{\partial\left(\sigma_{ik}(z)\dfrac{\partial \sigma_{jk}(z)}{\partial z_i}p(t,y,z)\right)}{\partial z_j}\right), t > 0,\ z \in \mathbb{R}^d.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную функцию $h(z)$ с компактным носителем, имеющую ограниченные и непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Обозначим через A_t оператор, действующий по правилу

$$(A_t h)(z) = \sum_{j=1}^d f_j(z)\frac{\partial h(z)}{\partial z_j} + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^d g_{ik}(z)g_{jk}(z)\frac{\partial^2 h(z)}{\partial z_i \partial z_j} +$$

$$+\sum_{i,j,k=1}^d Ht^{2H-1}\sigma_{ik}(z)\left(\sigma_{jk}(z)\frac{\partial^2 h(z)}{\partial z_i \partial z_j} + \frac{\partial \sigma_{jk}(z)}{\partial z_i}\frac{\partial h(z)}{\partial z_j}\right), t > 0, z \in \mathbb{R}^d.$$

Используя соотношение

$$u_h(y,t) = \int_{\mathbb{R}^d} h(z)p(t,y,z)dz,$$

теорему 3 и правило Лейбница, получаем равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(h(z)\frac{\partial p(t,y,z)}{\partial t}-p(t,y,z)(A_t h)(z)\right)dz=0. \tag{36}$$

Из соотношения (36) вытекает равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(h(z)\frac{\partial p(t,y,z)}{\partial t}-h(z)\left(A_t^* p(t,y,\cdot)\right)(z)\right)dz=0, \tag{37}$$

где A_t^* – сопряженный оператор к оператору A_t. Применяя формулу интегрирования по частям, легко видеть, что

$$(A_t^*\varphi)(z)=-\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial\left(f_j(z)\varphi(z)\right)}{\partial z_j}+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{d}\frac{\partial^2\left(g_{ik}(z)g_{jk}(z)\varphi(z)\right)}{\partial y_i\partial y_j}+$$

$$+\sum_{i,j,k=1}^{d}Ht^{2H-1}\left(\frac{\partial^2\left(\sigma_{ik}(z)\sigma_{jk}(z)\varphi(z)\right)}{\partial z_i\partial z_j}-\frac{\partial\left(\sigma_{ik}(z)\frac{\partial\sigma_{jk}(z)}{\partial z_i}\varphi(z)\right)}{\partial z_j}\right). \tag{38}$$

Теперь из соотношений (37), (38) и плотности в $L_1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ множества функций с компактным носителем, имеющих непрерывные органиченные производные всех порядков, вытекает требуемое утверждение. Теорема доказана.

Список использованных источников

1. Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications / F. Biagini [et al.]. – London: Springer-Verlag, 2008. – 330 p. https://doi.org/10.1007/978-1-84628-797-8

2. Cheridito, P. Regularizing fractional Brownian motion with a view towards stock price modeling / P. Cheridito. – Zurich, ETH, 2001. – 121 p.

3. Guerra, J. Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion / J. Guerra, D. Nualart // Stochastic Analysis and Applications – 2008. – Vol. 26, № 5. – P. 1053–1075. https://doi.org/10.1080/07362990802286483

4. Mishura, Y. S. Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes / Y. S. Mishura. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 411 p. https://doi.org/10.1007/978-3-540-75873-0

5. Mishura, Y. S. Existence and uniqueness of the solution of stochastic differential equation involving Wiener process and fractional Brownian motion with Hurst index $H > 1/2$ / Y. S. Mishura, G. M. Shevchenko // Comm. Statist. Theory Methods. – 2011. – Vol. 40, № 19/20. – P. 3492–3508. https://doi.org/10.1080/03610926.2011.581174

6. Shevchenko, G. Mixed stochastic delay differential equations / G. Shevchenko // Theory Probab. Math. Statist. – 2014. – Vol. 89. – P. 181–195. https://doi.org/10.1090/s0094-9000-2015-00944-3

7. Леваков, А. А. Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями и с разрывными коэффициентами / А. А. Леваков, М. М. Васьковский // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 2. – С. 189–203. https://doi.org/10.1134/s037406411402006x

8. Леваков, А. А. Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями, с разрывными коэффициентами и с частично вырожденным оператором диффузии / А. А. Леваков, М. М. Васьковский // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 8. – С. 1053–1069. https://doi.org/10.1134/s0374064114080056

9. Васьковский, М. М. Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием со стандартным и дробным броуновскими движениями / М. М. Васьковский // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 1. – С. 22–34.

10. Леваков, А. А. Существование решений стохастических дифференциальных включений со стандартным и дробным броуновскими движениями / А. А. Леваков, М. М. Васьковский // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 8. – С. 997–1003.

11. Леваков, А. А. Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями / А. А. Леваков, М. М. Васьковский // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 8. – С. 1011–1019.

12. Васьковский, М. М. Устойчивость и притяжение решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями / М. М. Васьковский // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 2. – С. 160–173.

13. Gard, T. C. Introduction to Stochastic Differential Equations / Gard T. C. – New York; Basel: Marcel Dekker Inc., 1988. – 234 p.

14. Леваков, А. А. Стохастические дифференциальные уравнения / А. А. Леваков. – Минск: БГУ, 2009. – 231 с.

15. Russo, F. Stochastic calculus with respect to continuous finite quadratic variation processes / F. Russo, P. Vallois // Stochastics Rep. – 2000. – Vol. 70, № 1/2. – P. 1–40. https://doi.org/10.1080/17442500008834244

16. Оксендаль, Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения / Б. Оксендаль. – М.: Мир, 2003. – 408 с.

17. Baudoin, F. Operators associated with a stochastic differential equation driven by fractional Brownian motions / F. Baudoin, L. Coutin // Stochastic Processes and their Applications. – 2007. – Vol. 117, № 5. – P. 550–574. https://doi.org/10.1016/j.spa.2006.09.004

18. Vaskouski, M. Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than 1/3 / M. Vaskouski, I. Kachan // Stochastic Analysis and Applications. – 2018. – Vol. 36, № 6. – P. 909–931. https://doi.org/10.1080/07362994.2018.1483247

19. Vyoral, M. Kolmogorov equation and large-time behavior for fractional Brownian motion driven linear SDE's / M. Vyoral // Appl. Math. – 2005. – Vol. 50, № 1. – P. 63–81. https://doi.org/10.1007/s10492-005-0004-4

References

1. Biagini F., Hu Y., Oksendal B., Zhang T. *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*. London, Springer-Verlag, 2008. 330 p. https://doi.org/10.1007/978-1-84628-797-8

2. Cheridito P. *Regularizing Fractional Brownian Motion with a View Towards Stock Price Modeling*. Zurich, ETH, 2001. 121 p.

3. Guerra J., Nualart D. Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion. *Stochastic Analysis and Applications*, 2008, vol. 26, no. 5, pp. 1053–1075. https://doi.org/10.1080/07362990802286483

4. Mishura Y. S. *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2008. 411 p. https://doi.org/10.1007/978-3-540-75873-0

5. Mishura Y. S., Shevchenko G. M. Existence and uniqueness of the solution of stochastic differential equation involving Wiener process and fractional Brownian motion with Hurst index $H > 1/2$. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 2011, vol. 40, no. 19–20, pp. 3492–3508. https://doi.org/10.1080/03610926.2011.581174

6. Shevchenko G. Mixed stochastic delay differential equations. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 2014, vol. 89, pp. 181–195. https://doi.org/10.1090/s0094-9000-2015-00944-3

7. Levakov A. A., Vas'kovskii M. M. Existence of weak solutions of stochastic differential equations with standard and fractional Brownian motions and with discontinuous coefficients. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 2, pp. 189–202. https://doi.org/10.1134/s0012266114020062

8. Levakov A. A., Vas'kovskii M. M. Existence of weak solutions of stochastic differential equations with standard and fractional Brownian motion, discontinuous coefficients, and a partly degenerate diffusion operator. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 8, pp. 1053–1069. https://doi.org/10.1134/s0012266114080059

9. Vas'kovskii M. M. Existence of weak solutions of stochastic delay differential equations driven by standard and fractional Brownian motions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2015, no. 1, pp. 22–34 (in Russian).

10. Levakov A. A., Vas'kovskii M. M. Existence of solutions of stochastic differential inclusions with standard and fractional Brownian motions. *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 8, pp. 991–997. https://doi.org/10.1134/s0012266115080030

11. Levakov A. A., Vas'kovskii M. M. Properties of solutions of stochastic differential equations with standard and fractional Brownian motions. *Differential Equations*, 2016. vol. 52, no. 8, pp. 972–980. https://doi.org/10.1134/s0012266116080024

12. Vas'kovskii M. M. Stability and attraction of solutions of nonlinear stochastic differential equations with standard and fractional Brownian motions. *Differential Equations*, 2017, vol. 53, no. 2, pp. 157–170. https://doi.org/10.1134/s0012266117020021

13. Gard T. C. *Introduction to Stochastic Differential Equations*. New York, Basel, Marcel Dekker Inc., 1988. 234 p.

14. Levakov A. A. *Stochastic Differential Equations*. Minsk, BSU, 2009. 231 p. (in Russian).

15. Russo F., Vallois P. Stochastic calculus with respect to continuous finite quadratic variation processes. *Stochastics and Stochastic Reports*, 2000, vol. 70, no. 1–2, pp. 1–40. https://doi.org/10.1080/17442500008834244

16. Oksendal B. *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2003. 379 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-14394-6_5

17. Baudoin F., Coutin L. Operators associated with a stochastic differential equation driven by fractional Brownian motions. *Stochastic Processes and their Applications*, 2007, vol. 117, no. 5, pp. 550–574. https://doi.org/10.1016/j.spa.2006.09.004

18. Vaskouski M., Kachan I. Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than 1/3. *Stochastic Analysis and Applications*, 2018, vol. 36, no. 6, pp. 909–931. https://doi.org/10.1080/07362994.2018.1483247

19. Vyoral M. Kolmogorov equation and large-time behavior for fractional Brownian motion driven linear SDE's. *Applications of Mathematics*, 2005, vol. 50, no. 1, pp. 63–81. https://doi.org/10.1007/s10492-005-0004-4

Информация об авторах

Васьковский Максим Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vaskovskii@bsu.by. https://orcid.org/0000-0001-5769-3678

Качан Илья Вадимович – аспирант, ассистент кафедры высшей математики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ilyakachan@gmail.com

Information about the authors

Maksim M. Vas'kovskii – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vaskovskii@bsu.by. https://orcid.org/0000-0001-5769-3678

Ilya V. Kachan – Postgraduate Student, Assistant of the Department of Higher Mathematics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ilyakachan@gmail.com